

다물체계의 진동해석 및 능동적 방진설계

오준환*(연세대 대학원 기계공학과), 최용제(연세대 기계공학과)

Vibration Analysis and Active Absorber Design for a Multi-Body System

J. H. Oh(Mech. Engr. Dept. Yonsei Univ.), Y. J. Choi(Mech. Engr. Dept. Yonsei Univ.)

ABSTRACT

A general vibration phenomenon of a rigid-body supported by springs can be viewed as a small repetitive screw displacement. From this view, a multi-directional vibration absorber can be designed by use of screw theory and transfer matrix method. In this paper, the basic equations of motion for a multi-body system have been expressed in terms of screws using transfer matrix method and a simple approach to the design of a multi-degrees-of-freedom absorber has been presented. In order to illustrate the methodology, an example for the design of a 2-DOF active absorber which is capable of absorbing vibration of a rigid body excited by 3-DOF external force has been presented.

Key Words : Screw theory(나선이론), Absorber(흡진기), Transfer Matrix Method (전달행렬법)

1. 서론

단일 강체의 일반적 진동 현상은, 나선 이론(screw theory)의 측면에서 볼 때에, 반복되는 작은 나선 변위로 이해될 수 있다. 강체의 나선운동은 Robert Ball⁽¹⁾에 의하여 100 년전에 정립된 바 있다. Dimenberg⁽²⁾는 이러한 나선이론을 사용하여, 작은 변위를 갖는 강체의 진동에 대한 운동 방정식을 표현하였다. 근래에 들어, Blanchet 과 Lipkin⁽³⁾은 공간상에서 탄성계에 의해 지지되어 있는 단일 강체에 대해 진동중심을 구하는 방법을 제시하고 역급을 이용하여 원하지 않는 모우드를 제거하는 방법을 제시하였다.

전달행렬법(Transfer Matrix Method)은 탄성계와 관성계로 이루어진 다물체계에서 각 물체별로 탄성행렬과 관성행렬을 구한 후, 정해진 방법에 의해 전체계의 지배방정식을 구하는 기법으로서, 이 기법을 사용하면 복잡한 계를 단순화하여 표현할 수 있으며 각 물체의 진동 모우드간의 연관관계를 표현 할 수 있다.

실제 진동은 다축 방향의 형태이다. 그러나 기존의 진동 흡진기는 한 방향으로만의 제어가 가능하기 때문에 1 자유도 이상의 외부 가진을 제어하고자 한다면, 제어하려는 방향의 개수만큼

흡진기를 사용하여야 하며, 또한 이를 사용한다 해도 흡진기들 간의 상호 작용을 고려해야 하는 복잡한 문제가 발생하게 된다.

본 논문에서는, 먼저, 진동계의 운동 방정식을 나선으로 표현하고, 이를 전달행렬법을 사용하여 두 개의 강체에 대한 방정식으로 표현하여, 흡진기를 설계하는 방법을 제시하였다. 제시된 방법의 구체적인 설명을 위하여, 3 자유도를 갖는 외력에 의해 발생하는 진동을 2 자유도의 가진으로 흡진할 수 있는 흡진기의 설계를 그 예로서 제시하였다.

2. 운동 방정식

2.1 단일 물체계의 운동방정식

원점 "O"에 대하여 단일 강체의 운동방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_O \delta \ddot{\mathbf{D}}_O + \mathbf{K}_O \delta \mathbf{D}_O = \delta \mathbf{P}_O \quad (2.1)$$

여기서, $\delta \mathbf{D}_O$ 는 작은 변위(small displacement)를 나타내고 $\delta \mathbf{P}_O$ 는 가진력을, 그리고 \mathbf{M}_O 와 \mathbf{K}_O 는 각각 관성행렬과 강성행렬을 나타낸다. 이제, 이 운동을 조화운동이라 가정하면 변위와 힘은 다음과

같이 표현될 수 있다.

$$\delta \mathbf{D}_o = \hat{\mathbf{X}}_o e^{i\Omega t}, \quad \delta \mathbf{P}_o = \hat{\mathbf{p}}_o e^{i\Omega t} \quad (2.2)$$

식 (2.2)로부터 운동방정식 식(2.1)은 다음과 같이 표현 된다.

