

# 복합재료와 강재료를 이용한 동시경화조인트의 계면 모서리에서의 응력집중계수

신금철\* · 이정주\*\*

## Stress intensities at the interface corner of the co-cured lap joint with composite and steel adherends

Kum Cheol Shin and Jung Ju Lee

**Key Words:** 동시경화조인트(Co-cured joints), 고유치 문제(Eigenvalue problems), 응력 특이성 (Stress singularities), H-적분(H-integral), 응력집중계수(Stress intensities)

### ABSTRACT

동시경화조인트는 경화 시 복합재료로부터 흘러나오는 수지를 접착제로 사용하기 때문에 제조공정이 간편할 뿐 아니라 복합재료를 표면 처리할 필요가 없기 때문에 기존의 접착제에 의한 접합방법에 비해 장점을 지닌다. 최근 동시경화조인트에 관한 연구가 활발하게 진행되고 있으나 해석적인 방법을 통한 연구는 아직까지 미비하다. 실험적으로 연구된 결과를 보면 동시경화조인트는 계면 모서리에서 파괴가 시작되어 계면을 따라 파괴가 진행된다. 그러므로 조인트의 계면 모서리에서의 응력집중계수에 관해 연구하는 것이 중요하다. 본 논문에서는 고유치 문제를 고려하여 복합재료와 강재료로 구성된 동시경화조인트의 계면 모서리에서 발생하는 응력 및 변위장을 결정하고, H-적분을 이용하여 응력집중계수를 구하는 방법을 제시하고자 한다.

### 1. Introduction

동시경화조인트(Co-cured joints)는 경화 중 복합재료로부터 흘러나오는 수지를 접착제로 사용하기 때문에 경화공정과 접합공정을 동시에 수행할 수 있다[1]. 또한 복합재료를 표면 처리할 필요가 없기 때문에 제조 시 기존의 접착제에 의한 접합방법에 비해 제조공정이 간단하다. 이러한 몇 가지 장점으로 인해 최근 동시경화조인트에 관한 연구가 활발하게 진행되고 있으나 조인트 내에 분포하는 응력에 관한 해석에 기반한 연구에 머물고 있

는 상태이다[2-5].

동시경화조인트의 파괴 메커니즘을 실험결과로부터 관찰해 보면 파괴의 대부분은 계면 모서리(Interface corner)에서 시작된다는 것을 알 수 있다. 그러므로 계면 모서리에서의 응력집중계수(Stress intensity factors)를 구하는 것은 매우 중요하다. 최근 들어 관련 분야의 연구자들은 균열(cracks)을 포함한 등방성/등방성 재료, 이방성/이방성 재료, 이방성/등방성 재료의 계면 모서리에서의 응력집중계수를 구하기 위해 노력하였다[6-8]. 그러나 노치(Notches)를 포함한 이방성/등방성 재료에 관한 해석은 이루어지지 않고 있다. 이러한 해석적 방법의 기초는 고유치(Eigenvalues)와 고유벡터(Eigenvectors)를 구하는 것으로 시작된다. Ting 은

\* 한국과학기술원

\*\* 한국과학기술원

여러 가지 형상에 관한 고유치 문제를 계산하였다 [9]. Reciprocal Work Contour Integral Method(RWCIM)은 균열이나 노치가 있는 이종 재료의 계면 모서리에서의 응력집중계수를 구하는데 편리하다 [10-11].

본 논문에서는 노치를 포함한 복합재료/강재료의 계면 모서리에서의 응력집중계수를 구하는 방법을 제시하고자 한다. 먼저 개선된 Stroh 방법(Expanded Stroh formalism)을 이용하여 이방성/등방성 재료의 고유치 문제를 풀어 고유치와 고유벡터를 구하였고 이를 이용하여 계면 모서리 주위의 응력장과 변위장을 구하였다. 최종적으로 H-적분을 이용하여 동시경화조인트의 계면 모서리에서의 응력집중계수를 구하였다.

