

위상 변경 고유치 재해석 기법을 이용한 최적 구조물 동특성 변경

Optimal Structural Dynamics Modification Using Eigen Reanalysis Technique of Topological Modifications

이준호*·박영진**·박윤식***

Joon-Ho Lee, Youngjin Park and Youn-sik Park

Key Words : Structural Dynamics Modification(구조물 동특성 변경), Eigen reanalysis(고유치 재해석), Topological modification(위상 변경), Non-matching node(불일치 절점), Evolution Strategies(진화 전략), Natural frequency(고유진동수)

ABSTRACT

SDM (Structural Dynamics Modification) is a tool to improve dynamic characteristics of a structure, more specifically of a base structure, by adding or deleting auxiliary (modifying) structures. In this paper, the goal of the optimal SDM is set to maximize the natural frequency of a base plate structure by attaching serially-connected beam stiffeners. The design variables are chosen as positions of the attaching beam stiffeners, where the number of stiffeners is considered as a design space. The problem of non-matching interface nodes between the base plate and beam stiffeners is solved by using localized Lagrange multipliers, which act to glue the two structures with non-matching interface nodes. As for the cases of non-matching interface nodes problem, the governing equation of motion of a structure can be considered from the viewpoint of a topological modification, which involves the change of the number of structural members and DOFs. Consequently, the eigenpairs of the beam-stiffened plate structure are obtained by using an eigen reanalysis technique of topological modifications. Evolution Strategies (ES), which is a probabilistic population-based optimization technique that mimics the principles from biological evolution in nature, is utilized as a mean for the optimization.

1. 서론

오늘날, 자동차, 비행기 및 생산 기계와 같은 구조물의 경량화 및 고속 운전화에 의해서 구조물의 동특성과 관련된 진동 소음 문제가 구조물 설계에 있어서 고려해야 할 중요한 인자로 대두되고 있다. 구조물 동특성 변경법(Structural Dynamics Modification)은 고유 진동수 및 모드 형상, 주파수 응답함수와 같은 기저 구조물(base structure)의 동특성을 향상시키기 위해, 부가 구조물(auxiliary structure)의 첨삭을 통해 기저 구조물을 최적으로 변경하고자 할 때 많이 사용되는 방법으로, 1970년대 이후로 많은 연구가 수행되어 왔다. 최근에, 구조물 동특성 변경의 전반적인 방법론 및 고려해야 할 사항(예: 모드 자름 오차, 회전 자유도 등)들이 Avitabile 에 의해 정리되었다⁽¹⁾. 일반적으로, 거대한 구조물의 유한요소모델 해석 시, 대상 구조물은 여러 개의 부분 구조물들로 나뉘는 후, 각기 다른 팀 소속의 엔지니어에 의해 이들 부분 구조물들의 유한요소 모델이 수립된 후에 합치는 과정을 거치게 된다. 이 때, 각 팀에서 만들어지는 부분 구조물의 유한요소 모델은 각각의 모델링 정확도를 맞추기 위해 필요한 요소의 개수가 달라지므로, 전체 구조물을

구성할 경우에 부분 구조물들 간의 접점이 서로 일치하지 않는 경우가 발생할 여지가 있다. 일반적으로 이러한 절점 불일치 문제는 전체 구조물 합성 전에 경계면 상에서 불일치 되는 절점들의 위치를 격자 재생성(mesh regeneration) 과정을 거쳐 일치시키게 되는데, 최적화 기법을 사용하여 최적 구조물 동특성 변경을 수행하고자 할 경우에 이를 적용하기에는 한계가 있다. 최근에 이러한 절점 불일치 문제를 갖는 부분 구조물의 합성 및 재해석에 대한 연구가 많이 진행되어 왔다. Farhat⁽²⁾은 부분 구조물들 간의 경계면에서의 변위 일치 구속 조건을 전역 라그랑지 승수를 사용하여 처리하고, 이를 부분 구조 모드 합성법에 적용하였다. Quiroz 와 Beckers⁽³⁾는 불일치 절점을 갖는 유한요소모델을 연결할 경우에, 라그랑지 승수를 사용하여 이산적(discrete) 및 연속적(continuous)으로 연결시키는 방법론을 제안하였다. Park 과 Fellipa^(4,5)는 전역 라그랑지 승수 대신 국부 라그랑지 승수를 사용하여, Farhat 방법에서의 문제점인, 경계면에 위치한 요소의 타입에 따라 변하게 되는 변위 내삽법(displacement interpolation)문제를 해결하였고, 이를 수치적으로 적용하는 구체적인 절차를 제시하였다. 정의일^(6,7)은 국부 라그랑지 승수를 이용하여 절점 불일치 문제를 처리하였고, 주파수 응답함수 행렬의

