

# 정적-외연적 강소성 유한요소법의 개발 및 펀치 행정구간에 따른 영향과 Osakada 방법의 초기 변형을 증분에 따른 영향분석

정 동 원\* (제주대학교 기계에너지생산공학부) · 이 승 훈(제주대학교 대학원 기계공학과)

## Development of Static-explicit rigid-plastic finite Element Method and investigate the effect of punch stroke and the strain increment in Osakada method

Dong-won Jung\* (Faculty of Mechanical, Energy and Production Engineering, Cheju National University) · Seung-hun Lee (Mech. Dept, Graduate School, Cheju National University)

**Key Words:** Convergence(수렴), Computation time(계산시간), Static-explicit method(정적-외연적 방법), Static-implicit method(정적-내연적 방법), Sheet metal forming(박판성형), strain increment(변형률 증분)

### Abstract:

In rigid-plastic finite element method, there is a heavy computation time and convergence problem. In this study, static-explicit rigid-plastic finite element method will be introduced. This method is the way that restrict the convergence interval. In result, convergence problem and computation time due to large non-linearity in the existing numerical analysis method were no longer a critical problem. Also, we investigated the effect of punch stroke and the strain increment this method. It is expected that various results from the numerical analysis will give very useful information for the design of tools in sheet metal forming process.

## 1. 서론

비선형 유한요소해석법(finite element method)은 타 방법에 비해서 적용범위가 넓고, 비교적 정확한 해석을 할 수 있다는 특징 때문에 대부분의 박판 성형공정 해석에 주로 사용되고 있다. 이러한 유한요소를 이용한 해석에도 수치적 기법에 따라 여러 가지로 구분되어 있는데, 크게 큰 시간간격을 가지며 각 단계마다 힘 평형을 맞추며 여러 번 축차하여 수렴해나가는 내연적 유한요소 해석법(implicit finite element method)과 작은 시간간격을 가지며 각 단계에서 동적 평형방정식을 만족시키는 해를 구하며 축차하지 않는 외연적 유한요소 해석법(explicit finite element method)으로 구분된다. 그 중에서 정적 내연적 방법(static-implicit method)은 축차(iteration)를 통해 수렴시켜 나가는 방법으로서 수렴을 위한 계산시간이 길고 기하학적 형상이 매우 복잡하거나 대용량의 문제에 대해서는 수렴성이 문제가 되어 정량적 해를 얻을 수 없다는 단점이 있지만 비교적 정확한 해석을 할 수 있다는 장점을 가지고 있다.<sup>1)</sup>

반면, 동적 외연적 방법(dynamic-explicit method)은 수렴성이 문제가 되지 않아 복잡한 형상이나 대용량의 문제에도 적용하여 정량적인 해를 얻을 수 있다. 이 방법은 원래 빠른 속도의 동적인 거동에 적합하기 때문에 비드 해석과 같은 복잡한 접촉현상을 포함하는 정적인 문제에 적용시킬 경우에는 해석결과에 심한 진동을 야기 시키게 된다. 따라서 해의 정확성을 보장받기 힘들고 신뢰성 있는 결과를 얻기 힘들다. 정적 내연적방법 또한, 제품의 형상이 복잡해지면서 난이한 접촉을 보이거나 형상이 아주 복잡한 대용량의 문제에 있어서는 수렴이 이뤄지지 않고 정량적 해를 얻을 수 없는 단점을 보인다.<sup>2)</sup>

이와 같은 수치해석 진행 과정 중 일어나는 문제점들을 보완하기 위해서 본 연구에서는 정적 외연적 유한요소 방법(static-explicit FEM)이라는 새로운 수치적 기법을 도입하여 강소성 문제에 대한 공정해석에 처음으로 적용시켜 보았다. 본 연구는 정적 외연적 유한요소 방법(static-explicit FEM)을 이용하여 강소성 문제에 대해서 산업현장에서 빠르게 적용할 수 있도록 계산시간의 단축과 수렴성을 보완하는 방법을 제안하는 것이다.