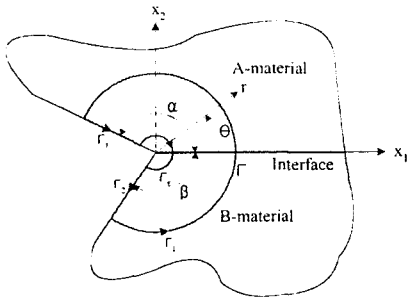


Fig. 1 Geometry of the bi-material interface corner.

## 2. Linear Elasticity

노치를 포함한 동시경화조인트의 계면 모서리에서의 거동을 살펴보기 위해 Fig. 1 과 같은 형상을 고려한다. A 와 B 는 각각 이방성 재료와 등방성 재료를 표시하고 계면은 완전히 접합된 상태이고 계면 모서리의 양 측면은 하중이 가해지지 않고 외부하중만이 가해진다고 가정한다.

### 2.1 Anisotropic elasticity

$u$  에 관한 일반적인 해는  $x_1$  과  $x_2$  로 이루어진 복소변수에 따라 결정된다. 변위장과 응력장에 관한 해는 다음과 같이 표현된다[12-13].

$$\begin{aligned} \{u_i\} &= 2\text{Re}\{\mathbf{A}\mathbf{f}(z)\} \\ \{\sigma_{ij}\} &= 2\text{Re}\{\mathbf{B}\mathbf{f}'(z)\} \\ \{\sigma_{in}\} &= 2\text{Re}\{\mathbf{D}\mathbf{f}'(z)\} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서

$$\mathbf{f}(z) = \frac{1}{\lambda} z^j \mathbf{q} \quad (2)$$

이고  $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2 = r(\cos\theta + p_\alpha \sin\theta) = r\zeta_\alpha(\theta)$  와 같이 정의한다. Stroh 방법 전반에 걸쳐 식 (1)에 있는  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  는 계산될 수 있다[13]. 여기서  $\mathbf{q}$  는 결정될 상수 벡터이다.

### 2.2 Isotropic elasticity

등방성 재료에 대한 응력장과 변위장은 Muskhelishvili 복소함수 형태로 표현할 수 있다 [14].

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2\{\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\} \\ \sigma_{22} + i\sigma_{12} &= \overline{\Phi(z)} + \Omega(z) + (\bar{z} - z)\Phi'(z) \\ \sigma_{33} + i\sigma_{31} &= \omega(z) \\ -2iG \frac{\partial}{\partial x_1}(u_2 + iu_1) &= \kappa \overline{\Phi(z)} - \Omega(z) - (\bar{z} - z)\Phi'(z) \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= \frac{1}{2Gi} [\omega(z) - \overline{\omega(z)}] \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)의 복소함수  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$ ,  $\omega(z)$  을 식 (1)의  $\mathbf{f}'(z)$  와 관련시키기 위하여 식 (3)을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다[8].

$$\begin{aligned} \{u_i\} &= 2\text{Re}\{\mathbf{A}^* \mathbf{g}(z)\} \\ \{\sigma_{ij}\} &= 2\text{Re}\{\mathbf{B}^* \mathbf{g}'(z)\} \\ \{\sigma_{in}\} &= 2\text{Re}\{\mathbf{D}^* \mathbf{g}'(z)\} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{g}(z) = \mathbf{f}'(z) + (\bar{z} - z)\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{f}'(z)$  와 같이 쓸 수 있다.