행렬식 탐색(determinant search)을 통한 재해석 방법을 제안하였다. 그리고 이를 구조물 동특성 변경에 적용하였다. 이준호⁽⁸⁾는 불일치 절점을 갖는 부분 구조물의 합성 및 재해석에 국부 라그랑지 승수와 위상변경 고유치 재해석 기법을 사용하여 빔 보강재를 이용한 평판의 고유 진동수를 극대화하는 구조물 동특성 변경을 수행하였다.

절점 불일치 문제를 갖는 부분 구조물 합성의 지배 방정식은 자유도 개수의 증가를 동반한 위상 변경의 문제로 고려될 수 있다. Kirsch 와 Papalambros⁽⁹⁾는 모든 형태의 위상 변경을 고려한 통합적인 구조 재해석 방법을 제안하였으나, 주로 정적 재해석(static reanalysis)에 국한되어 있다. 구조 모드 재해석(structural modal reanalysis) 분야에 있어서는, 다양한 형태의 재해석 방법이 제시되었는데^(10,11,12), 이들 방법은 모두 Guyan 축약법⁽¹³⁾을 사용하는 측면에 있어서 유사한 방법들이다.

본 연구에서는 이상에 언급된 방법을 바탕으로, 연속적으로 연결된 빔 보강재를 사용해서 평판의 첫 번째 고유 진동수를 극대화하는 최적 구조물 동특성 변경을 수행하였다. 최적화 수단으로서는 개체 기반 확률론적 최적화 기법인 진화 전략(Evolution Strategies)^(14,15,16)을 사용하였다.

2. 불일치 절점을 갖는 경우의 부분 구조물 합성 및 재해석

2.1 지배 방정식

절점 불일치 문제를 해결하는 방법은 다음과 같다. 먼저 가상의 경계면(virtual interface frame)을 부분 구조물들 간의 경계에 삽입하고, 가상의 절점(virtual node)들을 가상의 경계면에 위치시킨다. 그리고 가상 절점의 변위와 부분 구조물의 경계 절점(interface node)의 변위를 국부 라그랑지 승수로 연결시킴으로써, 부분 구조물의 경계면에서의 경계변위 일치 구속조건을 만족시키게 된다. 그림 1은 불일치 절점을 갖는 세 개의 이웃한 유한요소모델들의 합성을 위한 가상 경계면과 가상 절점들을 나타낸다.

합성된 구조물의 지배 방정식은 국부 라그랑지 승수를 사용해서 경계변위 일치 구속 조건을 부가한 해밀턴 정리로부터 식 (1)과 같이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\lambda} \\ \ddot{u}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -C^T & 0 \\ -C & 0 & C_b B_b \\ 0 & (C_b B_b)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \\ u_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

