

## 로봇 매니플레이터의 강인제어를 위한 최적제어로의 접근

김미경\*(울산대 대학원 전기전자정보시스템공학부), 강희준(울산대 전기전자정보시스템공학부)

### An Optimal Control Approach to Robust Control of Robot Manipulators

Mi-Kyung Kim, Hee-Jun Kang(School of Electrical Engineering, UOU)

#### ABSTRACT

An optimal control approach to robust control design is proposed in this study for rigid robotic systems under the unknown load and the other uncertainties. The uncertainties are quadratically bounded for some positive definite matrix. Iterative method to find the matrix is shown. Simulations are made for a weight-lifting operation of a two-link manipulator and the robust control performance of robotic systems by the proposed algorithm is remarkable.

**Key Words** : uncertainties (불확실성), robust control (강인제어), optimal control (최적제어), weighting matrix (가중행렬), iterative method (반복기법)

#### 1. 서론

로봇 매니플레이터는 비선형성 및 미지의 부하와 마찰 등에 의한 모델 불확실성을 가진다. 따라서, 이를 다루는 적응제어기법과 강인제어기법 등이 제안되어 왔다<sup>1</sup>.

불확실성을 상태변수의 함수로 표현하고 이를 가격함수에 반영하여 강인제어문제를 최적제어문제로 변환하는 기법이 Lin<sup>2</sup>에 의해 소개되었다. Lin은 불확실성의 제곱에 대한 한계(boundary)를 양한행렬(positive definite matrix)과 상태변수의 제곱과의 곱으로 표현하고 이 양한행렬을 기존의 상태변수에 대한 가중행렬에 더함으로써 불확실성을 가격함수에 반영하였다.

Lin의 불확실성의 한계를 표현하는 방식은 강인제어문제가 Riccati 방정식의 해를 구하는 보다 간단한 문제로 변환된다는 장점을 가지고 있으나 불확실성의 한계로 표현되는 양한행렬이 상태변수와 결합(coupling)되어 있으므로 상태변수의 함수인 불확실성에 대하여 그 한계를 구하기가 쉽지 않다. 본 논문에서는 불확실성의 한계로 표현되는 양한행렬을 스칼라(scalar)와 단위행렬의 곱으로 두어 상태변수와 분리(decoupling)함으로써 주어진 로봇 시스템과 작업에 대한 시스템의 상태와 불확실성을 알

고리즘에 의해 분석하고 유한시간구간에서 불확실성의 크기를 상태변수의 크기로 나누어 가장 큰 값을 불확실성의 한계로 두는 방안을 제시한다. 제시되는 알고리즘은 시스템의 안정된 응답을 얻기 위하여 일련의 과정을 반복하는데 적용되는 가격함수에서의 가중행렬들에 따라 제어의 성능이 달라지므로 가격함수에서의 상태변수에 대한 또 하나의 가중행렬의 크기를 시스템의 상태에 따라 증가시켜 제어의 성능은 향상시키고 알고리즘에서의 반복횟수를 감소시킨다.

2축 로봇 매니플레이터의 미지의 부하를 들어 올리는 동작에 대한 제안된 제어기의 성능을 시뮬레이션을 통하여 확인한다.

#### 2. 매니플레이터 동역학 방정식

로봇 매니플레이터의 동역학 방정식은 다음과 같다.

$$\tau = M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q})$$

여기서,  $N(q, \dot{q})$ 은 다음과 같다.

$$N(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

매니플레이터의 동역학 방정식에는 부하에 대한 정보와 마찰 등이 고려되지 않았으므로  $M(q)$ 과  $N(q, \dot{q})$ 는 불확실성을 포함한다. 불확실성을 포함하

는  $M(q)$  과  $N(q, \dot{q})$  의 범위를 다음과 같이 가정한다.

1) 다음을 만족하는 양행렬(positive definite matrix)  $M_o(q)$  이 존재한다.

$$M(q) \leq M_o(q)$$

2) 다음을 만족하는 음이 아닌 함수(nonnegative function)  $N_o(q, \dot{q})$  이 존재한다.

$$\|N(q, \dot{q})\| \leq N_o(q, \dot{q})$$

매니플레이터의 동역학 방정식에서 로봇관절의 가속도  $\ddot{q}$  를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1}(\tau - N) \\ &= M_o^{-1}(M_o M^{-1} \tau - N_o) + M_o^{-1}(N_o - M_o M^{-1} N) \end{aligned}$$

여기서,  $M$  과  $N$  은 각각  $M(q)$  과  $N(q, \dot{q})$  를,  $M_o$  과  $N_o$  은 각각  $M_o(q)$  과  $N_o(q, \dot{q})$  를 나타낸다.

