

## 섬유와 실에 대한 일반적인 Capstan Equation

정재호, 강태진

서울대학교 공과대학 재료공학부

### True Capstan Equation for Fibers and Yarns

Jae Ho Jung and Tae Jin Kang

School of Material Science and Technology, Seoul National University, Seoul, Korea

#### 1. Abstract

원형의 물체에 접해 있는 섬유 또는 실의 장력에 관하여 기존의 capstan equation의 잘못된 점을 보완하는 일반적인 capstan Equation을 유도하였다. 해석은 주로 섬유-물체의 접촉부위에 초점을 맞추었다. 그 결과 유도된 지배방정식은 2차 상미분 방정식의 형태를 갖는다. 지배방정식의 해를 구한 뒤, 접촉영역 전체에 작용하는 힘의 평형조건을 이용하여 입력 장력(incoming tension)과 출력 장력(outgoing tension)간의 관계식을 얻을 수 있었으며 우리는 이것을 True capstan equation이라 명하였다. 우리의 결과는 Capstan equation을 포함하여 이와 관련된 앞선 모든 연구결과를 수정 보완 할 것이다.

#### 2. Introduction

원형의 물체에 접해 있는 섬유 또는 실의 장력에 관하여 잘 알려져 있는 식이 아래 식(1)의 capstan equation이다.[1]

$$T_2 = T_1 e^{\mu\theta} \quad (1)$$

단,  $T_1$ 은 입력장력,  $T_2$ 는 출력 장력,  $\theta$ ,  $\mu$ 는 각각 접촉 각도와 마찰계수이다. capstan equation은 섬유 및 섬유집합체의 공정을 해석하는데 매우 유용한데, 그 이유는 섬유간의 마찰력이 실이나 포(fabric)를 구성하는 결합력이 되기 때문이다. 그러나 식 (1)은 입력장력( $T_1$ )이 0이 되면 접촉 각이나 마찰계수와 관계없이 출력 장력( $T_2$ )의 값이 0이 되어야 하는 심각한 단점을 가지고 있다. M. Wei와 Chen[2]이 이점을 지적하고 해결하기 위하여 개선된 capstan equation을 유도하여 제안하였다. 모델을 유도함에 있어 그들은 수학적인 복잡함을 피하기 위해 shear force와 bending moment를 선형화 하였는데 그들의 이러한 유도방법 역시 평형방정식을 만족하지 않는 문제점을 갖고 있었다. 또한, 섬유-물체의 비접촉 영역의 해석방법도 실제 물리적으로 불가능한 문제점이 있었다. 우리는 이러한 문제점을 해결하고 모순이 없는 일반적인 방정식을 유도하고 이를 통하여 true capstan equation을 유도하려고 한다.

#### 3. Mathematical Derivation

(fig.1)

그림 1은 접촉부위의 자유 물체도를 나타낸다. 그림 1의 h, v 방향의 힘의 평형 조건과 점 O에서의 moment의 평형조건을 고려하면 다음 3개의 방정식이 얻어진다

$$dT + Qd\varphi - \mu dN = 0 \quad (2)$$

$$dQ - Td\varphi + dN = 0 \quad (3)$$

$$dM - QRd\varphi + \mu r_1 dN = 0 \quad (4)$$

식 (2), (3), (4)를 재배열하면 다음의 3개의 방정식을 얻을 수 있다

$$\mu r_1 \frac{d^2 T}{d\varphi^2} + R \frac{dT}{d\varphi} - \mu r_2 T = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dN}{d\varphi} = T - \frac{dQ}{d\varphi} \quad (6)$$

$$\frac{dM}{d\varphi} + r_1 \frac{dT}{d\varphi} = Qr_2 \quad (7)$$

경계조건은 아래와 같다.

$$T = T_1 \text{ at } \varphi = 0, \quad T = T_2 \text{ at } \varphi = \theta \quad (8)$$

식 (5), (6), (7), (8)이 우리가 풀어야 할 지배방정식이다. 식 (5)는 해석적인 해가 존재하므로 경계조건을 이용하여 식 (5)를 푼 뒤 이를 식 (6), (7)에 대입하여 Q, N을 구한 후, 그림 2에서 나타낸 것과 같이 h, v방향의 힘의 합을 0으로 놓으면 우리가 원하는 방정식이 얻어진다. 이때, N,  $F_\mu$ 의 방향을 알지 못하는 것이 문제가 되는데 이것은 그림 3에서와 같이  $dN$ ,  $dF_\mu$ 의 h, v방향의 힘의 요소를 구한 뒤 이를 적분하는 방식으로 구하면 된다. 그 결과 아래의 관계식이 얻어진다.