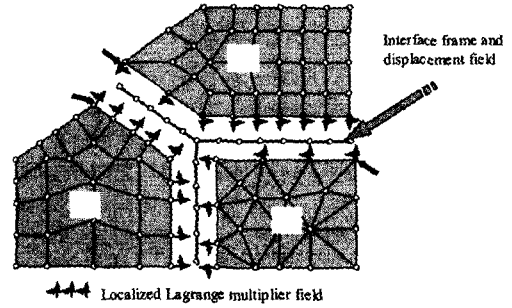


Fig. 1 Subdomain connection using localized Lagrange multipliers

여기서, u , λ , u_p , f 는 각각 절점 변위 벡터, 절점 라그랑지 승수 벡터, 가상 절점의 변위 벡터, 외력이다. M , K , C 는 부분 구조물의 질량, 강성, 연결 행렬들로 구성된, 경계 조건이 부가되지 않은 전체 구조물의 질량, 강성, 연결 행렬이다. $C_b B_b$ 는 가상 절점의 변위를 기술하는 보간 행렬이다. 식 (1)을 유도하는 구체적인 절차는 참고문헌^(4,5,6,7)에서 찾아볼 수 있다.

2.2 위상 변경 고유치 재해석

최근 들어, 구조물의 위상 변경(topological modification)은 구조물의 설계에 있어서의 근간으로서 점차 받아들여지고 있다. 이러한 형태의 구조 변경은 유한요소의 개수나 위치와 같은 구조물의 위상 변경을 다루게 되고, 이로 인해 설계 변수나 자유도 개수의 변화를 동반하게 된다. 본 연구에서는 불일치 절점을 갖는 부분 구조물 합성의 지배 방정식을 자유도 개수의 증가를 동반한 위상 변경 문제로 고려할 수 있다는 데 착안하여 합성된 구조물의 재해석에 위상 변경 고유치 재해석 기법을 적용하기로 한다.

간단한 경우로, 두 개의 부분 구조물들의 합성을 고려하면, 식 (1)은 다음과 같이 자세히 기술될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & -C_1^T & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & -C_2^T & 0 \\ -C_1 & 0 & 0 & 0 & C_b^T B_b^T \\ 0 & -C_2 & 0 & 0 & C_b^T B_b^T \\ 0 & 0 & (C_b^T B_b^T)^T & (C_b^T B_b^T)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ u_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

식 (2)는 식 (3)과 같이 부분 행렬을 사용해서 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_1 & \Delta K_{nm} \\ \Delta K_{mn} & \Delta K_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n \\ V_m \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_1 & \Delta M_{nm} \\ \Delta M_{mn} & \Delta M_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n \\ V_m \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서,

$$\Delta K_{nm} = \begin{bmatrix} 0 & -C_1^T & 0 & 0 \\ K_2 & 0 & -C_2^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_b^1 B_b^1 \\ -C_2 & 0 & 0 & C_b^2 B_b^2 \\ 0 & (C_b^1 B_b^1)^T & (C_b^2 B_b^2)^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta K_{mn} = \Delta K_{nm}^T$$

$$\Delta M_{nm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta M_{mn} = \Delta M_{nm}^T \quad (4)$$

$$\Delta M_{mm} = \begin{bmatrix} M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_n = u_1, \quad V_m = [u_2 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad u_r]^T$$

이고, 1 번 부분 구조물은 변경 전 구조물(즉 기저 구조물)로 고려되고, 2 번 부분 구조물은 위상 변경(즉 부가 구조물)으로써 고려되었다. 본 연구에서는 불일치 절점을 갖는 구조물의 고유치 재해석을 위해서, Yang 과 Lian⁽¹¹⁾에 의해 제안된 방법을 적용하였다. 먼저, 식 (3)에서 V_n 과 연관된 질량을 무시할 수 있다고 가정 하면(즉 ΔM_{nm} , ΔM_{mn} , ΔM_{mm} 이 영행렬), V_n 과 V_m 을 연관시키는 변환행렬 T_{guyan} 을 식 (5)와 같이 얻을 수 있는데, 이는 자유도 축약법 중의 하나인 Guyan 축약법의 변환행렬이 된다.

