

## 케이싱 오실레이터의 조작성 해석

남윤주\*(부산대 대학원 지능기계공학과), 이육형(울산과학대 디지털 기계학부),  
박명관(부산대 기계공학부)

### Manipulability Analysis of the Casing Oscillator

Y. J. Nam (Mech. & Intelligent Sys. Eng. Dept., PNU), Y. H. Lee (Digital Mech. Eng. Dept., UC),  
M. K. Park (Mech. Eng. Dept., PNU)

#### ABSTRACT

In this paper, input-output velocity transmission characteristics of the Casing Oscillator, which is a constructional machine with 4 degree of freedom are examined. After the Jacobian matrix is decomposed into linear part and angular part, the linear and the angular velocity transmission characteristics are analyzed and visualized in easy way even in the case of 3 dimensional task space with 4 variables. Regarding the measure of dexterity of the Casing Oscillator, the kinematic isotropic index and the manipulability measures which are respectively represented the isotropy and the volume of the manipulability ellipsoid are combined. A performance of the Casing Oscillator is evaluated by the combined manipulability measure.

**Key Words** : Casing Oscillator(케이싱 오실레이터), Jacobian matrix(자코비안 행렬), manipulability ellipsoid(조작성 타원), manipulability measure(조작성 지수), kinematic isotropic index(기구학적 등방성 지수)

#### 1. 서론

로봇 매니플레이터의 설계에 있어 그 크기와 형상을 결정하거나, 작업 중 주어진 일을 수행하기 위한 작업영역 내에서의 매니플레이터의 위치를 결정할 때 다양한 요소를 고려해야 한다. 이러한 요소들 중에서 가장 중요한 요소는 매니플레이터의 작업기(end-effector)가 임의의 또는 특정한 방향과 위치로 얼마나 쉽고, 빠르게 도달할 수 있는가 하는 것이다. 이것을 정량적으로 평가하기 위해 Yoshikawa 는 기구학적 조작성 타원(manipulability ellipsoid)과 조작성 지수(manipulability measure)를 제시하였다.

본 논문은 각 관절들의 전체 작동범위에 대한 출력 특성을 나타내기 위해 가중치 자코비안 행렬(Jacobian matrix)의 개념을 이용하며, 각 차원의 물리적 불일치를 해결하기 위해 가중치 자코비안 행렬에서 직선 운동과 회전 운동에 관련된 부분을 서로 분리시켜 직선 조작성과 회전 조작성 지수를 정의한다. 그리고 타원의 체적을 나타내는 조작성 지수와 등방성을 나타내는 조작성 지수는 각기 그 값의 범위가 다르므로 단순히 그것들을 곱하여 얻어진

결과는 정확하게 출력의 크기와 등방성을 동등한 비중으로 나타낸다고 볼 수 없다. 따라서 이들을 같은 비중에서 고려할 수 있는 새로운 조작성 지수를 정의하고 케이싱 오실레이터(Casing Oscillator)의 속도 전달 특성을 분석한다.

#### 1. 좌표계 설정 및 자유도 해석

본 논문에서 제시한 케이싱 오실레이터는 롤(roll), 피치(pitch), 요(yaw)의 회전운동과 z 축 병진 운동을 하는 4 자유도 건설 장비이다. Fig. 1 은 기구학 해석을 위한 실험장치의 단순화된 모델을 나타낸다. 케이싱 오실레이터는 하판과 상판이 5 개의 1 자유도 미끄럼운동을 하는 작동기로 연결된 페루프 구조로, 병렬형 매니플레이터와 그 형태가 유사하다. 그리고 케이싱 오실레이터에 케이싱이 장착되었을 때 하판과 상판의 중심좌표인 **O** 와 **C** 가 케이싱의 중심위치가 되며 케이싱(casing)은 항상 상판에 수직이다. 케이싱 오실레이터의 하판에 대한 상판의 운동을 기술하기 위해 2 개의 좌표계를 설정한다. 하판의 중심 **O** 에 원점을 둔 좌표계는 기

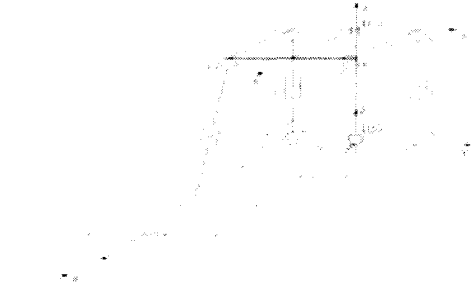


Fig. 1 Kinematic model of the Casing Oscillator

준좌표계(X, Y, Z)이고, 상판의 중심 C에 원점을 둔 좌표계는 이동좌표계(x, y, z)로써 상판과 함께 운동한다. 하판상의 볼관절(ball joint) B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub>와 상판 상의 볼관절 b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>를 연결하는 작동기를 l<sub>2</sub>, l<sub>3</sub>로 표시한다. l<sub>1</sub>, l<sub>4</sub>를 연결하는 유니버설관절(universal joint)과 l<sub>5</sub>의 말단부분에 있는 회전관절(revolute joint)이 연결되어 4 자유도 관절 B<sub>i</sub>를 구성하며, 상판상의 볼관절 b<sub>1</sub>, b<sub>4</sub>와 작동기 l<sub>1</sub>, l<sub>4</sub>로 연결되어 있다. 그리고 하판 상의 고정점 A에서 B<sub>i</sub>까지 연결하는 작동기를 l<sub>i</sub>라 한다.

