

# 비선형 점탄성 부상모델에 대한 주파수와 변위의 영향에 대한 연구

이성범(인제대 기계·자동차공학부)

## A Study on the Affection of Frequency and Displacement for Nonlinear Viscoelastic Bushing Model

S. Lee (School of Mechanical and Automotive Engineering, Inje University)

### ABSTRACT

A bushing is a device used in automotive suspension systems to reduce the load transmitted from the wheel to the frame of the vehicle. A bushing is a hollow cylinder, which is bonded to a solid steel shaft at its inner surface and a steel sleeve at its outer surface. The relation between the force applied to the shaft and the relative deformation of a bushing is nonlinear and exhibits features of viscoelasticity.

A force-displacement relation for bushings is important for multibody dynamics numerical simulations. For the nonlinear viscoelastic axial response, Pipkin-Rogers model, the direct relation of force and displacement, has been derived from Lianis model and the sinusoidal input was used for Pipkin-Rogers model, and the affection of displacement with frequency change was studied with Pipkin-Rogers model.

**Key Words** : Bushing (부싱), Lianis model (리아니스 모델), Pipkin-Rogers model (핍킨-라지스 모델), Nonlinear viscoelastic incompressible material (비선형 점탄성 비압축성 물질)

### 1. 서론

부싱은 자동차 현가장치의 주요 부품으로, 자동차의 승차감 등 동적 특성에 영향을 미치 현가장치 설계 시 반드시 고려해야 하는 요소로서, 바깥쪽의 실린더형 슬리브(sleeve)와 안쪽의 실린더형 축 사이에서 가운데가 비어있는 실린더의 형태를 가진다. 자동차의 부싱은 비선형 비압축성 점탄성 물질이므로 점탄성학<sup>1</sup> 연구를 기본으로 하여 본 연구가 수행되었다.

McGuirt 와 Lianis<sup>2</sup> 는 비선형 점탄성 모델의 연구에 있어서 스티렌-부타디엔 고무 (styrene-butadiene rubber)를 이용하여 많은 실험을 수행하였으며, 이를 바탕으로 리아니스 구성방정식 (Lianis constitutive equation) 을 완성하였다. Lee<sup>3</sup> 는 부싱의 축방향 모드에 대하여, 응력과 변형률의 관계식인 리아니스 구성방정식과 축방향 모드로부터 발생하는 힘과 응력과의 관계식 및 변위와 변형률의 관계식으로부터 비

선형 점탄성 모델인 리아니스 모델을 완성하였으며, 리아니스 모델을 통하여 기초 데이터를 얻어 축방향 모드와 회전방향 모드에 대하여 새로운 비선형 점탄성 부상 모델을 완성하였으며, 이를 Pipkin-Rogers model 로 명명하였다.

하지만, 기존의 연구는 변위와 시간과의 관계가 일정하거나 일정한 비율을 가지는 것에 대하여만 관심을 가지고 있었으므로, 부상모델의 실용화를 위한 연구로는 부족함이 있었다.

따라서, 본 연구에서는 sinusoidal function 을 주어진 입력으로 하여 주파수와 변위가 Pipkin-Rogers model 에 어떠한 영향을 미치는 지에 대하여 알아보았다. 즉, 주어진 변위의 입력으로 사인함수(sinc function)를 이용하여, 진폭과 주파수가 비선형 비압축성 점탄성 부상 모델에 미치는 영향을 연구하였으며, 이를 통하여 비선형 점탄성 부상 모델에 대한 정확한 이해를 도모하고자 하였다.