$$V_m = -\Delta K_{nm}^{-1} \Delta K_{mn} V_n = T_{guyan} V_n \quad (5)$$

여기서 보간 행렬 $C_b B_b$ 의 계수(rank)가 충분하다면, ΔK_{nm} 의 역변환은 가능하다. 식 (3)을 변환행렬 T_{guyan} 을 이용해서 축약시키면 축약된 질량 행렬 M_{guyan} 와 강성 행렬 K_{guyan} 을 얻을 수 있고, 축약된 고유치 문제를 풀으로써 위상 변경된 구조물의 고유 진동수와 모드형상을 얻을 수 있다. 일반적으로, 구조물 동특성 변경을 수행하기 전에 구조 변경 대상이 되는 기저 구조물의 동특성은 미리 구해지는 경우가 많으므로, 축약된 고유치 문제를 직접 푸는 대신에 식 (6)의 ΔM , ΔK 에 대해 모드 섭동법(modal perturbation method)를 적용해서 고유치 재해석을 수행 할 수도 있다.

$$\Delta M = M_{guyan} - M_1, \quad \Delta K = K_{guyan} - K_1 \quad (6)$$

그러나 실제로는, 식 (3)에는 변경된 구조물에 의해 부가된 질량 효과가 존재하므로, Guyan 축약법에 의해 얻어진 해에는 오차가 반드시 수반되게 된다. 이 오차는 다음과 같이 보정되게 된다.

$$V_m = -(\Delta K_{nm} - \omega^2 \Delta M_{nm})^{-1} \Delta K_{nm} V_n \quad (7)$$

여기서, ω_r , V_n 은 Guyan 축약법에 의해 얻어진 고유 진동수와 모드 형상이다. 모드 형상의 직교성(orthogonality)와 Rayleigh 지수법을 적용하면, 변경된 구조물의 오차가 보정된 고유 진동수와 모드형상을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\omega_r^{improved} = \sqrt{\frac{V^T K' V}{V^T M' V}}, \quad V^{improved} = \frac{V}{\sqrt{V^T M' V}} \quad (8)$$

여기서,

$$K' = \begin{bmatrix} K_1 & \Delta K_{nm} \\ \Delta K_{mn} & \Delta K_{mm} \end{bmatrix}, \quad M' = \begin{bmatrix} M_1 & \Delta M_{nm} \\ \Delta M_{mn} & \Delta M_{mm} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$V^T = \begin{Bmatrix} V_n^T & V_m^T \end{Bmatrix}$$

이다.

3. 최적 구조물 동특성 변경 적용 예

2 장에서 기술된 위상 변경 고유치 재해석 기법 및 진화 전략(Evolution Strategies) 최적화 기법을, 평판의 고유 진동수를 극대화하는 최적 구조물 동특성 변경에 적용하였다. 구조 변경의 대상이 되는 기저 구조물은 그림 2 와 같이 세 모서리가 단순 지지된 평판이고, 부가 구조물로는 끝 단이 연속적으로 연결된 빔 보강재를 사용하였다.

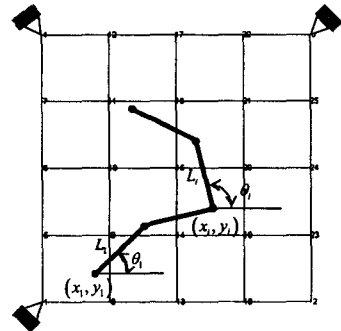


Fig. 2 Stiffened plate by serially connected stiffeners

사용된 평판의 물성치는, 가로길이 $a = 800mm$, 세로길이 $b = 800mm$, 두께 $t_p = 2mm$, 영계수 $E = 200GPa$, 포아송 비 $\nu = 0.3$, 밀도 $\rho = 7800Kg/m^3$ 이다. 빔 보강재는 평판과 동일한 재질로서, 폭 $w = 10mm$, 높이 $h = 10mm$ 인 정사각형 단면을 가지며 각각의 빔 보강재의 길이 L 은 $100mm$ 이다. 빔 보강재의 절점은 고유의 절점 번호를 가지고 있으나, 위치에 따라 평판의 절점과 동일한 좌표값을 가질 수 있다. 여기서, 빔과 평판은

공통된 중립면(mid-plane)을 가지고 있다. 평판과 빔 보강재의 유한요소모델은 MATLAB 기반의 Structural Dynamics Toolbox⁽¹⁷⁾를 사용하여 구성되었다.