$$(\mathbf{K}_o - \Omega^2 \mathbf{M}_o) \hat{\mathbf{X}}_o = \hat{\mathbf{p}}_o \quad (2.3)$$

2.2 강성사상(Stiffness Matrix)

Griffis 와 Duffy(1991)⁽⁴⁾는 n 개의 스프링에 의해 지지되고 있는 강체에 대한 강성사상을 유도하였다. 이때 선스프링은 그 축방향을 따라 작용하고 평형상태에서 강성사상은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{j} \mathbf{K}_C \mathbf{j}^T \quad (2.4)$$

여기서 행렬 \mathbf{j} 는 $\mathbf{j} = [\hat{\mathbf{s}}_1, \dots, \hat{\mathbf{s}}_n]$ 형태의 $6 \times n$ 행렬로 주어진다. 또한, \mathbf{K} 는 n 개의 스프링 상수값을 대각원소로 갖는 대각행렬이다. 이때 $\hat{\mathbf{s}}_i$ 은 *plücker* 방사 좌표(ray coordinate)로 표현된 i 번째 선 스프링의 선벡터로서 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{s}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i \\ \mathbf{s}_{io} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i \\ \mathbf{r}_i \times \mathbf{s}_i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

여기서 i 번째 \mathbf{s}_i 는 직선의 단위방향 벡터이며, \mathbf{s}_{io} 는 모멘트 벡터이고, \mathbf{r}_i 는 기준점으로부터의 위치 벡터를 말한다.

식 (2.4)과 식 (2.5)으로부터 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{K}_G = \sum_{i=1}^n k_{ci} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^T & \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{oi}^T \\ \mathbf{s}_{oi} \mathbf{s}_i^T & \mathbf{s}_{oi} \mathbf{s}_{oi}^T \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2.3 다물체계 시스템의 모델링

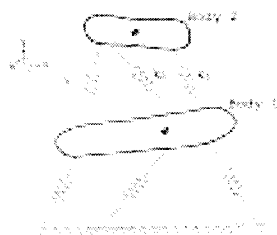


Fig. 1 Two-body System

강체 시스템에서 질량중심에서의 질점은 집중 질량이고 전달행렬법에서는 이러한 질점을 행렬 형태로 정리하면 “점행렬(point matrix)”⁽⁵⁾이라 하며 point 상에서 다음과 같은 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$\delta \mathbf{D}_o'' = \delta \mathbf{D}_o' \quad (2.7)$$

이때 윗첨자 “H” 는 point 의 윗쪽을, “L”은 point 의 아래쪽을 skxksomss 기호로 사용토록 한다.

point 에서 힘과 모멘트의 평형식은 다음과 같다.

$$\delta \mathbf{f}_o'' - \delta \mathbf{f}_o' = \mathbf{M}_o \delta \ddot{\mathbf{D}}_o' + \delta \mathbf{P}_o \quad (2.8)$$

이때 $\delta \mathbf{f}_o''$ 와 $\delta \mathbf{f}_o'$ 는 point 의 위와 아래쪽에 작용하는 내력이고 조화운동일 때 내력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta \mathbf{f}_o = \hat{\mathbf{w}}_o e^{i\Omega t} \quad (2.9)$$

식 (2.8)과 식 (2.9)로부터 점행렬은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{io}'' \\ \hat{\mathbf{w}}_{io}'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6,6} & \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{0}_{6,1} \\ -\Omega^2 \mathbf{M}_{io} & \mathbf{I}_{6,6} & \hat{\mathbf{p}}_{io} \\ \mathbf{0}_{6,1}^T & \mathbf{0}_{6,1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{io}' \\ \hat{\mathbf{w}}_{io}' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

이때 하첨자는 행렬의 크기를 나타낸다.

전달행렬법에서 공간강성을 나타내는 행렬을 “장행렬(field matrix)”라 하며, 이 field 는 힘과 모멘트를 야기시키게 된다.

$$\delta \mathbf{f}_o' = \mathbf{K}_o (\delta \mathbf{D}_o' - \delta \mathbf{D}_o'') \quad (2.11)$$

field 에서의 힘과 모멘트 평형은

$$\delta \mathbf{f}_o'' = -\delta \mathbf{f}_o' \quad (2.12)$$

조화운동에서 식 (2.11)와 식 (2.12)으로부터 장행렬을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{io}' \\ -\hat{\mathbf{w}}_{io}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6,6} & \mathbf{K}_{io}^{-1} & \mathbf{0}_{6,1} \\ \mathbf{0}_{6,6} & \mathbf{I}_{6,6} & \mathbf{0}_{6,1} \\ \mathbf{0}_{6,1}^T & \mathbf{0}_{6,1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{io}'' \\ \hat{\mathbf{w}}_{io}'' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

이때 첨자 “B”는 베이스(base)나 그라운드(ground)를 의미하고, $\hat{\mathbf{X}}_o''$ 와 $\hat{\mathbf{w}}_o''$ 는 베이스의 트윈스

트(twist)와 렌치(wrench)를 나타낸다.