$$(T_1 e^{\beta\theta} - T_2) \cdot f(\theta) + (T_2 - T_1 e^{\alpha\theta}) \cdot g(\theta) + \{T_2 (\cos\theta - \mu \sin\theta) - T_1\} (e^{\beta\theta} - e^{\alpha\theta}) = 0 \quad (9)$$

$$f(\theta) = \frac{1}{\beta} \{ \mu(1 - e^{\alpha\theta} \cos\theta) - e^{\alpha\theta} \sin\theta \} + A_{\alpha\beta} e^{\alpha\theta} \sin\theta + B_{\alpha\beta} (1 - e^{\alpha\theta} \cos\theta)$$

$$g(\theta) = \frac{1}{\alpha} \{ \mu(1 - e^{\beta\theta} \cos\theta) - e^{\beta\theta} \sin\theta \} + A_{\beta\alpha} e^{\beta\theta} \sin\theta + B_{\beta\alpha} (1 - e^{\beta\theta} \cos\theta)$$

$$A_{\alpha\beta} = (1 + \frac{\alpha}{\beta}) \cdot \frac{\alpha - \mu}{1 + \alpha^2} + (1 + \frac{\alpha}{\beta}) \cdot \frac{\mu(1 + \mu\alpha)}{1 + \alpha^2}, \quad B_{\alpha\beta} = (1 + \frac{\alpha}{\beta}) \cdot \frac{1 + \mu\alpha}{1 + \alpha^2} - (1 + \frac{\alpha}{\beta}) \cdot \frac{\mu(\alpha - \mu)}{1 + \alpha^2}$$

$$A_{\beta\alpha} = (1 + \frac{\beta}{\alpha}) \cdot \frac{\beta - \mu}{1 + \beta^2} + (1 + \frac{\beta}{\alpha}) \cdot \frac{\mu(1 + \mu\beta)}{1 + \beta^2}, \quad B_{\beta\alpha} = (1 + \frac{\beta}{\alpha}) \cdot \frac{1 + \mu\beta}{1 + \beta^2} - (1 + \frac{\beta}{\alpha}) \cdot \frac{\mu(\beta - \mu)}{1 + \beta^2}$$

$$\alpha = \frac{-R - \sqrt{R^2 + 4\mu^2 r_1 r_2}}{2\mu r_1}, \quad \beta = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4\mu^2 r_1 r_2}}{2\mu r_1}$$

(fig.2)

(fig.3)

식 (9)가 True Capstan equation이다. 여기서  $r_1 = 0$ 으로 놓으면 classical한 capstan equation이 됨을 알 수 있는데 이는 식(5)에  $r_1 = 0$ 을 대입하여 푼 결과와도 일치한다. 즉, classical capstan equation은 위 일반해의 특수한 경우 -  $r_1 = 0$  인 경우임을 알 수 있다. 즉, 대부분의 섬유 공정의 경우 접촉 부위의 반지름보다 섬유/실의 반지름이 훨씬 작기 때문에 이와 같은 근사법은 유효하다고 할 수 있다. 그러나 섬유-섬유 접촉이나 실-실 접촉에 의한 해석에서는  $r_1 = 0$ 이라고 근사할 수가 없으므로 식 (9)을 이용하여 일반적으로 풀어야 한다.

#### 4. Summary and Conclusion

평형방정식을 만족하고 기존의 capstan equation의 결과를 포함하는 일반적인 capstan equation을 유도하였다. 한편, 그림 4와 같이 섬유의 장력방향이 섬유 축 방향에서 안쪽으로 기울어진(inclined) 경우에는 다음과 같이 얻어진다. 자세한 유도과정은 복잡하므로 본 초록에서는 생략하였다.

$$(T_1 e^{\beta\theta} \cos \omega_1 - T_2 \cos \omega_2) \cdot f(\theta) + (T_2 \cos \omega_2 - T_1 e^{\alpha\theta} \cos \omega_1) \cdot g(\theta) + \{T_2[(\cos \omega_2 - 2\mu \sin \omega_2) \cos \theta - (1 - \mu^2) \sin \omega_2 + \mu \cos \omega_2] \sin \theta\} - T_1 \{(1 - \mu) \sin \omega_1 + \cos \omega_1\} (e^{\beta\theta} - e^{\alpha\theta}) = 0 \quad (10)$$

식 (10)에서 접촉부분 전체에 적용되는 힘의 평형 조건을 이용할 때 그림 5의 vector diagram을 이용하였음을 주의하라. 그림 2와의 차이점은 섬유의 접촉부위의 양끝에 normal force 및 frictional force가 작용하는 것이다.