고려되는 설계 변수는 첫 번째 붙는 빔 보강재의 한쪽 끝 단의 좌표 (x_1, y_1) 과 빔 보강재의 회전각 $\theta_i (i=1, \dots, N)$ 이다. 이 때 N 은 사용되는 빔 보강재의 개수를 의미한다. 빔 보강재의 개수가 증가함에 따라, 설계변수의 개수 또한 증가하게 된다. 빔 보강재들이 평판의 영역 내에 놓여져야 한다고 가정하면, 구조 최적화 문제는 식 (10)과 같이 수학적으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \omega(N, x_1, y_1, \theta_i) \quad i=1, \dots, N \\ & \text{s.t.} \\ & 0 \leq x_1 \leq 0.8m \\ & 0 \leq y_1 \leq 0.8m \\ & L = 0.1m \end{aligned} \quad (10)$$

$$x_{k+1} = x_k + L \cos \theta_k, \quad y_{k+1} = y_k + L \sin \theta_k, \quad k=1, \dots, N-1$$

이 때, 최적화 과정은 빔 보강재의 개수를 증가시키면서 순차적으로 수행되게 된다. 따라서, 빔 보강재의 개수는 최적화 과정의 특정 단계를 의미하게 된다. 서로 연이은 최적화 단계들 사이에 발생하는 설계공간 불연속성(즉 설계변수의 차이)을 해결하기 위해 그림 3 과 같이 이전 최적화 단계에서 얻어진 해에 새로 부착되는 빔 보강재의 회전각만을 변경시켜서 진화 전략에서의 초기 개체(initial population)들을 생성하는 방법을 사용하였다.

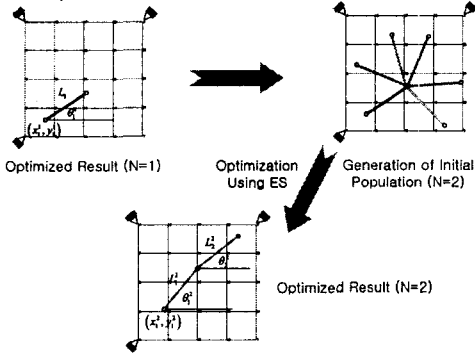


Fig. 3 Scheme of optimization using ES.

최적화 과정은 (a) 빔 보강재의 추가가 더 이상의 고유 진동수 상승을 가져오지 않을 때나 (b) 빔 보강재의 개수가 주어진 N_{max} 보다 커질 경우에 중단되게 된다. 진화 전략에서의 부모 개체의 수는 $\mu = N+2$, 자손 개체의 수는 $\lambda = 2(N+2)$ 로 정하였다.

평판 기저 구조물의 첫 번째와 두 번째 고유 진동수는 각각 3.817Hz 와 12.2827Hz 였다. 먼저, 평판의 첫 번째 고유 진동수를 극대화하는 경우에 대해

고려하였다. 이 때 최대도 이용 가능한 빔 보강재의 개수는 11 개로 설정하였다. 그림 4 는 매 최적화 단계에서의 빔 보강재의 최적화된 위치를 보이고 있다.

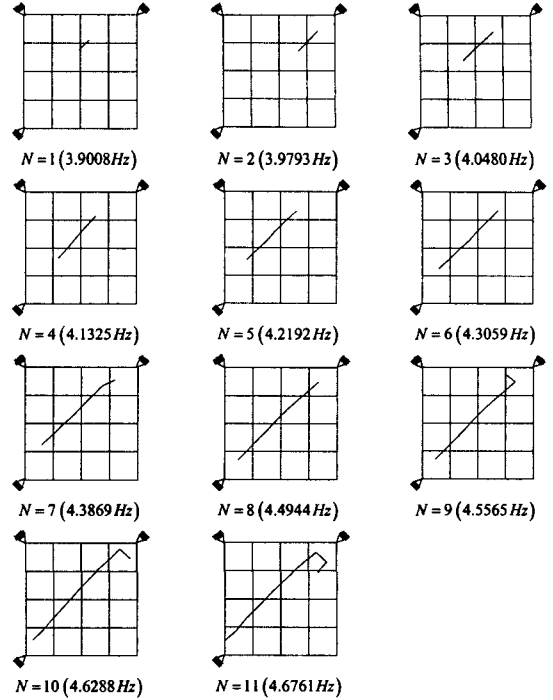


Fig. 4 Optimized layouts of serially connected stiffeners at every optimization step (target: first natural frequency).