## 2. 본론

### 2.1 정적 외연적 방법

평면변형도 강소성 유한요소 법을 이용하여 박판 성형을 해석할 때 기존에는 비선형 방정식을 뉴턴랩슨(Newton-Raphson)방법을 통해 Fig. 1에서처럼 축차(iteration)를 통해 원하는 해를 수렴시켜왔다. 이 방법으로 해를 구할 때 해석하려는 형상이 복잡해질수록 계산시간이 길어지고 수렴성이 문제가 되어 정량적인 해를 구할 수 없다. Fig. 2와 같이 축차(iteration)없이 처음 접하는 접선을 따라가면서 해를 구할 수 있도록 Fig. 3과 같은 방법을 통해서 수렴성 문제해결을 시도했다.<sup>3)</sup>



Fig. 2 Tangent vector

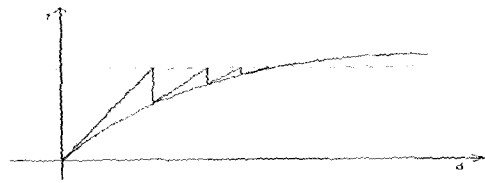


Fig. 1 Newton-Raphson method

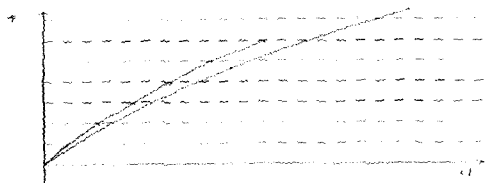


Fig. 3 Restricted-iteration method

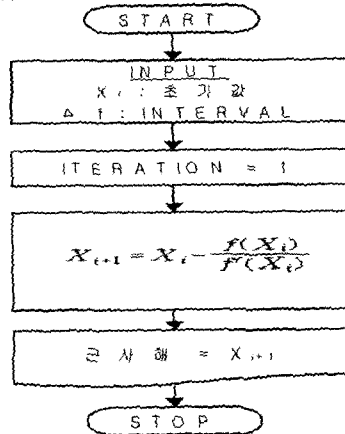


Fig. 4 Flow diagram

본 연구에서 축차(iteration)에 의한 수렴과정 없이 해를 구하면 정확하지 않은 근사적인 해를 따라 가므로 해의 오차가 많이 발생 될 것으로 보이나 수렴구간(punch stroke)을 조정함으로써 어느 정도의 오차범위를 줄일 수 있다.

Fig.4는 정적-외연적 방법의 맥락을 보여주는 개념도이다.

## 2.2 평면 변형도 강소성 유한요소법

기하학적, 재료적 비선형성을 고려하여 박판 성형을 해석하는 것이 효과적이다. 위와 같은 점을 고려하여 정완진<sup>4)</sup>등은 Hill의 신이방성 이론<sup>5), 6)</sup>을 따르는 재료에 대하여 강소성 유한요소법을 유도하였다. 본 연구에서는 정완진 등에 의해 개발된 유한요소법을 평면변형 문제 경우에 한하여 적용하였다. 강소성 유한요소법의 변분식은 다음과 같이 나타난다.<sup>7)</sup>

$$\int_{A^*} \bar{\sigma}(\Delta \bar{\epsilon}) \bar{\epsilon}^0 dA^0 - \int_{S^*} t \cdot \delta u dS^* = 0 \quad (1)$$

유한요소 수식화 과정을 적용하면 다음과 같은 비선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$Q(\tilde{U}) = P(\tilde{U}) + F \quad (2)$$

식(2)는 비선형 방정식이므로 식(3)과 같이 선형화하여 뉴턴 램슨방법으로 해를 구한다.<sup>7)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{U}} [Q(\tilde{U}) - P(\tilde{U})] |_{\tilde{U} = \tilde{U}_{(i-1)}} \Delta \tilde{U}_{(i)} \quad (3)$$

$$= F - Q(\tilde{U}_{(i-1)}) + P(\tilde{U}_{(i-1)})$$

본 연구에서 특정부분의 응력을 알 수 없어 해가 발사하게 되는데 이러한 어려움을 수치적으로 해결하기 위하여 Osakada<sup>8)</sup>이 사용한 방법을 채택하여 변형률 증분을 다음과 같이 수정하여 사용하였다.

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{d\bar{\epsilon}^2 + d\bar{\epsilon}_0^2} \quad (4)$$

이때 구성방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_0}{\sqrt{d\bar{\epsilon}^2 + d\bar{\epsilon}_0^2}} d\bar{\epsilon} \quad (5)$$

## 2.3 경사면 경계조건을 이용한 접촉처리 방법

요소단위로 박막요소에 대한 유한요소법의 접촉문제를 고려하게 되면 요소 내에서 수직 응력을 구할 수 없으므로 절점 단위로 접촉을 고려하는 것이 편리하다.

