

다물체계 해석 방법을 이용한 동력 전달계의 특성 해석

우민수*, 공진형(서울대 대학원), 한형석(한국기계연구원),
임원식, 박영일(서울산업대), 이장무(서울대)

Analysis on Dynamic Characteristics of Power Transmission System Using Multibody Dynamics

M. S. Woo, J. H. Kong(Mecha & Aerospace. Eng. Dept. SNU), H. S. Han(KIMM),
W. S. Lim, Y. I. Park(SNUT), J. M. Lee(SNU)

ABSTRACT

This paper presents an effective method to analyze the dynamic characteristics for the shifting transients of power transmission system using the multibody dynamics, which is composed of subsystem equation, subsystem assemble, and the self-determining technique for the system degree of freedom. Using the advantages of multibody dynamics, the proposed method can be used easily for mathematical models of mechanical systems, such as a power transmission, compared with newtonian method. With this theory, dynamic simulation program was developed. The program can be used to verify system performances, transient phenomena, and other dynamic problems. The simulation of a target system was presented, and its validity was attained by being compared with the previous analysis using newtonian method.

Key Words : Multibody dynamics(다물체 동역학), Subsystem assemble(서브시스템 조합), Self-determination of system D.O.F(운동 자유도 자율판단), Stick-Slip(결합-슬립), Dynamic characteristic(동적 특성)

1. 서론

기존의 동력전달계 해석방법은 주로 동력 흐름에 관계된 변수만 고려된 일반 좌표계(General coordinate)를 사용하여 뉴턴 방법(Newtonian method)으로 해석해 왔다. 반면에 차량모델은 이와는 다른 다물체 동역학을 사용하여 해석하는 방법을 취하였다. 이처럼 하나의 시스템을 서로 다른 해석 방법으로 접근하기보다는 일관된 해석 방법으로 접근하는 것이, 거시적이고 통합적인 차량 성능의 분석에 효과적일 것이다. 뿐만 아니라, 여러 가지 상용 프로그램들이 다물체 동역학에 기반을 둔에 따라 이와의 연동을 위해서는 해석적 방법인 라그랑지 방정식을 통하여 해석을 수행할 수 있는 다물체 동역학에 근거한 해석이 필수적인 요건이라 할 수 있다.

본 연구에서는, 이러한 필요성으로 인하여 동력 전달계 시스템을 다물체 동역학으로 해석하기 위하여 각각의 요소들을 서브시스템으로 정의하고 이에

근거하여 자유도 자율판단 알고리즘을 적용함으로써 일반적인 동적 시스템 및 동력 전달계에 적용 가능한 엄밀한 수학적 형태의 서브시스템의 운동방정식 및 서브시스템의 조합 방법을 제시하여 해석을 수행하고자 한다.

2. 서브시스템의 구성

2.1 서브시스템의 운동방정식

서브시스템의 거동은 내부에서의 에너지에 의하여 결정되고, 모델링 방법으로 일반 좌표계(Generalized coordinate)를 사용한다. 이러한 에너지는 서브시스템 내에서의 운동 에너지와 위치에너지, 그리고 감쇠에 의한 에너지 소산의 세가지 형태로 구분해 볼 수 있다. 각각의 에너지형태에 따라 라그랑지 방정식을 구성하게 되고 이 식이 해당 서브시스템의 지배 방정식(Governing equation)을 결정하게 된다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial \dot{q}_i} \lambda_j = Q_i \quad (1)$$

L : Lagrangian, L = T - V

F : Energy dissipation function, $F = \frac{1}{2} \dot{q}^T D \dot{q}$

Φ : Constraint equation

q : Generalized coordinates

Q : Generalized force

Q 는 서브시스템에 가해지는 외력이고, $\Phi_j \lambda_j$ 는 서브시스템의 내부에 구속조건식(Eq-2)이 있을 경우의 구속력을 뜻한다. 서브시스템의 운동방정식은 아래와 같이 나타낸다.