최적화 후, 빔 보강재들은 평판의 대각선을 따라서 놓여졌고, 9 번째 단계 이후에 꺾어져서 위치하였다. 첫 번째 고유진동수는 4.6761Hz 로 상승하였다.

다음으로, 평판의 두 번째 고유 진동수를 극대화하는 경우를 고려하였고, 최대도 이용 가능한 빔 보강재의 개수는 8 개로 설정하였다. 매 최적화 단계에서의 빔 보강재의 위치는 그림 5 와 같다. 초반부에서는 빔 보강재들이 평판의 좌측 상반부에 대각선으로 위치하다가, 5 번째 단계에서부터 많이 꺾어진 상태로 위치한다. 그리고, 새로 부착되는 빔 보강재는 이전 단계에서 부착된 빔 보강재와 거의 동일한 영역에 위치하게 됨을 알 수 있다. 따라서 5 번째 단계 이후의 최적화 과정은 빔 보강재의 폭이나 높이와 같은 단면형상 변수를 변경하는 치수 최적화와 그 효과가 동일하게 나타날 것임을 알 수 있다. 최적화 후, 두 번째 고유 진동수는 15.8298Hz 로 상승하였다.

앞서 얻어진 최적해의 물리적 타당을 검증하기 위해, 본 연구에서는 평판에 걸리는 모달 동적 스트레인 에너지(modal dynamic strain energy)분포를 사용하였다

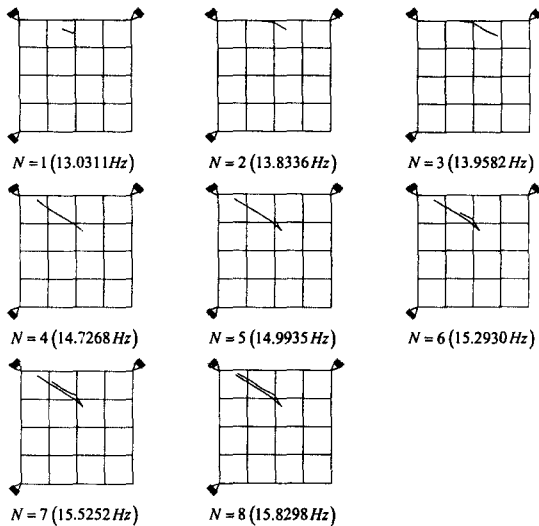


Fig. 5 Optimized layouts of serially connected stiffeners at every optimization step (target: second natural frequency).

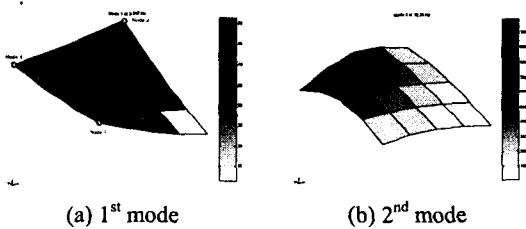


Fig. 6 Modal dynamic strain energy distribution of base plate before SDM.

그림 6은 구조 변경 전에 평판의 첫 번째, 두 번째 모드에서의 모달 동적 스트레인 에너지 분포를 보여 주고 있는데, 스트레인 에너지가 많이 걸리는 영역과 최적화 후의 빔 보강재가 위치한 영역이 동일함을 볼 수 있다. 따라서 얻어진 해의 물리적 타당성을 스트레인 에너지 분포를 이용해서 검증할 수 있었다.