상판의 회전운동은 케이싱 오실레이터에 장착된 케이싱이 하판의 중심 O에 고정되어 움직이는 것과 같은 효과를 표현하기 위하여 고정 축에 대한 롤, 피치, 요(φ, θ, ϕ)을 이용하여 아래와 같은 회전 행렬로 표시한다.

$$R = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\varphi - s\phi c\varphi & c\phi s\theta c\varphi + s\phi s\varphi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\varphi + c\phi c\varphi & s\phi s\theta c\varphi - c\phi s\varphi \\ -s\theta & c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix}$$

여기서  $c\alpha = \cos \alpha$ ,  $s\alpha = \sin \alpha$  ( $\alpha = \phi, \theta, \varphi$ )이다.

## 2. 역기구학 해석

역기구학 문제는 주어진 상판의 위치와 자세로부터 작동기의 길이를 결정하는 문제이다. l<sub>i</sub>의 길이를 벡터로 표현하면 다음과 같다.

$$l_i = \sqrt{(C + Rb_i - B_i) \cdot (C + Rb_i - B_i)} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$l_5 = \sqrt{(A - E) \cdot (A - E)}$$

케이싱 오실레이터는 l<sub>5</sub>의 여유구동으로 인해 식( ), ( )의 해가 무한개를 가지는 구조이다. 그러나 케이싱 오실레이터가 가장 효율적으로 작업하기 위해서 가능한 큰 피칭 운동이 요구되며 이를 만족하는 l<sub>5</sub>의 위치는 전체 작동범위의 중간위치라는 점을 고려할 때, 초기상태에서 l<sub>5</sub>의 위치를 중립에 둬

으로써 유일한 역기구학 해를 구할 수 있다.

## 3. 자코비안 행렬 유도

역기구학 해석과 마찬가지로 케이싱 오실레이터의 동작 특성과 작업 효율을 고려하여 l<sub>5</sub>를 작동범위의 중립 위치에 둬으로써 자코비안 행렬 유도를 쉽게 할 수 있다. 여유구동을 배제하였으므로 l<sub>5</sub>는 고정되어있다고 가정하고 l<sub>1</sub> ~ l<sub>4</sub>에 의한 자코비안 행렬을 유도한다. 먼저 작동기의 길이를 나타내는 벡터식들을 미분하면

$$\dot{l}_i = \dot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

이다.  $\dot{\mathbf{C}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \equiv \mathbf{V}_c$ 와  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \equiv \boldsymbol{\omega}_i$ 는 각각 기준좌표계에 대한 이동좌표계의 선속도벡터와 각속도벡터를 의미한다. 따라서 상판의 출력 속도는 다음과 같이 나타낸다.

$$\dot{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_c \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$$

식( )와 식( )를 dot product 하면

$$l_i \cdot \dot{l}_i = l_i \cdot \mathbf{V}_c + (\mathbf{b}_i \times l_i) \cdot \boldsymbol{\omega}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

이다. 식( )를 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$J_a \dot{\mathbf{C}} = J_b \boldsymbol{\omega}$$

여기서

$$J_a = \begin{bmatrix} \dot{l}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{l}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{l}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{l}_4 \end{bmatrix}, \quad J_b = \begin{bmatrix} l_1' & (\mathbf{b}_1 \times l_1)^T \\ l_2' & (\mathbf{b}_2 \times l_2)^T \\ l_3' & (\mathbf{b}_3 \times l_3)^T \\ l_4' & (\mathbf{b}_4 \times l_4)^T \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

이고 λ는 각 작동기의 길이를 나타내며 스칼라임을 나타낸다. 케이싱은 상판과 항상 수직을 이루며 움직이므로 다음과 같이 2개의 구속방정식을 유도할 수 있다.