식 (2.10)과 식 (2.13)을 서로 곱해주면, 단일 질량-스프링 계에서의 전달행렬을 구할 수 있게 된다. 그리고 이를 두개의 연결된 강체 시스템으로 확장해 보면 2 개의 point 과 field, 그리고 4 개의 전달행렬이 존재한다.

이들 4 개의 전달행렬을 서로 곱해주게 되면 두개의 연결된 강체에 대한 전체의 전달행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{20}^H \\ \hat{\mathbf{w}}_{20}^H \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \hat{\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{0}_{6 \times 1}^T & \mathbf{0}_{6 \times 1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_0^B \\ \hat{\mathbf{w}}_0^B \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_{6 \times 6} - \Omega^2 \mathbf{K}_{20}^{-1} \mathbf{M}_{10}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}_{10}^{-1} - \Omega^2 \mathbf{K}_{20}^{-1} \mathbf{M}_{10} \mathbf{K}_{10}^{-1} + \mathbf{K}_{20}^{-1}$$

$$\mathbf{C} = -\Omega^2 \mathbf{M}_{20} + \Omega^4 \mathbf{M}_{20} \mathbf{K}_{20}^{-1} \mathbf{M}_{10} - \Omega^2 \mathbf{M}_{10}$$

$$\mathbf{D} = -\Omega^2 \mathbf{M}_{20} \mathbf{K}_{10}^{-1} + \Omega^4 \mathbf{M}_{20} \mathbf{K}_{20}^{-1} \mathbf{M}_{10} \mathbf{K}_{10}^{-1} - \Omega^2 \mathbf{M}_{10} \mathbf{K}_{10}^{-1} - \Omega^2 \mathbf{M}_{20} \mathbf{K}_{20}^{-1} + \mathbf{I}_{6 \times 6}$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\mathbf{K}_{20}^{-1} \hat{\mathbf{p}}_{10}, \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \Omega^2 \mathbf{M}_{20} \mathbf{K}_{20}^{-1} \hat{\mathbf{p}}_{10} - \hat{\mathbf{p}}_{10} - \hat{\mathbf{p}}_{20}$$

위의 강체 시스템은 “open loop” 형태를 갖기 때문에 그 경계조건은 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{w}}_{20}^H = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{X}}_0^B = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

베이스 운동의 트위스트 $\hat{\mathbf{X}}_0^B$ 는 null twist 이고, $\hat{\mathbf{w}}_{20}^H$ 는 다음 강체에 대한 내력인데, 이 또한 point 2 다음의 강체가 없기 때문에 null twist 가 됨을 알 수 있다.

따라서 식 (2.15)을 식 (2.14)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{20}^H \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \hat{\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{D} & \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{w}}_0^B \\ \hat{\mathbf{X}}_0^B \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

식 (2.14)로부터 ground wrench 는 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{w}}_0^B = -\mathbf{D}^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (2.17)$$

강체 1 의 장행렬과 식 (2.17)로부터 강체 1 의 조화응답 $\hat{\mathbf{X}}_{10}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{10}^L \\ -\hat{\mathbf{w}}_{10}^L \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{K}_{10}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

즉,

$$\hat{\mathbf{X}}_{10} = \mathbf{K}_{10}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (2.19)$$

이다.

3. 흡진기

여기서는, 이제까지 유도한 운동방정식을 사용하여, 스프링으로 연결된 두 개의 강체로 구성된 시스템에서, 한 개의 질량-스프링 계의 진동을 다른 질량-스프링 계를 이용하여 흡진 주파수에서의 진동을 제거하기 위한 흡진기의 설계 방법을 설명하도록 한다.