## 2. 리아니스 모델

비압축성 등방성 점탄성 물질에 대한 3 차원 구조이론은 Coleman 과 Noll 에 의하여 발전되었으며, 근사적 구성방정식을 완성하기 위하여 페이딩 메모리 (fading memory)가 이용되었다. Lianis 와 그의 동료들은 스티렌-부타디엔 고무(styrene-butadiene rubber)에 대하여 실험적 방법을 이용하여 리아니스 구성방정식을 완성하였으며, 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & -\hat{p}(t)I - \{c + d(I_2 - 3)\}B^2 \\ & + \left[ a + \frac{b}{(I_1 - 2)^2} + I_1 \{c + d(I_2 - 3)\} \right] B \\ & + 2 \int_{-\infty}^t [P_0(t-s) + (I_2 - 3)Q_0(t-s)] \dot{C}_i(s) ds \\ & + \int_{-\infty}^t [P_1(t-s) + \frac{Q_1(t-s)}{(I_1 - 2)^2}] [BC_i(s) + \dot{C}_i(s)B] ds \end{aligned} \quad (1)$$

$\sigma(t)$ 는 수직응력과 전단응력을 포함하는 3x3 응력 행렬이고,  $\hat{p}$ 는 비압축성의 제한으로부터 온 스칼라량이다.  $s$ 는 과거에서 현재까지의 시간을,  $t$ 는 현재의 시간을 나타낸다. 시간  $t$ 에서의 질점의 변형 그레디언트 (deformation gradient)를  $F(t)$ 라 표기하면,  $B$ 는 왼쪽 코시-그린 변형률 텐서 (left Cauchy-Green strain tensor)이며,  $I_1$ 과  $I_2$ 는  $B$ 의 변형률 불변량 (strain invariants)으로, 각각  $I_1 = B_{ii}$ ,  $I_2 = (B_{ii}B_{jj} - B_{ij}B_{ji})$ 이다.

$C_i(s)$ 와  $\dot{C}_i(s)$ 는 오른쪽 상대 코시-그린 변형률 텐서 (right relative Cauchy-Green strain tensor)와 그것의  $s$ 에 대한 편미분을 각각 나타낸다.  $P_0(t), Q_0(t), P_1(t), Q_1(t), a, b, c, d$ 는 스티렌-부타디엔 고무의 물질특성을 나타내며,  $0 \leq t \leq 60$  sec.에 대하여, 선형보간법(interpolation)과 외삽법(extrapolation)을 이용하여 Fig. 1에 나타내었다.

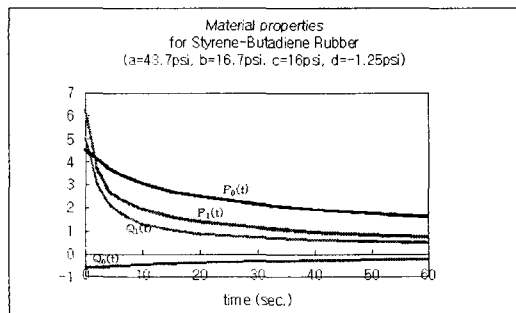


Fig. 1 Material properties for styrene-butadiene rubber at 0°C

## 3. 피킨-라저스 모델

서론에서 언급하였듯이, 부싱의 축방향 모드에 대한 힘과 변위의 관계를 고려하였으며, 폴리머의 비선형 점탄성 모델로 Pipkin 과 Rogers 에 의하여 제안된 식을 부분 적분법을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$F(t) = H(w(0), t) + \int_0^t \frac{\partial H(w(s), t-s)}{\partial w(s)} \frac{dw(s)}{ds} ds \quad (2)$$

$H(w, t)$ 은 시간이 0 일 때 변위가  $w$ 의 크기로 점프하여, 시간이 지남에 따라 일정한  $w$  값을 갖는 스텝변위(step displacement)가 주어질 때, 힘  $F(t)$ 가 시간에 따라 감소하는 점탄성 성질을 나타냄으로, 변위에 의존하는 힘 완화함수(displacement dependent force relaxation function)라 일컫는다.

새로운 비선형 점탄성 모델을 완성하는데 있어서, 리아니스모델을 이용하여 데이터를 얻어 비선형 점탄성모델인 Pipkin-Rogers model 을 완성하였으며, 이 모델을 바탕으로 sinusoidal function 을 이용하여 모의실험을 수행하였다.

## 4. 비선형 점탄성 모델링

부싱은 가운데가 비어있는 실린더로 가정되어 축방향 대칭이며, 관성은 무시되었으며, 축방향 변형만이 고려되었다. 부싱은  $t < 0$ 에서는 변형이 없으며,  $t \geq 0$ 에서는 가운데 축이 축 방향의 힘  $F(t)$ 를 받음에 따라 부싱은 바깥쪽 슬리브에 대하여 축방향 변위  $w(r, t)$ 를 갖으며, 변형전 과 변형후의 모양은 Fig. 2에 나타나 있다.