(fig.4)

(fig.5)

마지막으로 비접촉영역 부분은 elastica 이론을 통하여 해석을 할 수 있는데 그 해는 elliptic integral 형태로 얻어짐을 확인 할 수 있으나, 유도과정이나 결과는 복잡하므로 본 초록에서는 생략하였다. 한 가지 도출될 수 있는 중요한 결론은 비접촉영역의 섬유의 shape이 그림 4에서처럼 곡선이 나오려면 장력의 방향이 섬유 축 방향 안쪽으로 구부러져야 한다는 것이다.(이는 수학적으로 증명가능함)

#### 5. References.

1. Morton, W. E., and Hearle, J. W. S., Physical Properties of Textile Fibres, 2nd ed., Heinemann, London, 1975, p611.
2. M. Wei., and R. Chen., An Improved Capstan Equation for Nonflexible Fibers and Yarns, *Textile Res. J.* 68(7), 487-492 (1998)

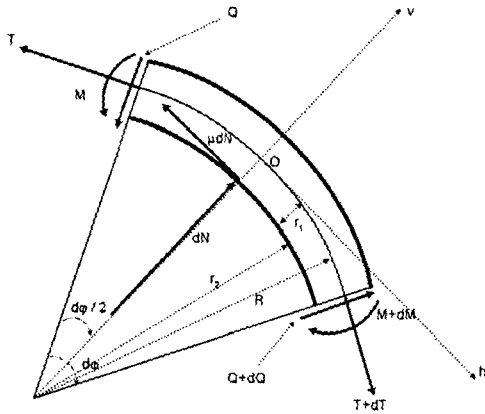


fig.1 Free body diagram of a fiber in contact with convex surface.

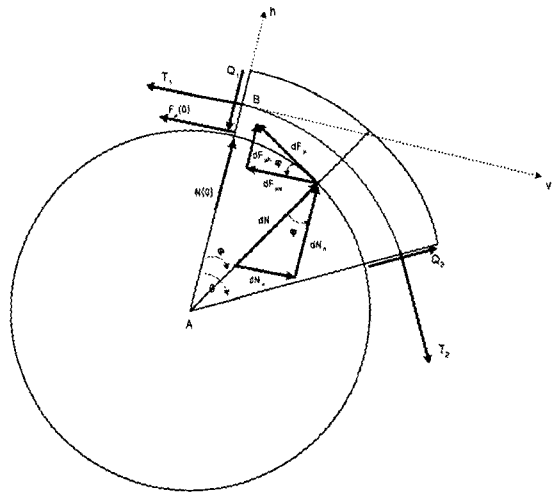


fig. 2 force balance for whole contact region

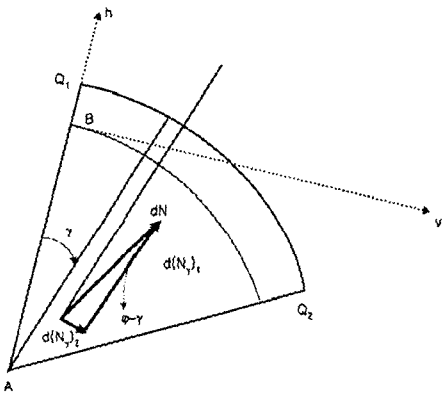


fig. 3 Component of normal force elements

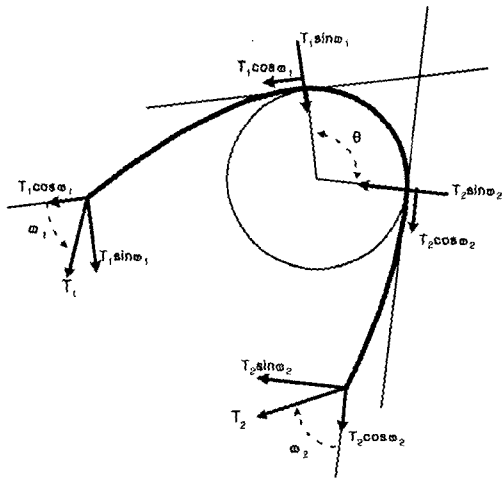


fig. 4 Whole view of a fiber contacting with cylindrical body under inclined tension.

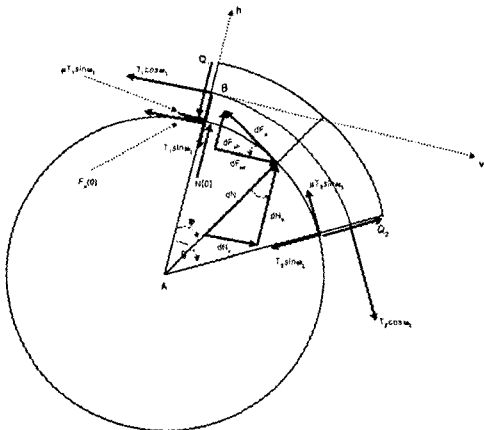


fig. 5 force balance for whole contact region under inclined tension