제어입력  $u$  와 불확실성  $w$  를 각각 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} u &= M^{-1}(\tau - M M_o^{-1} N_o) \\ w &= M^{-1}(M M_o^{-1} N_o - N) \end{aligned}$$

로봇관절의 가속도  $\ddot{q}$  는 다음과 같다.

$$\ddot{q} = u + w$$

상태변수를 다음과 같이 정의한다.

$$x = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ q \end{bmatrix}$$

매니플레이터의 동역학 방정식은 다음의 상태 방정식으로 표현된다.

$$\dot{x} = Ax + Bu + Bw$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

이다.

### 3. 최적제어로의 접근

강인제어문제는 최적제어문제로 바꾸어 표현될 수 있으며 최적제어문제의 해가 존재하면 이는 강인제어문제의 해이다.

시스템  $\dot{x} = Ax + Bu + Bw$  의 강인제어문제를 가격 함수  $J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q_w x + x^T Q x + u^T R u) dt$  를 최소화하는 시스템  $\dot{x} = Ax + Bu$  의 최적제어문제로 표현하기 위하여 다음 조건을 만족하는 양행렬(positive definite matrix)  $Q_w$  가 존재한다고 가정한다.

$$w^T R w < x^T Q_w x$$

주어진 최적제어문제에 대한 Hamiltonian 은 다음과 같다.

$$H = \frac{1}{2} (x^T Q_w x + x^T Q x + u^T R u) + J_x^T (Ax + Bu)$$

$H$  를 최소화하는 최적제어  $u^*$  를 구하는 필요 조건  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  에서 다음을 얻는다.

$$J_x^T B = -(u^*)^T R$$

Hamilton-Jacobi 방정식  $H^* = 0$  에서 다음을 얻는다.

$$J_x^T (Ax + Bu^*) = -\frac{1}{2} (x^T Q_w x + x^T Q x + (u^*)^T R (u^*))$$

Lyapunov function candidate  $V$  로 가격함수  $J$  를 둔다

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q_w x + x^T Q x + u^T R u) dt$$

최적제어  $u^*$  가 시스템  $\dot{x} = Ax + Bu + Bw$  에 대한 강인제어문제의 해라면  $\dot{V}$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= V_x^T (Ax + Bu^* + Bw) \\ &= -\frac{1}{2} \left( (x^T Q_w x - w^T R w) + x^T Q x + (u^* + w)^T R (u^* + w) \right) \end{aligned}$$

가정에 의해서  $x^T Q_w x - w^T R w > 0$  이다. 따라서  $\dot{V} = dV/dt < 0$  이며, Lyapunov 정리로부터 최적제어  $u^*$  는 시스템  $\dot{x} = Ax + Bu + Bw$  의 전역점근안정(globally asymptotically stable)을 보장한다.

가격함수  $J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q_w x + x^T Q x + u^T R u) dt$  를 최소화하는 시스템  $\dot{x} = Ax + Bu$  의 최적제어문제의 해인 최적제어  $u^*$  는  $x^T Q_w x - w^T R w > 0$  인 불확실성  $w$  에 대한 시스템  $\dot{x} = Ax + Bu + Bw$  의 강인제어문제의 해이다.

최적제어  $u^*$  는 다음과 같다.

$$u^* = -R^{-1} B^T P x$$

여기서,  $P$  는 다음의 Riccati 방정식을 풀어서 얻을 수 있다.

$$0 = Q_w + Q - P B R^{-1} B^T P + P A + A^T P$$

### 4. 반복기법에 의한 가중행렬의 설정

주어진 최적제어문제의 해  $u^*$  를 구하기 위해서는 가중행렬  $Q$ ,  $R$  그리고  $Q_w$  를 설정해야 한다. 적용된 가중행렬에 따라 결과는 달라지므로 시스템의 상태에 따라 가중행렬의 값들을 반복적으로 변

환하는 다음의 알고리즘을 제안한다.

가중행렬  $Q_w$  는 불확실성  $w$  에 대한 가정으로 부터 구한다. 가중행렬  $R$  과  $Q_w$  를 각각  $R=rI$  ,  $Q_w=q_wI$  라 두면  $w^T R w < x^T Q_w x$  은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\frac{\|w\|^2}{\|x\|^2} < \frac{q_w}{r} = \gamma$$

유한시간구간  $[0, N]$  에서 조건을 만족하는 가중치  $\gamma$  를 구하기 위하여 상태변수  $x$  와 불확실성  $w$  를 다음과 같이 벡터로 정의한다.

$$x_k = (x_k(0), x_k(1), \dots, x_k(N))$$

$$w_k = (w_k(0), w_k(1), \dots, w_k(N))$$

여기서, 첨자  $k$  는 반복차수이며, 반복차수  $k$  에서의 가중치  $\gamma_k$  는 다음의  $l_\infty$ -norm 을 사용한다.

$$\gamma_k = \| \Gamma_k \|_\infty = \max_{0 \leq i \leq N} | \Gamma_k(i) |$$

여기서,

$$\Gamma_k = (\Gamma_k(0), \Gamma_k(1), \dots, \Gamma_k(N))$$

$$\Gamma_k(i) = \frac{\|w_k(i)\|^2}{\|x_k(i)\|^2}, \quad i = 0, \dots, N$$

이다.