3.1 흡진기 설계

식 (2.19)을 통해서 진동 흡진기의 설계를 할 수 있는데, 즉, 식 (2.19)에서 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 가 강체 1 의 반응을 결정함을 알 수 있다.

$$\hat{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{D}^{-1} (\Omega^2 \mathbf{M}_2 \mathbf{K}_2^{-1} \hat{\mathbf{p}}_1 - \hat{\mathbf{p}}_1 - \hat{\mathbf{p}}_2) \quad (3.1)$$

식 (3.1)을 정리해보면

$$\hat{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{D}^{-1} \{ (\Omega^2 \mathbf{M}_2 \mathbf{K}_2^{-1} - \mathbf{I}) \hat{\mathbf{p}}_1 - \hat{\mathbf{p}}_2 \} \quad (3.2)$$

위의 방정식은 다음과 같은 조건에서 강체 1 의 진동을 제거할 수 있음을 보여준다.

$$(\Omega^2 \mathbf{M}_2 \mathbf{K}_2^{-1} - \mathbf{I}) \hat{\mathbf{p}}_1 = \hat{\mathbf{p}}_2 \quad (3.3)$$

3.2 예제

간단한 예제를 통해서 앞에서 기술한 흡진기에 관한 식을 검증해 본다.

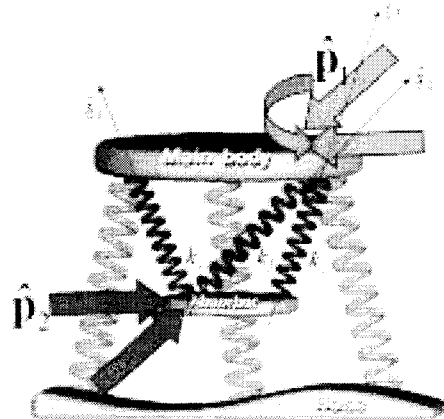


Fig. 2 Modeling of a two body system

Table 1 properties of body 2

p_1	0.05m	θ_1	135°	Ω	50Hz
p_2	0.035m	θ_2	30°	m_2	0.01kg
p_3	0.139m	θ_3	60°	J	0.1kgm ²

여기서 p_1, p_2, p_3 는 기준점으로부터 직선까지의 수직거리를 말한다. q_x, q_y 는 x, y 축으로의 힘(N)을, q_z 는 모멘트(Nm)를 나타낸다.

$$j = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cos\theta_3 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \sin\theta_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}, \quad K_c = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

외부로부터의 임의의 3 자유도 외력 $\hat{p}_1 = [q_x, q_y, q_z]^T$ 이라 한다. 한편,

$$(\Omega^2 M_2 K_2^{-1} - I) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

라 하면, 식 (3.3)를 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix}$ 과 같이 놓을 수 있다. 흡진기에 가진해주는 힘(우변)은 2 자유도이고, 이때 *는 임의의 값을 뜻한다. 여기서 임의의 외력성분 q_x, q_y 그리고 q_z 에 대해서 위의 식이 성립하려면

$$g = h = i = 0 \quad (3.5)$$

이어야 한다.

g, h, i 는 두 강체 사이의 스프링 탄성계수인 k_1, k_2, k_3 를 변수로 이루어진 식이기 때문에, 식 (3.5)를 통하여 k_1, k_2, k_3 을 계산할 수 있다.

이를 통하여 역으로 식 (3.4)의 a, b, c, d, e, f 를 값들을 알아 내고, 만약 3 자유도의 외력 \hat{p}_1 을 측정한다면 흡진기에 가진해 주어야 할 2 자유도의 힘 $\hat{p}_2 = [* \quad * \quad 0]^T$ 를 구할 수 있게 된다.

3.3 검증

앞에서 제시된 흡진기의 식을 검증하기 위해서 모드해석법을 사용하였으며, 이때 흡진 주파수는 50Hz 로 설정하였다. 식 (3.3)에 임의로 외력 $\hat{p}_1 = [0.01 \quad 0.02 \quad 0.05]^T$ 를 가하여 주었을 때의 결과값을 보았는데 좌변에 앞에서 구한 $k_1 = 12941, k_2 = 35355, k_3 = 9008$ 을 대입하면 우변, 즉 흡진기에 가해주어야 할 힘 \hat{p}_2 는 다음과 같이

계산된다.

$$\hat{p}_2 = [-0.00001035 \quad -0.01997 \quad 0]^T$$

이는 x 축과 y 축 방향으로의 힘, 즉 2 자유도의 힘 \hat{p}_2 로 외력 \hat{p}_1 을 흡진할 수 있다는 것을 의미한다.