(Eq-1) 서브시스템의 운동방정식

(Eq-2) 서브시스템내의 변위변수의 구속조건식

(Eq-2)의 서브시스템내의 변위변수들의 구속조건식은 홀로노믹 구속식(Holonomic constraint)의 경우만 생각하기로 가정한다. 이러한 형태는 아래와 같이 표현 가능하다.

$$\Phi: \sum_{k=1}^n \alpha_k q_k = 0 \quad (\alpha_k, \text{constant}) \quad (2)$$

힘에 관계된 내부 전달력들의 구속조건식은 지배방정식 상에서 $\Phi_j \lambda_j$, 즉 구속조건식의 자코비안(Jacobian)과 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)의 선형 조합된 형태로 나타나기 때문에 고려하지 않아도 된다. 여기서 i 번째 서브시스템에 대한 운동방정식과 구속조건식을 고려하면 다음과 같다. 단, s 는 i 번째 서브시스템이 갖는 자유도의 수를 나타내고, r 은 구속조건식의 개수를 나타낸다.

$$m_n \ddot{q}_s(t) + c_n \dot{q}_s(t) + k_n q_s(t) + \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_s} \lambda_r = Q_n(t) \quad (3)$$

$$\Phi_r: \sum_{k=1}^n \alpha_{r,k} q_k = 0 \quad (4)$$

이를 다시 정리하여 행렬 형태로 나타내면 아래와 같다. 단, s 는 n 개의 자유도를 갖는다고 가정한다.

$$m_n \ddot{q}_s(t) + \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_s} \lambda_r = Q_n(t) - c_n \dot{q}_s(t) - k_n q_s(t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial q_s} \lambda_r \cdot \ddot{q}_s = \gamma \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} m_n & \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial q_s} \right)^T \\ \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_n - c_n \dot{q}_s - k_n q_s \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (7)$$

식(7)에서 각 원소들의 형태는 식(8)과 같다.

$$m_n = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_s} = \begin{bmatrix} \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \alpha_{r3} & \cdots & \alpha_{rn} \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \alpha_{r3} & \cdots & \alpha_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \alpha_{r3} & \cdots & \alpha_{rn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

식(8)의 행렬의 크기는 m_{is} 가 $(n \times n)$, 자코비안 행렬이 $(r \times n)$ 이므로 i 번째 서브시스템이 가지는 자유도는 $(n-r)$ 이 된다. 전체 시스템은 이와 같이 각각의 서브시스템의 형태로 나타낼 수 된다.

2.2 서브시스템의 조합

2.1 절의 구성된 서브시스템의 방정식을 바탕으로 전체 행렬을 구성할 때 추가되어야 할 사항은 서브시스템간의 연결 정보이다.

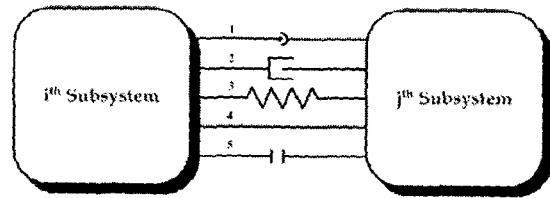


Fig. 1 Connection of subsystem.

Fig. 1 은 i 번째와 j 번째 서브시스템의 경계변수들간의 연결 상태의 종류를 (1)~(5)로 구분하여 나타낸 것이다. 서브시스템간의 연결은 경계변수들간의 변위차원의 구속된 경우와 힘 차원으로 구속된 경우로 나눌 수 있다. Fig. 1 에서 (1)은 서브시스템간의 조인트로 구속된 경우로서, 각 조인트들이 가지는 특성에 따라 경계변수를 이용한 구속조건식이 결정된다. (2), (3)는 서브시스템간에 강성이나 감쇠로 연결된 경우로서, 경계변수들을 이용하여 해당 서브시스템에 가해지는 외력으로서 간주되어 힘 차원의 구속으로 나타난다. (4)는 두 서브시스템이 일체된 상태로서 경계변수들간의 구속식으로 나타낼 수 있다.