4. 결론

본 연구에서는 불일치 절점을 가지는 부분 구조물 합성의 경우에, 위상 변경 고유치 재해석 기법을 사용해서 합성된 구조물의 고유치를 구하였고, 이를 연속적으로 연결된 빔 보강재를 사용해서 평판의 고유 진동수를 극대화하는 최적 구조물 동특성 변경에 적용하였다. 이 때 최적화 도구로 진화 전략 최적화 기법을 사용하였으며, 구해진 해의 물리적 타당성을 검증하였다.

후기

본 연구는 국가 지정 연구실 사업 “진동 저감을 위한 동특성 변경 기술(2000-N-NL-01-C-148)”과 두뇌한국사업(BK21)의 지원에 의한 것입니다.

참고문헌

- (1) Avitabile, P., 2002, “Twenty years of structural dynamics modification - a review”, Proceeding 20th International Modal Analysis Conference, Los Angeles, CA, USA, pp. 356-372.
- (2) Farhat, C., Geradin, M., 1992, “On A Component Mode Synthesis Method and Its Application to Incompatible Substructures”, Computers & Structures, Vol. 51, No. 5, pp. 459-473.
- (3) Quiroz, L., Beckers, P., 1995, “Non-Conforming Mesh Gluing in the Finite Elements Methods”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 38, pp. 2165-2184.
- (4) Park, K. C., Fellipa, C. A., 2000, “A Variational Principle for the Formulation of Partitioned Structural Systems”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, pp. 395-418.
- (5) Park, K. C., Fellipa, C. A. and Rebel, G., 2002, “A Simple Algorithm for Localized Construction of Non-matching Structural Interfaces”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 53, pp. 2117-2142.
- (6) 정의일, 박윤식, 2001, “비부합 절점으로 이루어진 구조물의 합성과 재해석”, 한국소음진동공학회 추계 학술대회 논문집, pp. 155-160.
- (7) 정의일, 박윤식, 2002, “비부합 결함을 이용한 구조물 변경법”, 한국소음진동공학회 춘계 학술대회 논문집, pp. 666-671.
- (8) Joon-Ho Lee, Youn-sik Park, 2003, “SDM, Utilizing Evolution Strategies: Application to Substructures Having Non-Matching Nodes”, Proceeding 21st International Modal Analysis Conference, Kissimmee, FL, USA, Paper No. 114.
- (9) Kirsch, U., Papalambros, P. Y., 2001, “Structural Reanalysis for Topological Modifications - a Unified Approach”, Structural Multidisciplinary Optimization, Vol. 21, pp. 333-344.
- (10) Yang, X. W., Lian, H. D. and Chen, S. H., 2002, “An Adaptive Iteration Algorithm for Structural Modal Reanalysis of Topological Modifications”, Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, pp. 373-382.
- (11) Yang, X. W., Lian, H. D., 2002, “Hybrid Reanalysis Method for Eigenproblems of Topological Modifications”, AIAA Journal, Vol. 40, No. 6, pp. 1244-1246.
- (12) Rong, F., Chen, S. H. and Chen, Y. D., 2003, “Structural Modal Reanalysis for Topological Modifications with Extended Kirsch Method”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192, pp. 697-707.
- (13) Guyan, R. J., 1973, “Reduction of Stiffness and Mass Matrices”, AIAA Journal, Vol. 3, No. 2, pp. 380.
- (14) Papadrakakis, M., Lagaros, N., Thierauf, G. and Cai, J., 1998, “Advanced Solution Methods in Structural Optimization Based on Evolution Strategies”, Engineering Computation, Vol. 15, No. 1, pp. 12-34.
- (15) Michalewicz, Z., 1999, Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs, 3rd edition, Springer-Verlag.
- (16) Ohkura, K., Matsumura, Y. and Ueda, K., 2001, “Robust Evolution Strategies”, Applied Intelligence, Vol. 15, pp. 153-169.
- (17) Balmès, E., 2002, Structural Dynamics Toolbox Ver. 5.0 (for use with MATLAB), October.