$\|x_k(i)\|^2 = 0$  인 경우를 처리하기 위하여 더미변수(dummy variable)  $\delta$  를 다음과 같이 사용한다.

$$\Gamma_k'(i) = \frac{\|w_k(i)\|^2}{\|x_k(i)\|^2 + \delta}$$

여기서,  $\delta \approx 0$  이고,  $\Gamma_k'(i)$  와  $\Gamma_k(i)$  의 관계는 다음과 같다.

$$\Gamma_k(i) = \frac{\|w_k(i)\|^2 \Gamma_k'(i)}{\|w_k(i)\|^2 - \delta \Gamma_k'(i)}$$

가중치  $\gamma$  를 구하는 계산은  $\gamma_k$  과  $\gamma_{k-1}$  의 차이가 허용오차  $\varepsilon$  보다 작을 때까지 반복한다.

가중행렬  $Q_w$  와 마찬가지로 가중행렬  $Q$  도 상태변수  $x$  에 대한 가중행렬이므로 다음에 의해 가중행렬  $Q$  와 가중치  $\gamma$  의 수렴속도를 제어한다.

$$Q_k = \left\{ \begin{array}{l} Q_{k-1}, \|x_k(N)\|^2 < \varepsilon \\ \alpha Q_{k-1}, \varepsilon \leq \|x_k(N)\|^2 \end{array} \right\}$$

여기서,  $\alpha$  는 1 보다 큰 임의의 값이며, 가중행렬  $Q$  를 구하는 계산은  $Q_k$  과  $Q_{k-1}$  의 크기 차이가 허용오차  $\varepsilon$  보다 작을 때까지 반복한다.

## 5. 예제

시뮬레이션에 사용된 2 축 매니퓰레이터의 동역학 방정식은 다음과 같다.

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

여기서,

$$M(q) = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2(s_1s_2 + c_1c_2) \\ m_2l_1l_2(s_1s_2 + c_1c_2) & m_2l_2^2 \end{pmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = m_2l_1l_2(c_1s_2 - s_1c_2) \begin{pmatrix} 0 & -\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(q) = \begin{pmatrix} -(m_1 + m_2)l_1gs_1 \\ -m_2l_2gs_2 \end{pmatrix}$$

이며,  $c_1 = \cos(q_1)$  ,  $s_1 = \sin(q_1)$  ,  $c_2 = \cos(q_2)$  ,  $s_2 = \sin(q_2)$  이다.

사용된 로봇 시스템의 파라미터는  $m_1 = 1(\text{kg})$  ,  $m_2 = 10(\text{kg})$  ,  $l_1 = 1(\text{m})$  ,  $l_2 = 1(\text{m})$  이고, 초기조건은  $q_1 = q_2 = \pi/2$  ,  $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$  이며, 기준값은 각각  $q_r = 0$  ,  $\dot{q}_r = 0$  이다.

$M(q)$  과  $N(q, \dot{q})$  은  $q$  와  $\dot{q}$  의 함수이므로 매니퓰레이터의 움직임에 따라 매순간 다른 값을 가지게 되어 그 한계를 구하기가 쉽지 않다. 그러나 부하를 들어올리는 단순한 동작의 레귤레이터 문제에서 로봇 매니퓰레이터의 운동방정식이 미지의 부하의 질량에 의한 불확실성만을 포함한다고 가정하면 미지의 부하가 최대값을 가질 때의  $M(q)$  과  $N(q, \dot{q})$  은 쉽게 구할 수 있다. 이를  $M_o(q)$  와  $N_o(q, \dot{q})$  라 하고 시뮬레이션에 사용하였다. 미지의 부하의 최대값을 10(kg)으로 가정하였다.

가중치  $\gamma$  를 반복기법에 의해 구하면 가중행렬  $Q$  에 따라 가중치  $\gamma$  의 크기와 허용오차  $\varepsilon = 0.0000001$  에 대한 반복횟수에 차이가 있음을 알게 된다. 반복기법에 의하여 가중치  $\gamma$  를 구할 뿐만 아니라 반복이 진행됨에 따라 가중행렬  $Q$  의 크기도 증가시켜 반복횟수를 제어한다. 시뮬레이션에서는 유한시간구간의 마지막 시간구간에서의 상태변수의 크기  $\|x_k(N)\|^2 \geq 0.0000001$  일 경우에는 다음 반복차수에서의 가중행렬  $Q$  로 황금분할비율로 잘 알려진 1.618 을 곱한 값을 사용하였다.