(1), (4)구속은 (Eq-3)와 같이 경계 구속식의 형태로 나타나며, (2), (3)구속은 서브시스템간의 경계변수를 이용하여 경계력을 표현할 수 있다. (5)구속은 동력전달계 같은 특수한 시스템에서만 나타나는 구속조건으로서 일방향 클러치나 단판 클러치를 표현한다. 이는 항상 동일한 형태의 구속조건을 부여하는 것이 아니라 해당 시스템의 상태에 따라 구속여부가 결정되는, 즉 자유도가 변화하는 경우를 나타낸다. 따라서, 동력 전달계에서는 시스템의 특성에 따라 스틱-슬립(Stick-Slip)을 하게 되는데 이를 위하여 스틱-슬립 판별에 의한 상태 구속식(Eq-4)가 필요하게 된다. (Eq-3)은 각각의 서브시스템들이 경

계변수들의 변위차원 구속을 나타낸다.

$$(Eq-3) \text{ 서브시스템간의 구속조건식} \\ \sum_{k=1} \beta_k q_{bv} = 0 \quad (\beta_k, \text{constant}) \quad (8)$$

q_{bv} 는 서브시스템간의 경계변수를 나타낸다. (Eq-4)에 해당하는 식은 슬립 면을 사이에 두고 상대적인 운동을 하던 물체가 외부조건에 의하여 결합될 때의 상태를 나타내기 위한 것이다. 이 조건식은 상대속도를 고정시키기 위한 의미를 가지므로 가속도 차원의 관계식으로 표현된다.

$$(Eq-4) \text{ 상태 변이점에서의 구속조건식} \\ \sum_{k=1} \gamma_k \dot{q}_{cv} = 0 \quad (\gamma_k, \text{constant}) \quad (9)$$

q_{cv} 는 서브시스템간의 경계변수 중 상태변수를 나타낸다. 서브시스템을 조합하여 전체 행렬을 구성한 후에 각 서브시스템간의 연결정보를 고려하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M & \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial q} \right]^T & \left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial q_{bv}} \right]^T & \left[\frac{\partial \Phi_4}{\partial q_{cv}} \right]^T \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial q} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial q_{bv}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial q_{cv}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q - c\dot{q} - kq \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$\partial \Phi_2 / \partial q$, $\partial \Phi_3 / \partial q_{bv}$, $\partial \Phi_4 / \partial q_{cv}$ 는 각각 (Eq-2), (Eq-3), (Eq-4) 구속조건식에 의한 자코비안을 의미한다. 이 중 $\partial \Phi_2 / \partial q$, $\partial \Phi_3 / \partial q_{bv}$ 는 항상 일정한 값을 지니지만, $\partial \Phi_4 / \partial q_{cv}$ 는 매시간마다 시스템의 스틱-슬립 조건을 판단한 후에 구속식의 유/무가 결정되는 구조를 갖게 된다. 즉, 하나의 상태 변이력이 운동결합력으로 변화되면 운동변수에 대한 구속조건식(Eq-4)이 생성되고 슬립에 관계하던 변수들은 생성된 조건식에 의하여 구속 받게 된다. 따라서, 전체 행렬이 가지는 자유도는 q 의 개수에서 라그랑지 승수, λ 의 개수를 빼면 된다.

2.3 서브시스템에 쓰이는 힘의 분류

뉴턴 방법에서와는 달리 다물체 동역학에서는 구속력들의 관계식이 필요하지 않고, 자유도를 가지는 변수들에 의한 구속식만 필요하다. 따라서 다물체 동역학에서 기존의 구속력들이 어떠한 형태로 나타나는지 고찰해 볼 필요가 있다. 각각의 서브시스템에서 쓰이는 힘 벡터의 종류와 구속력들의 형태는 다음과 같다.