$$\dot{x} = -y\omega_z + z\omega_y$$

$$\dot{y} = x\omega_z - z\omega_x$$

위의 식을 식( )에 대입하여 정리하여 행렬식으로 나타내면

$$J_a \dot{\mathbf{C}} = J_b \boldsymbol{\omega}$$

여기서

$$J_{\omega} = \begin{bmatrix} l_{1z} & -l_{1y}z + (b_1 \times l_1)_x & l_{1x}x + (b_1 \times l_1)_y & -l_{1x}y + l_{1z}x + (b_1 \times l_1)_z \\ l_{2z} & -l_{2y}z + (b_2 \times l_2)_x & l_{2x}x + (b_2 \times l_2)_y & -l_{2x}y + l_{2z}x + (b_2 \times l_2)_z \\ l_{3z} & -l_{3y}z + (b_3 \times l_3)_x & l_{3x}x + (b_3 \times l_3)_y & -l_{3x}y + l_{3z}x + (b_3 \times l_3)_z \\ l_{4z} & -l_{4y}z + (b_4 \times l_4)_x & l_{4x}x + (b_4 \times l_4)_y & -l_{4x}y + l_{4z}x + (b_4 \times l_4)_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e} \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$$

이고  $J_{\omega} \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$  는 정방행렬이다. 따라서 케이싱 오실레이터의 관절공간에서 작업공간으로의 속도 전달 관계를 나타내는 자코비안 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$J_v = J_{\omega}^{-1} J_a$$

#### 4. 조작성 타원

##### 4.1 자코비안 행렬 분리

로봇 매니플레이터의 성능을 평가하는데 가장 잘 확립된 도구 중 하나는 조작성 타원이다. 조작성 타원은 임의의 또는 특정한 작업방향으로 잘 움직일 수 있는 정도를 정량적으로 나타낼 뿐만 아니라 관절공간과 출력공간사이의 최대 입출력 전달비를 나타낸다.

일반적인 로봇 작업공간은 직선공간과 회전공간으로 구성되어 있으며, 이들은 서로 다른 물리적 차원을 가지고 있다. 그러나 연구 초기의 조작성 타원은 이들을 동시에 고려함으로써 실제 로봇의 조작도를 정확히 제시하지 못했고, 일반적으로 로봇들은 3 자유도이상의 작업공간을 가지고 있기 때문에 조작도를 시각적으로 나타내는데 어려움을 가진다. 따라서 작업공간을 직선공간과 회전공간을 독립적으로 분해하여 식( )를 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_c \\ \boldsymbol{\omega}_c \end{bmatrix} = J_v \mathbf{E} = \begin{bmatrix} J_r \\ J_{ro} \end{bmatrix} \mathbf{E}$$

여기서  $J_r$  와  $J_{ro}$  는 각각 직선공간과 회전공간에 대한 자코비안 행렬이다.

##### 4.2 조작성 타원 유도

이전의 조작도 타원은 허용 가능한 관절공간 입력으로 단위 노름(norm)을 사용하여 총체적으로 기술하였기 때문에 각 관절의 구동 특성을 정확히 반영하지 못했고, 전체 작업영역에 대한 특성 파악에 한계를 가진다. 따라서 각 관절 공간의 최대허용범위에 따른 가중행렬을 사용하여 관절입력을 정규화(normalization)한다.

$$\mathbf{E} = W^{-1} \mathbf{E}'$$

여기서,  $W$  는 가중치 행렬을, 상첨자 9는 정규화되었음을 각각 나타낸다. 식( )을 식( )에 대입하면 정규화된 관절입력에 대한 작업공간의 출력은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_c \\ \boldsymbol{\omega}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_r W \\ J_{ro} W \end{bmatrix} \mathbf{E}' = \begin{bmatrix} J'_r \\ J'_{ro} \end{bmatrix} \mathbf{E}'$$

여기서  $J'_{ro}$ ,  $J'_r$  은 가중치 자코비안 행렬이라고 한다.  $J'_{ro}$ ,  $J'_r$  는 해석절차가 동일하므로 이들을 대표하여  $J'_o$  로 표시하고, 입력과 출력 벡터는 각각  $\mathbf{q}'$  와  $\mathbf{p}$  로 표시하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{p} = J'_o \mathbf{q}'$$

가중치 자코비안  $J'_o$  는 일고자 하는 작업공간 출력에 대해서 가능한 관절공간 입력이 다수개 존재하므로 조작성 타원을 유도하기 위한 정규화된 관절입력을 가장 작은 크기의 입력인 최소노름해(minimal norm solution)으로 하면 식( )는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{q}'_m = J'^{-1}_o \mathbf{p}$$

이때  $J'^{-1}_o$  는 다음과 같이 특이값 분해(singular value decomposition)를 이용하여 얻어진다.

$$J'^{-1}_o = V_o \Sigma_o^{-1} U_o^T$$

따라서 조작성 타원은 다음과 같이 나타낸다.

$$(U_o^T \mathbf{p})^T (\Sigma_o^{-1} \Sigma_o) (U_o^T \mathbf{p}) \leq 1$$

#### 5. 조작성 지수

우선 조작성 타원의 체적과 등방성 지수를 아래와 같이 정의한다.