Fig.5와 같이 두 물체가 접촉할 때 접촉조건을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_n \cdot \phi = 0 \quad (6.a)$$

$$\phi \geq 0 \quad (6.b)$$

$$\sigma_n \leq 0 \quad (6.c)$$

본 연구에서는 경사 좌표계를 사용하여 2차원형상의 금형에 의한 박판성형 해석 시 접촉조건을 만족시켰다.



Fig.5 Contact condition between two bodies

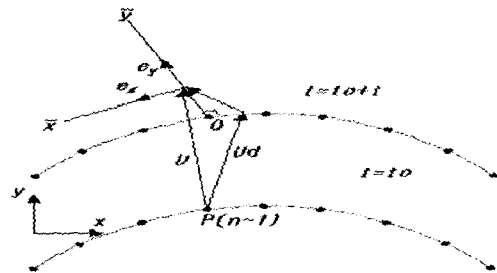


Fig. 6 Treatment of skew boundary condition

2차원 상의 임의의 곡면형상은 다음과 같이 매개변수로 나타낼 수 있다.

$$r(u) = X^s(u)e_x + Y^s(u)e_y \quad (7)$$

Fig.6에서 접촉면상의 접촉점 P에 가장 가까운 점 Q는 P와 Q사이의 거리를 최소화함으로써 얻어진다.<sup>7)</sup>

$$|QP|^2 = (X(P) - X^s(u))^2 + (Y(P) - Y^s(u))^2 \quad (8)$$

Fig.6과 같이 금형 표면위의 점 Q에서의 금형 바깥 방향의 수직벡터의 방향을  $e_y^-$ , 절점 P의 편치에 대한 상대 변위  $U_x$ 이  $e_y^-$ 에 수직인 성분벡터의 방향을  $e_x^-$ 로 한다.  $e_y^-$ ,  $e_x^-$ 는 다음과 같다.

$$e_x = \frac{U_r - (U_r \cdot e_y)e_y}{|U_r - (U_r \cdot e_y)e_y|} \quad (9)$$

$$e_y = \frac{n(Q)}{|n(Q)|}$$

변환행렬 T는 다음과 같다.<sup>7)</sup>

$$\Delta U = T \Delta \bar{U} \quad (10)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\bar{X}, X) & \cos(\bar{Y}, X) \\ \cos(\bar{X}, Y) & \cos(\bar{Y}, Y) \end{bmatrix} \quad (11)$$

식(11)의 변환행렬을 이용하여 접촉 절점에 대하여 유한요소 방정식을 원래의 직교 좌표계 (X, Y)로부터 경사 좌표계 ( $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ )로 변환한다.

$$\bar{K} \Delta U = \bar{R} \quad (12)$$

여기서,  $\bar{K} = T^T K T$ ,  $\bar{R} = T^T R$ 이다.

Coulomb 마찰조건을 만족시키기 위해 마찰력을 경사 좌표계에서 절점력으로 다음과 같이 표시하였다.<sup>7)</sup>

$$(F_S)_i = -\frac{2}{\pi} \mu (F_y)_i \tan^{-1}(k U_x) \quad (13)$$

$$U_x = U_r - (U_r \cdot e_y)e_y \quad (14)$$

여기서 k는 큰 상수이다. 식 (13)에 의해 생기는 강성행렬에 기여하는 항들은 좌표변환 후에 계산되었다. 접촉조건 중에서 식(6.c)를 만족하기 위해서는 접촉 절점과 금형 사이에 작용하는 절점력이 압축력이어야 한다. 따라서 접촉중인 절점의 바깥방향의 수직력이 음이면 (접촉  $\rightarrow$  비접촉) 상태전환을 하여 반복 계산한다. 이때 절점력은 근사적으로 다음과 같이 구해진다.<sup>7)</sup>

$$P_y = \sum_{j=1}^n (\Delta U_j K_{yy}) - R_y \quad (15)$$

만일  $P_y$  가 음이면 (접촉  $\rightarrow$  비접촉) 절점의 접촉상태를 변경하고 변위 벡터를 수정하지 않고 다시 계산한다.