2.3.1 External Force(f_{ext})

f_{ext} 는 서브시스템에 가해지는 순수 외력이다.

2.3.2 Internally Known Force(f_{kwn})

f_{kwn} 은 서브시스템의 영역 내에서, 내부의 변수를 사용하여 정의할 수 있는 힘 벡터이며, 각종 동역학 요소 사이에서 공유하는 내력벡터를 의미한다.

2.3.3 Boundary Force(f_{bnd})

f_{bnd} 은 서로 다른 서브시스템 간에 공유하는 힘 벡터로서 종류는 두 가지로 나눌 수 있다. 첫번째, 서로 다른 서브시스템이 (Eq-3)의 구속조건식에 의하여 연결된 경우, 형태는 서브시스템의 경계변수들에 대한 자코비안과 라그랑지 승수의 곱으로 표시한다. 두번째, 서브시스템간 힘 차원 구속인 경우, 경계변수들을 사용하여 정의할 수 있다. 이 때, f_{bnd} 는 각 해당시스템에 외력으로 작용한다.

2.3.4 Internal Force(f_{int})

f_{int} 는 서브시스템 내에서 작용하는 힘으로서, 해당시스템의 변수들이 (Eq-2)의 구속조건식으로 연결되어 있는 경우, 형태는 서브시스템내의 변수들에 대한 (Eq-2)의 자코비안과 라그랑지 승수의 곱으로 표현한다.

2.3.5 State Transition Force(f_{str})

f_{str} 는 이웃한 두 역학적인 물체의 운동을 억제하여 운동 자유도를 감소시킬 수 있는 힘 벡터를 의미하는데, 두 물체의 접촉면에서 작용하는 힘의 상태에 따라 기지 변이력과 미지 변이력으로 구분되어 정의한다. 첫번째, 기지 변이력은 슬립 시 나타나고 이 힘은 해당시스템에 가해지는 외력으로 간주되고 두번째, 미지 변이력은 결합 시 나타나는데 이 힘은 (Eq-5)의 변수들에 의한 구속조건식의 자코비안과 라그랑지 승수의 곱으로 나타난다.

2.4 자유도 자율 판단을 고려한 수치해석 방법

전체행렬이 완성되면 해석을 해야 하는데 수치적분 방법 중의 하나인 런지쿠타 4 차(Runge kutta 4th order)를 사용한다. 동력전달계의 특성상 스틱-슬립을 하는 요소들로 인하여 시스템의 자유도가 바뀌기 때문에, 해석 시간 간격(Time step) 고려 시에 자유도 자율 판단을 위한 알고리즘이 고려되어야 한다. 자세한 내용은 [1], [2]에 기술되어 있다. 아래의 Fig. 2 은 하나의 클러치에 대한 양단 속도 값을 시간 축 선상에서 나타낸 것이다.

슬립을 하던 양단 축이 결합하여 시스템의 자유도가 (2→1)로 변화하게 되고, 이로써 양단 속도 값

이 상태 변이점을 기점으로 일치함을 볼 수 있다. 그림에서와 같이 시스템의 특성에 따라 최대 시간 간격(Maximum time step, h)이 정해지면 그 시간 간격에 의하여 해석을 수행하다가 상태 변이점 근처에서 시간 간격이 변함을 알 수 있다.

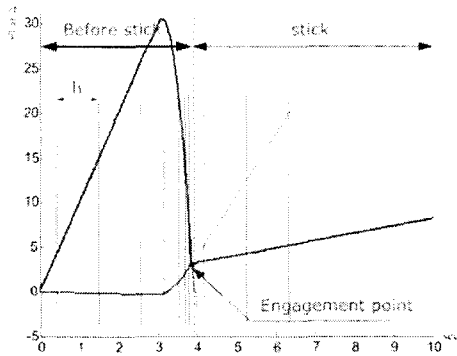


Fig. 2 Example of clutch system.