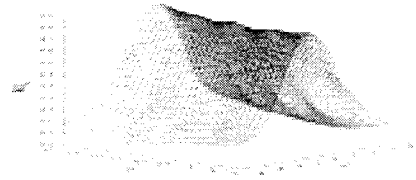
$$Mev = Ck \cdot Sv$$

$$Sv = \sigma_1 \sigma_2 \Lambda \sigma_k \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \Lambda \geq \sigma_k)$$

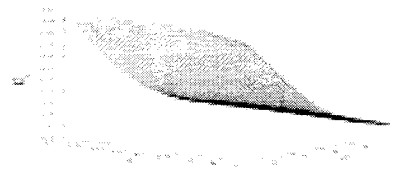
$$Ck = \begin{cases} (2\pi)^{k-1} / (2 \cdot 4 \cdot 6 \Lambda k) & k: \text{ 짝수} \\ 2(2\pi)^{(k-1)/2} / (1 \cdot 3 \cdot 5 \Lambda k) & k: \text{ 홀수} \end{cases}$$

$$\sigma_{kl} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_l}{\sigma_1}$$

여기서  $\sigma_i$  ( $i=1,2,K,k$ ) 은 가중치 자코비안 행렬의 특이값이다. 출력의 크기와 방향성을



(a) rotational manipulability measure at  $\theta = 0^\circ$



(b) rotational manipulability measure at  $\varphi = 0^\circ$



(c) translational manipulability measure at  $\theta = 0^\circ$



(d) translational manipulability measure at  $\varphi = 0^\circ$

Fig. 2 manipulability measure of the Casing Oscillator

동시에 고려할 수 있어야 유용한 판단기준이 될 수 있으므로 새로운 조작성 지수는 다음과 같이 정의한다.

$$M = \Pi(J') \cdot \Omega(J')$$

여기서

$$\Pi(J') = \frac{Mev - Mev_{min}}{Mev_{max} - Mev_{min}} \quad \Omega(J') = \frac{\sigma_{kl} - \sigma_{kl_{min}}}{\sigma_{kl_{max}} - \sigma_{kl_{min}}}$$

이다.  $\Pi(J')$  와  $\Omega(J')$  는 작업공간 내에서 전체 범위에 대한 상대적 값을 나타내며, 그 값이 0 과 1 사이에 있으므로 체적을 등방성 지수와 동등한 비중으로 고려할 수 있게 해준다.

식( )을 직선공간과 회전공간에 대해서 분해하여

물리적 불일치를 해결하면 다음과 같이 2 개의 조작성 지수를 얻을 수 있다.

$$M_T = \Pi(J'_T) \cdot \Omega(J'_T)$$

$$M_R = \Pi(J'_R) \cdot \Omega(J'_R)$$

Fig. 2(a), 2(c)는 피치가 0 일때의 롤과 요각의 변화에 따른 조작성 지수를, Fig. 2(b), 2(d)는 롤이 0 일때의 피치와 요각의 변화에 대한 조작성 지수의 변화를 각각 나타낸다. 이는 조작성 지수가 크면 클수록 방향과 위치의 변화에 대해 용이하며, 각 작동기에서 상판으로의 속도 전달 특성이 우수함을 의미한다.

#### 4. 결론

기존의 조작성 지수가 가지는 한계를 고려하여, 단위가 서로 다른 작업공간에 대해 조작성을 비교, 가시화할 수 있을 뿐만 아니라 작동기의 전체 작동공간을 고려한 새로운 조작성 지수를 정의하고, 케이싱 오실레이터의 속도 전달 특성을 조사하였다. 이는 이후 케이싱 오실레이터의 제작에 있어 새로운 설계지침이 될 수 있다.

#### 참고문헌

1. T. Yoshikawa, "Analysis and Control of robot manipulability with redundancy," In Robot Research, The 1st Int. Sym., MIT Press, Cambridge, Mass., pp.735-745, 1984.
2. T. Yoshikawa, "Manipulability of robotic mechanism - s," Int. J. Robot. Res., pp.3-9, 1985.
3. C. A. Klein and B. E. Blaho, "Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulator," Int. J. Robot. Res., vol.6, no.2, pp.72-83, 1987.
4. T. Yoshikawa, "Foundation of Robot Control," Corona Publishing Co. Ltd., pp.120-121, 1988.
5. K. Kosuge, M. Okuda, H. Kawamat and T. Fukuda, "Input/output force analysis of parallel link manipulator," IEEE Int. Conf. Robot. Auto., pp.714-719, 1993.
6. Y. Nakamura, Advanced Robotics, Redundancy and Optimization, Addison Wesley, 1991.
7. G. Strang, Linear Algebra and its Applications, 3<sup>rd</sup> edition, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1988.