### 3. 해석 결과

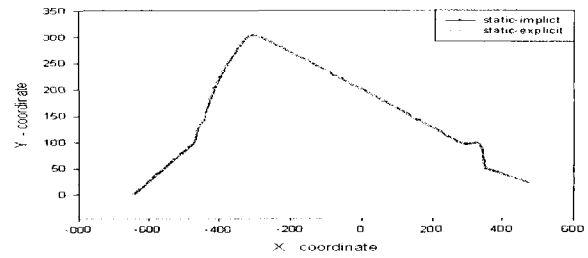
#### 3.1 펀치행정구간에 따른 성형공정 해석적용

본 논문에서 제시된 방법을 이용해 제시된 수식화를 통해 프로그램 된 평면변형 유한요소 프로그램을 이용해 트렁크리드 성형공정에 적용시켰다.

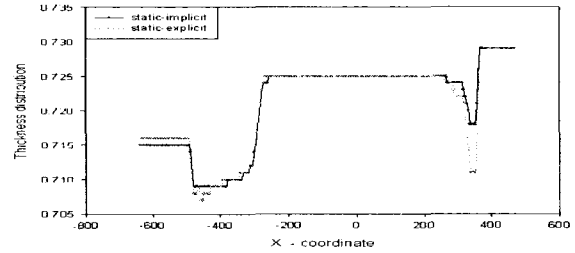
수렴구간(punch stroke)을 0.2 mm로 고정시켜서 정적-외연적 방법으로 해석했다.

수식화 된 결과에 따라 평면 변형 유한요소 해석 프로그램을 작성하여 성형품의 각 단면들을 성형단계에 따라 2차원 해석하였다. 해석에 사용된 재료는 다음과 같다.

- 응력-변형도 곡선 :  $\bar{\sigma} = 51.915 (\bar{\epsilon})^{0.25}$
- 수직 이방성 계수 :  $R = 2.00$
- 재료 두께 :  $t = 0.8 \text{ mm}$
- Coulomb 마찰계수 :  $\mu = 0.2$
- 구속력(Binding Force) : 15 kgf/mm(오른쪽)  
15 kgf/mm(왼쪽)
- 성형단계 :  
Maximum allowable punch stroke = 110 mm



(a) Final shape curve



(b) Final thickness distribution

Fig. 7 Comparison of static-implicit with static-explicit method

Fig.7은 정적-외연적 방법의 결과가 정적-내연적 방법의 결과와 잘 일치하고 있음을 보여주고 있다. 같은 조건에서 정적-내연적 방법은 최종변형 단계까지 총 2963 단계의 계산과정을 거쳤으며, 정적-외연적 방법은 총 550단계의 계산과정을 거쳤다.

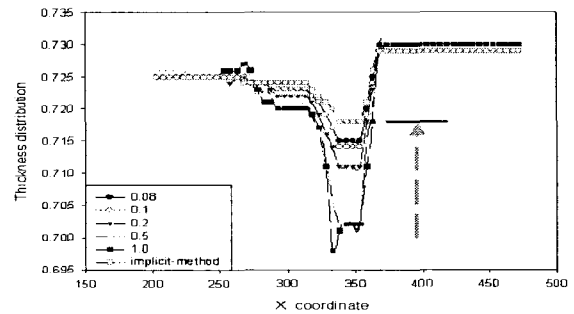


Fig. 8 Thickness distribution

Fig. 8은 정적-내연적 방법과 정적-외연적방법의 수렴구간에 따른 두께 분포의 변화를 좀더 잘 볼 수 있는 구간만을 따로 나타내었다.

결과에서 알 수 있듯이 수렴구간을 1.0 mm  $\rightarrow$  0.08 mm로 작게 조정할수록 정적-내연적방법의 결과에 접근함을 알 수 있다. 따라서 금형 설계 단계에서 시뮬레이션 변수와 금형 형상을 적절히 바꾸어 줌으로써 최적의 금형 설계조건과 공정 변수를 예측하는데 유용하다

#### 3.2 Osakada방법에 의한 성형공정 해석 적용

특정부분의 응력을 알 수 없어 해가 발산하게 되는데 이러한 어려움을 수치적으로 해결하기 위하여 Osakada등[8]이 제안한 방법으로 변형률 증분의 값에  $d\epsilon_0$  값을 추가하여 해가 발산하는 것을 방지하기 위한 방법이다. Fig.9에서는 두께 분포를 나타내고 있는데, 역시 해의 발산으로 인해 원하는 결과를 얻을 수 없었다.

## 후 기

이 논문은 2003년도 제주대학교발전기금 청봉학술연구기금의 지원에 의해서 연구되었음.