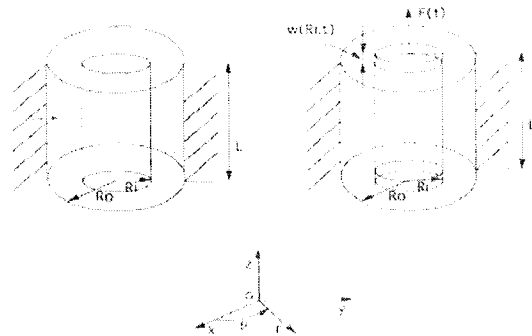


Fig. 2 Reference and current configurations in axial mode

바깥쪽 슬리브는 고정되어 있으므로,  $w(R_0, t) = 0$  이며, 가장 큰 변위를 가지는 부싱의 안쪽에서의 변위  $w(R, t)$  와 축방향 힘  $F(t)$  의 관계를 구하고자 하였다. 힘과 변위 및 반지름은 안쪽반지름  $R$  을 이용하여 무차원화 하였으며, 무차원화된 축방향 변위  $\hat{w}(\hat{r}, t)$  와 변형률  $\hat{k}(\hat{r}, t)$  의 관계는 다음과 같다.

$$\hat{k}(\hat{r}, t) = \frac{\partial \hat{w}(\hat{r}, t)}{\partial \hat{r}} \quad (3)$$

또한, 무차원화된 힘  $\hat{F}(t)$  와 응력  $\hat{\sigma}_r(\hat{r}, t)$  및 변형률  $\hat{k}(\hat{r}, t)$  의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G \frac{\hat{F}(t)}{\hat{r}} &= \hat{\sigma}_r(\hat{r}, t) \\ &= \left( a + \frac{b}{[1 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)]} + [3 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)] [c + d\hat{k}^2(\hat{r}, t)] \right) \hat{k}(\hat{r}, t) \\ &\quad - [c + d\hat{k}^2(\hat{r}, t)] [2 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)] \hat{k}(\hat{r}, t) \\ &\quad + 2\hat{k}(\hat{r}, 0^+) [P_0(t) + \hat{k}(\hat{r}, t) Q_0(t)] \\ &\quad + 2 \int_0^t \left( P_0(t-s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s} \right) ds \\ &\quad + 2\hat{k}^2(\hat{r}, t) \int_0^t \left( Q_0(t-s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s} \right) ds \\ &\quad + \hat{k}(\hat{r}, 0^+) \left( P_1(t) + \frac{Q_1(t)}{[1 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)]} \right) [2 + \hat{k}(\hat{r}, 0^+) \hat{k}(\hat{r}, t) - \hat{k}^2(\hat{r}, t)] \\ &\quad + 2\hat{k}(\hat{r}, t) \int_0^t \left( P_1(t-s) \hat{k}(\hat{r}, s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s} \right) ds \\ &\quad + [2 - \hat{k}^2(\hat{r}, t)] \int_0^t \left( Q_1(t-s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s} \right) ds \\ &\quad + \frac{2\hat{k}(\hat{r}, t)}{[1 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)]} \int_0^t \left( Q_2(t-s) \hat{k}(\hat{r}, s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s} \right) ds \\ &\quad + \frac{2 - \hat{k}^2(\hat{r}, t)}{[1 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)]} \int_0^t \left( Q_2(t-s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s} \right) ds \end{aligned} \quad (4)$$

힘  $F(t)$  를 무차원하기 위하여 이용된  $G$  는  $k(r, 0^+)$  가 무한히 작은 경우로, 다음과 같이 정의하였다.