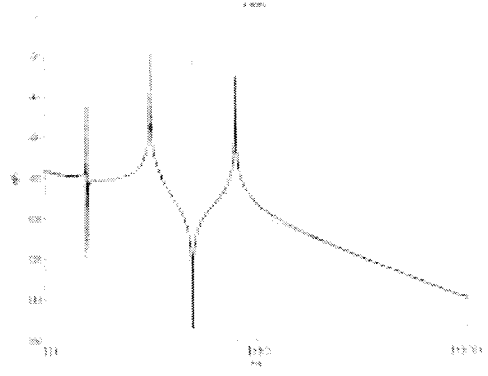


Fig. 3(a) Response of a body 1(x-axis)
(Thick line : absorber attached, thin line : no absorber)

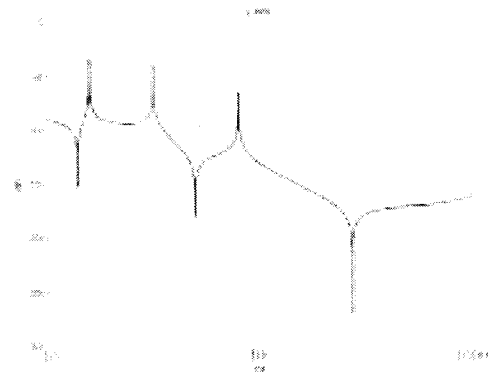


Fig. 3(b) Response of a body 1(y-axis)

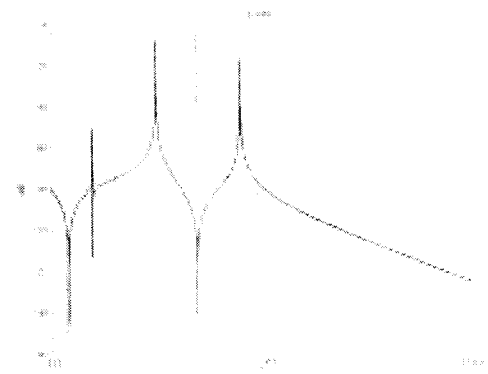


Fig. 3(c) Response of a body 1(rotation)

설계한 바와 같이 강체 1의 응답을 보면 $\Omega = 50\text{Hz}$ 일 때 반공진점이 나타난 것을 확인할 수 있다.

4. 결론

진동하는 강체의 운동을 나선으로 표현하고, 이를 다시 두 개의 강체로 구성된 시스템에 대하여 전달행렬법을 사용하여 표현하였다. 이로부터, 강체에 발생하는 진동을 흡수할 수 있는 흡진기의 설계 방법을 제안하고, 이의 예시를 위하여, 3개의 자유도를 갖는 외부가진을 2 자유도를 갖는 가진에 의하여 제어할 수 방법을 예제로 제시하였다.

참고문헌

1. Ball, R. S. "A treatise on the Theory of Screws," Cambridge University Press, 1990.
2. Dimentberg, F. M. "The Screw Calculus and Its Application in Mechanics," ASME Design Technical Conference DE-Vol.45 pp. 179-193, 1992.
3. Blanchet, P. and Lipkin, H. "New Geometric Properties for Modelled Planar Vibration," ASME Design Engineering Technical Conference, 1997.
4. Duffy, J. "Statics and Kinematics with applications to Robotics," Cambridge University Press, 1996.
5. Dan, B.J. and Choi, Y.J., "Design and Analysis Of a Vibrating System via Screw Theory with Applications to Information Storage Device," Yonsei University, 1999.
6. Thomson, William T. "Theory of Vibration with Applications - Fifth Edition.," 1998 Prentice Hall
7. 최용재, 1991, "나선이론에 의한 로봇의 운동 및 역학적 해석," 대한기계학회지, 제 31 권, 제 7 호, pp. 616-625
8. 이상욱 "나선이론을 이용한 다물체계의 진동해석," 연세대학교, 1998.
9. 장선준 "전달행렬법과 나선이론을 이용한 다물체계의 진동해석," 연세대학교, 2001.