가중행렬  $Q = I$  ,  $R = I$  ,  $\gamma = 0$  로 반복기법을 시작한다. 미지의 부하의 최대 질량( $m_l = 10$ )에 대하여 반복기법을 적용하고 유한시간구간에 대하여  $\|w_k(i)\|^2$  ,  $\|x_k(i)\|^2$  ,  $\Gamma_k(i)$  를 각각 Fig. 1 에 나타내었다.

반복기법이 적용됨에 따라  $\|w_k(i)\|^2$  는 안정된 응답을 보이며  $\|x_k(i)\|^2$  도 0 으로 수렴한다. 유한시간구간의 마지막 시간에서의 상태변수의 크기  $\|x_k(N)\|^2$  가 0.0000001 보다 작은 값을 유지할 때에 적용된 값인 3569.725271I 을 가중행렬  $Q$  로 설정한다. 가중행렬  $Q$  의 값이 설정되면 주어진 로봇 작업에 대한 유한시간구간에서의 가장 큰 불확실성을 표현하는 가중치  $\gamma$  도 일정한 값으로 수렴한다. 시간  $t=3.7620$  에서 가중치는  $\gamma=2772.979931$  로 수렴하여 이후 시스템은 동일한 응답을 보인다.

반복기법에 의해 설정된 가중행렬  $Q=3569.725271I$  ,  $Q_w=2772.979931I$  와 가중행렬  $R=I$  로 Riccati 방정식을 풀고 제어입력  $u$  를 구하여 시스템에 적용한 결과를 그림으로 제시하였다. Fig. 2 의 왼쪽은  $m_L=0$  ,  $\gamma=0$  ,  $Q=I$  에 대한 2 축 로봇 매니퓰레이터의 관절의 위치  $q$  와 관절의 속도  $\dot{q}$  , 그리고 관절토크  $\tau$  를 보인다. Fig. 2 의 오른쪽은 반복기법에 의해 설정된  $\gamma=2772.979931$  ,  $Q=3569.725271I$  에 대한 결과이다. Fig. 3 과 Fig. 4 는 각각  $m_L=5$  와  $m_L=10$  에 대한 결과이다. 그림으로부터 부하의 변화에 대하여 매우 강인한 제어가 이루어지고 있음을 알 수 있다.

## 6. 결론

로봇 매니퓰레이터의 강인제어를 위하여 최적제어로 접근하는 방법을 제안하였다. 성능지수에 불확실성을 반영하여 강인제어문제를 최적제어문제로 변환하고 Lyapunov 정리로부터 시스템의 전역점근안정(globally asymptotically stable)을 증명하였다. 주어진 로봇 시스템과 작업에 대한 유한시간구간에서의 불확실성의 최대값을 반복적으로 구하는 알고리즘을 제시하고 Riccati 방정식의 가중행렬들을 알고리즘을 통하여 설정하였다. 2 축 로봇 매니퓰레이터의 미지의 부하를 들어올리는 동작에 대한 시뮬레이션을 통하여 제안된 제어가 강인한 제어를 하고 있음을 확인할 수 있다.

## 참고문헌

1. F. L. Lewis, C. T. Abdallah, D. M. Dawson, *Control of Robot Manipulators*, Macmillan, 1993.
2. Feng Lin, Robert D. Brandt, "An Optimal Control Approach to Robust Control of Robot Manipulators,"

*IEEE Trans. On Robotics and Automation*, Vol. 14, No. 1, pp. 69 - 77, 1998.

3. Feng Lin, A. W. Olbrot, "An LQR Approach to Robust Control of Linear Systems with Uncertain Parameters," in *Proc. 35<sup>th</sup> IEEE Conf. Decision Control*, pp. 4158 - 4163, 1996.

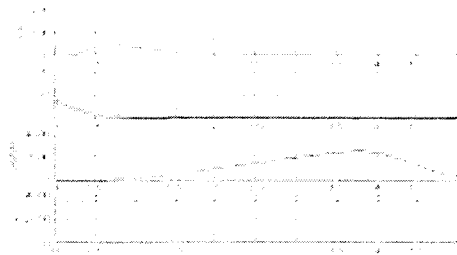


Fig. 1 The result of Iterative Method for  $m_L = 10$ .



Fig. 2 Response for  $m_L = 0$ .

[Left]  $\gamma=0$  ,  $Q=I$  . Upper graph shows  $q_1, q_2$  and middle graph shows  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$  . Lower graph shows  $\tau_1, \tau_2$  . All graphs versus time(s).

[Right]  $\gamma=2772.979931$  ,  $Q=3569.725271I$  .



Fig. 3 Response for  $m_L = 5$ .



Fig. 4 Response for  $m_L = 10$ .