$$G = \sigma_r(r, 0^+) / k(r, 0^+) = 107.95(\text{psi}) \quad (5)$$

식(3)과 (4)로부터 데이터를 얻어, 여러 과정을 거쳐 완성된 비선형 점탄성 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{F}(t) &= H(\hat{w}(1, 0), t) \\ &+ \int \frac{\partial H(\hat{w}(1, s), t-s)}{\partial \hat{w}(1, s)} \frac{d\hat{w}(1, s)}{ds} ds \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} H(\hat{w}(1, s), t) &= (C_{11} + C_{12}e^{-t/\tau_{12}} + C_{13}e^{-t/\tau_{13}}) \hat{w}(1, s) \\ &+ (C_{31} + C_{32}e^{-t/\tau_{32}} + C_{33}e^{-t/\tau_{33}}) \{\hat{w}(1, s)\}^3 \\ &+ (C_{51} + C_{52}e^{-t/\tau_{52}} + C_{53}e^{-t/\tau_{53}}) \{\hat{w}(1, s)\}^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= 0.6939, C_{12} = 0.1066, C_{13} = 0.1117 \\ \tau_{12} &= 15.4068, \tau_{13} = 2.017 \\ C_{31} &= -0.0959, C_{32} = -0.0252, C_{33} = -0.0243, \\ \tau_{32} &= 10.3334, \tau_{33} = 1.7875 \\ C_{51} &= 0.0286, C_{52} = 0.0075, C_{53} = 0.0075 \\ \tau_{52} &= 9.0136, \tau_{53} = 1.7358 \end{aligned}$$

## 5. 모의실험

서론에서 언급하였듯이, 부싱의 축방향 모드에 대한 힘과 변위의 관계인 Pipkin-Rogers model 에 사인함수 (sine function)의 축방향 변위를 입력하여 그 진폭의 변화와 주파수의 변화에 따른 힘과 변위와의 관계를 알아보았다.

부싱의 안쪽 반지름에서의 주어진 변위  $\hat{w}(1, t)$  는 다음과 같다.

$$\hat{w}(1, t) = A \sin(\omega t) \quad (7)$$

$A$  는 진폭으로 0.3, 0.4, ..., 0.9 를 이용하였으며, 주파수는  $f = \omega / (2\pi)$  로, 0.00625, 0.0125, 0.025, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4 Hz 를 이용하였다.

모의실험을 통하여, 주파수와 변위가 점탄성모델의 비선형성에 미치는 영향을 알아보았으며, 변위가 증가함에 따라, 비선형성이 커지는 것을 쉽게 알 수 있다. 이에 대한 예로써,  $f=0.4\text{Hz}$  에 대하여,  $A=0.3$  과 0.9 의 경우를 Fig. 3 과 Fig. 4 에 각각 나타내었다.

또한, 주파수가 비선형성에 미치는 영향을 정량적으로 알아보기 위하여, 주어진 주기의 1/4 되는 시간을 최종 모의실험 시간으로 하고, 이 시간의 1/10 되는 지점까지를 변위와 하중의 선형관계로 정의하였다. 즉, 주기 T 의 1/40 이 되는 시간까지는 하중과 변위의 관계가 선형 점탄성으로 볼 수 있음을 의미하며, 이는 많은 모의실험을 통하여 입증하였다. 주기의 1/40 되는 시간까지에서 주어진 변위와 하중과의 관계를 이용하여 최소자승법 (least squares method) 으로부터 선형관계를 도출하였으며 이를 연장하여 주기의 1/4 되는 곳에서 주어진 변위에 대한

하중값을 얻었다. 이렇게 얻은 선형결과값과 모의실험에서 얻은 하중값의 차를 선형결과값으로 나누어 상대오차 E 를 정의하였다.