상태 변이점이 지난 경우 이 시스템은 자유도가 변화된, 이전과는 다른 시스템이므로 최대 시간간격(Maximum time step, h')을 다시 고려하여 해석을 수행하게 된다.

3. 다물체 동역학을 이용한 해석

3.1 동력전달계

해석하고자 하는 대상은 Fig. 3 과 같으며, 이는 1.5L 급 자동변속기 장착 승용차의 동력전달계이다.

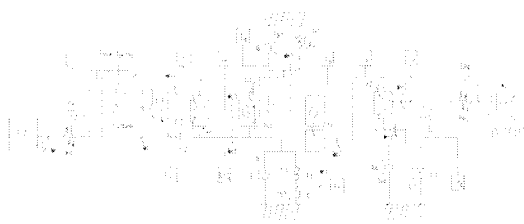


Fig. 3 Schematic of AT system (1).

이를 다물체 동역학을 사용하여 해석하기 위해서 서브시스템화 하면 Fig. 4 와 같다. 각 서브시스템은 엔진, 토크 컨버터, 유성기어, 단순 기어, 관성, 접지면(ground) 등으로 이루어져 있고, 서브 시스템 간의 연결은 강성, 감쇠, 일체형 연결, 다관 클러치, 일방향 클러치로서 이루어져 있다. 또한 자유도의 변화를 유발하는 모듈(Module)의 경우, 해당 시스템의 상태에 따라 자유도가 변화될 수 있도록 모델링 되어 있다.

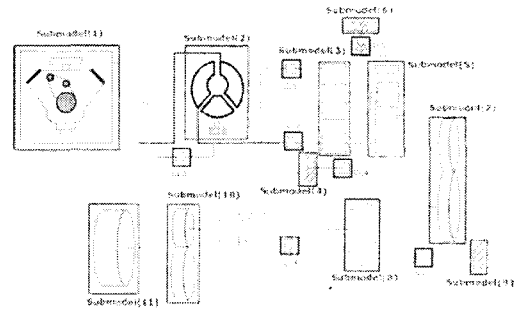


Fig. 4 Schematic of AT system (2).

기존의 서브시스템의 모델링은 기계적인 모듈에 관계없이 같은 회전 속도를 지닌 강체를 기준으로 시스템을 구분하였지만, 위 시스템은 동력전달계의 각 모듈별로 서브시스템을 구분하여 해석 시 효율성을 높였다. 각 서브시스템은 Fig. 5 과 같이 지배방정식, 구속조건식, 외력으로 구성되어 하나의 행렬 형태를 이루게 된다.

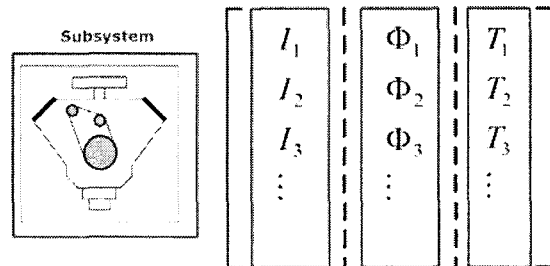


Fig. 5 Schematic of subsystem.

3.2 서브시스템의 조합 및 해석

3.1 절에서 모델링한 각 서브시스템의 행렬을 조합하여 전체 행렬을 구성하게 된다. 이를 도시하면 Fig. 6 과 같다.

$$\begin{matrix}
 \text{Subsystem(1)} \\
 \text{Subsystem(2)} \\
 \text{Subsystem(3)} \\
 \vdots \\
 \text{Subsystem(n)}
 \end{matrix}
 \Rightarrow
 \begin{bmatrix}
 M & \Phi_q^T \\
 \Phi_q & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \ddot{q} \\
 \lambda
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 Q \\
 \gamma
 \end{bmatrix}$$

M : 관성모멘트
 Q : 토크
 q : Generalized coordinate
 λ : Lagrange multiplier
 γ : Constraint eq.의 RHS

Fig. 6 Schematic of global matrix.