## 참고 문헌

1. 안동규, 정동원, 양동렬, 정완진, 1996, " 2차원 박관성형 공정 해석을 위한 강소성 외연적 유한요소수식", 대한기계학회 논문집(A) 제20권 제1호, pp. 88-99
2. 박원배, 김창만, 김낙수, 서대교, 전기찬, 1999, " 계단형 드로비드에 의한 판재의 인출특성에 관한 연구", 한국소성가공학회지 제 5권 제 2호, pp. 130-137.
3. 임상진, 광병만, 이주영, " 유한요소법입문", 서울, 동명사, 2001
4. W.J. Chung, Y.J. Kim and D.Y. Yang. 1989. Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Hydrostatic Bulging of Elliptic Diaphragms using Hill's New Yield Criterion, Int.J. Mech. Sci., Vol.31,pp193-207.
5. R. Hill. 1979, Theoretical of textured aggregates, Math Proc. Camb. phil. Soc., Vol.85, pp179-191.
6. R. Hill, the mathematical Theory of plasticity, Oxford University Press
7. 정동원, 송인섭, 양동렬, 이장희. 1992. 유한요소법을 이용한 박관성형의 단면해석과 자동차 금형설계에의 응용, 대한기계학회 춘계학술대회 논문집(I), pp380-383.
8. K. Osakada, J. Nakano and K. Mori. 1982. Finite element method for rigid-plastic analysis of metal forming formulations for finite deformation, Int.J. Mech. Sci., Vol.24, pp459-468

Fig.10에서는  $d\epsilon_0$  값을 0.005~0.5까지 증가시키면서 두께 분포의 변화를 살펴봤다. 결과에서 알수 있듯이  $d\epsilon_0$  값을 증가시킬수록 내연적 방법의 결과에서 멀어짐을 알수 있다.

이는  $d\epsilon_0$  값을 크게 가정했기 때문에 발생하는 오차라고 생각된다.

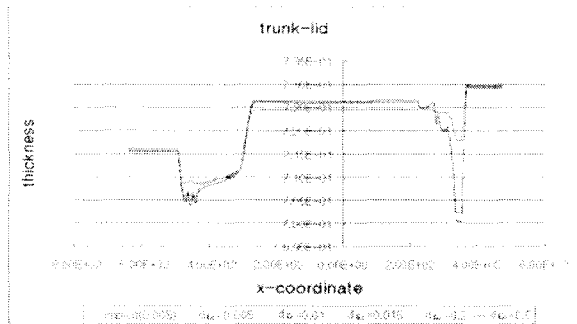


Fig. 9 Thickness distribution

## 4. 결 론

본 연구에서는 수렴성과 계산시간의 단축을 위해서 축차(iteration)를 제한하는 방법을 사용한 정적-외연적 방법을 이용하여 유한요소 프로그램을 구성하고 성형공정에 적용시켜보았으며, 정적-내연적방법의 결과와 비교해 보았다. 정적-외연적방법이 정적-내연적방법의 결과와 큰 오차없이 일치함을 볼 수 있었고, Osakada등 [8]이 제안한 방법을 이용해  $d\epsilon_0$  값에 따른 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 정적-외연적 방법과 정적-내연적 방법을 비교한 결과 성형곡선은 일치하고 두께 분포도는 약간의 오차를 갖는 결과를 얻을 수 있었다.
2. 수렴구간을 적절히 조정하면 빠른 시간내에 수렴성의 문제없이 정적-내연적방법의 결과와 매우 일치한 결과를 얻을 수 있다.
3.  $d\epsilon_0$  값을 너무 작게 조정하면 특정부분의 해의 발산을 극복하지 못하게 된다.
4.  $d\epsilon_0$  값을 임의로 조정할 때, 값이 증가할수록 해의 오차가 크게 발생한다.

이 방법은 빠른 시간 내에 그리고 수렴성에 대한 문제 없이 원활하게 성형공정을 해석할 수 있다는 실용적인 장점을 가지고 있다. 정적-내연적방법, 정적-외연적방법에서 모두 Osakada등[8]이 제안한 방법을 이용할때 해의 발산을 억제할 수 있는 최소한의 값을 이용하여 해석하는 방법이 필요한 것으로 보여진다. 따라서 금형 설계 단계에서 시뮬레이션 변수와 금형 형상을 직결히 바꾸어 줌으로써 최적의 금형 설계조건과 공정 변수를 예측하는데 유용하다