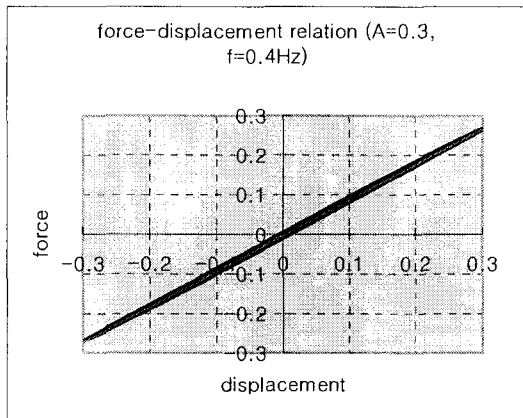


Fig. 3 Force-displacement relation for A=0.3, f=0.4Hz

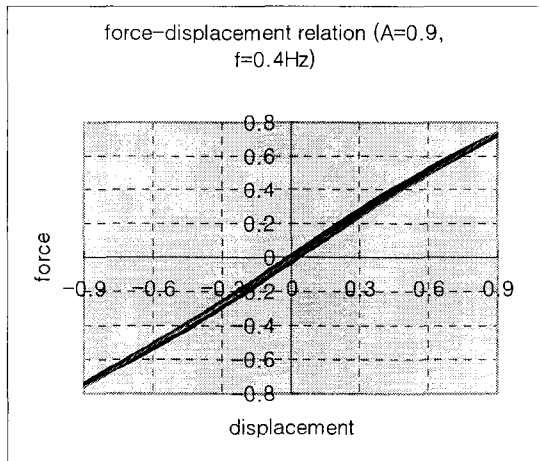


Fig. 4 Force-displacement relation for A=0.9, f=0.4Hz

주파수가 비선형성에 미치는 영향을 알아보기 위하여, A=0.5 인 경우에 대하여 알아보면, f=0.4Hz 인 경우 E=5.768%, f=0.2Hz 의 경우 E=7.521%, f=0.1Hz 의 경우 E=10.113%, f=0.00625Hz 의 경우 E=16.65% 등으로 주파수가 감소할수록 비선형 정도가 커짐을 알 수 있다.

Fig. 5 와 Fig. 6 은 A=0.5 일때, f=0.4Hz 인 경우와 f=0.00625Hz 의 경우에 대하여 하중과 변위의 관계를 나타내어 주고 있다. 이 때 직선은 주기의 1/40 까지의 시간에 대한 하중과 변위의 데이터로 최소자승법으로부터 얻은 선형관계를 나타내고 있다.

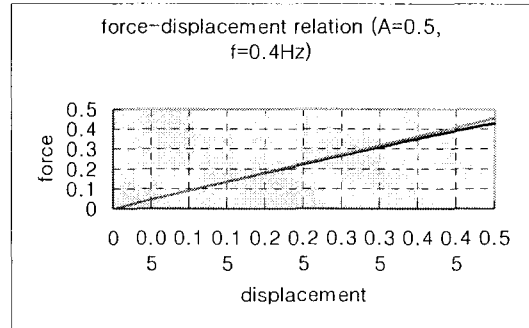


Fig. 5 Force-displacement relation for A=0.5, f=0.4Hz

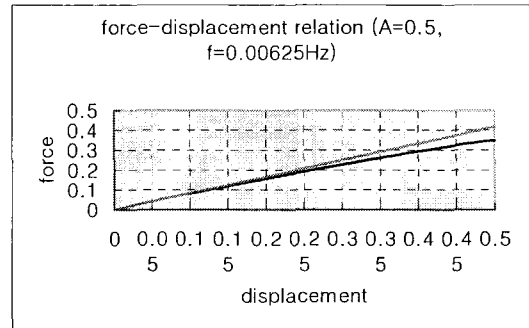


Fig. 6 Force-displacement relation for A=0.5, f=0.00625Hz

## 6. 결론

Pipkin-Rogers model 에 대하여, 주파수와 변위가 점탄성 모델에 미치는 영향을 알아보았으며, 점탄성 모델의 비선형성은 변위의 진폭에 비례하고, 주파수의 크기에 반비례함을 알 수 있다.

## 후 기

이 논문은 2002 년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2002-003-D00009).

## 참고문헌

1. Boltzmann, L., "Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung," Pogg. Ann. Physik, Vol. 7, 624, 1876.
2. McGuiert, C. W. and Lianis, G., "Constitutive Equations for Viscoelastic Solids under Finite Uniaxial and Biaxial Deformations," Transactions of the Society of Rheology, Vol. 14:2, pp. 117-134, 1970.
3. Lee, S., A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model of Elastomeric Bushing Response, Ph. D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, 1997.