Fig. 6 의 그림에서처럼 각 서브시스템은 지배방정식, 구속조건식, 외력의 정보를 행렬 형태로 저장하고 있고, 각 서브시스템간의 연결정보를 더하여 전체 행렬을 이루게 된다. 연결정보는 초기에 입력 받은 고정된 구속조건과 매시간마다 시스템에 특성

에 따라 변화하는 구속조건을 판별하여 나누어 저장하게 된다. 자유도 자율 판단 알고리즘을 적용하여 수치 해석을 수행한 결과는 Fig. 7, Fig. 8 과 같다.

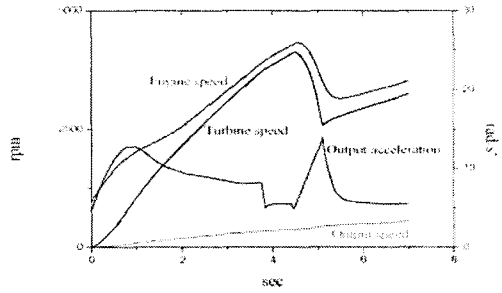


Fig. 7 Result of shifting characteristics(1) by using newtonian method.

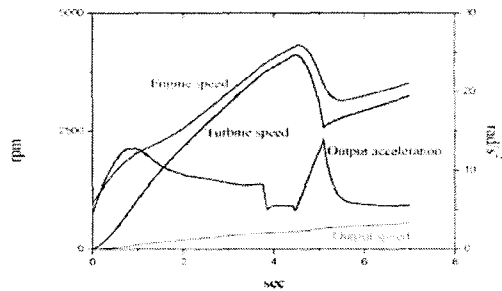


Fig. 8 Result of shifting characteristics(2) by using multibody dynamics.

본 결과는 동력전달계 시스템이 1 단에서 2 단으로 변속할 때의 각속도값과 출력축의 각속도값을 도시한 그림이다. Fig. 7 은 뉴턴 방법의 결과이고 Fig. 8 은 다물체 동역학을 사용하였을 때의 결과이다. 두가지 해석값을 비교해 보았을 때 오차는 발생하지 않으며, 이를 통하여 타당성을 검증하였다.

4. 결론

본 논문에서는 기존의 뉴턴 방법으로 해석하던 동력전달계 시스템을 다물체 동역학을 이용하여 해석을 수행하는 과정을 제시하였다. 주어진 임의의 시스템을 각각의 서브시스템으로 구분하여 서브시스템의 모델링 과정과 이를 토대로 서브시스템의 연결 상태에 따른 조합 과정을 보였다. 이러한 방법론을 이용한 연구의 예로서, 자동변속기를 장착한 동력 전달계를 해석함으로써 변속 특성의 결과를 보였으며, 뉴턴 방법을 통한 결과와 비교함으로써 타당성을 검증하였다.

후 기

본 연구는 과학기술부에서 지원하는 주력산업의 고부가가치화 사업 “웹기반 범용 동력전달계 성능 해석 시스템 개발” 과제의 연구비로 수행되었음을 밝히며 본 연구의 지원에 대하여 감사 드립니다.

참고문헌

1. 임원식, 박영일, 이장무, “변속 시스템의 자유도 자율 판단 알고리즘”, 한국자동차공학회논문집, 제 5 권, 제 6 호, pp. 202~214, 1997.
2. 임원식, 조한상, 장옥진, 박영일, 이장무, “서브 시스템 조합 개념을 이용한 동력전달계 동적 특성 해석용 프로그램 개발”, 대한기계학회논문집, 제 23 권, 제 12 호 1999.
3. 공진형, 임원식, 박영일, 이장무, “동력전달계 동적 특성 해석을 위한 서브 시스템 조합 알고리즘”, 추계한국자동차공학회논문집 2001.
4. Parviz E. Nikravesh, “Computer-aided Analysis of Mechanical Systems”, Prentice-Hall International, 1988.