## 3. Stress Singularities of Co-cured Joints

고유치 문제를 푸는 과정을 설명하기 위하여 동시경화조인트에서 실제로 생기는  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$  의 조인트 형상을 고려한다. 경계조건은 경계면을 따라 얻을 수 있는  $\mathbf{u}^A(0) = \mathbf{u}^B(0)$  와  $\mathbf{t}^A(0) = \mathbf{t}^B(0)$ , 그리고 모서리 측면에서 얻을 수 있는  $\mathbf{t}^A(\pi) = 0$  와  $\mathbf{t}^B(-\frac{\pi}{2}) = 0$  을 고려한다. 이러한 네 가지의 경계조건을 고려하면 네 가지의 텐서 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} r^\lambda \mathbf{A}^A \mathbf{q}^A + \frac{1}{\lambda} r^{\bar{\lambda}} \overline{\mathbf{A}^A \mathbf{q}^A} &= \frac{1}{\lambda} r^\lambda \mathbf{A}^B \mathbf{q}^B + \frac{1}{\lambda} r^{\bar{\lambda}} \overline{\mathbf{A}^B \mathbf{q}^B} \\ r^{\lambda-1} \mathbf{B}^A \mathbf{q}^A + r^{\bar{\lambda}-1} \overline{\mathbf{B}^A \mathbf{q}^A} &= r^{\lambda-1} \mathbf{B}^B \mathbf{q}^B + r^{\bar{\lambda}-1} \overline{\mathbf{B}^B \mathbf{q}^B} \\ r^{\lambda-1} e^{i\pi(\lambda-1)} \mathbf{B}^A \mathbf{q}^A + r^{\bar{\lambda}-1} e^{i\pi(\bar{\lambda}-1)} \overline{\mathbf{B}^A \mathbf{q}^A} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$r^{\lambda_1} e^{\frac{\pi i(\lambda_1-1)}{2}} \mathbf{D}^B \mathbf{V}^B \mathbf{q}^B + r^{\lambda_2} e^{\frac{\pi i(\lambda_2-1)}{2}} \overline{\mathbf{D}^B \mathbf{V}^B \mathbf{q}^B} = 0.$$

여기서  $\mathbf{V}^B = \mathbf{I} - 2(\lambda - 1)\mathbf{Q}^*$  과 같이 쓸 수 있고 이 식을  $\mathbf{K}(\lambda)\mathbf{q}(\lambda) = 0$  과 같이 표현하면  $\mathbf{K}(\lambda)$  은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\mathbf{K}(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^* - \frac{1}{\lambda} e^{i\pi(\lambda-1)} \overline{\mathbf{A}^* \mathbf{B}^*} \mathbf{B}^* & -\frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^* - \frac{1}{\lambda} e^{i\pi(\lambda-1)} \overline{\mathbf{A}^* \mathbf{U}^*} \\ \mathbf{B}^* - e^{i\pi(\lambda-1)} \overline{\mathbf{B}^*} & \mathbf{B}^* - e^{i\pi(\lambda-1)} \overline{\mathbf{B}^* \mathbf{U}^*} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

여기서  $\mathbf{U}^B = \overline{\mathbf{V}^B} \mathbf{U}^B \mathbf{D}^B \mathbf{V}^B$  이고  $i = \sqrt{-1}$  이다. ()<sup>\*</sup> 은 행렬의 역변환을 의미한다. 자명하지 않은 해(Nontrivial solution)가 존재하려면  $\det[\mathbf{K}(\lambda)] = 0$  이 성립하여야 하며 이로부터 고유치와 고유벡터를 구할 수 있다.

#### 4. Asymptotic Singular Fields

변위장과 응력장을 표시하기 위하여 복소 고유치  $\lambda_1$  와  $\lambda_2$  을 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma^M &= K_1^M r^{\lambda_1-1} \Sigma_1^M(\theta) + K_2^M r^{\lambda_2-1} \Sigma_2^M(\theta) \\ u^M &= K_1^M r^{\lambda_1-1} \Pi_1^M(\theta) + K_2^M r^{\lambda_2-1} \Pi_2^M(\theta). \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $M$  은 A 와 B 재료를 의미하고, 각 함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Sigma_1^*(\theta) &= \mathbf{D}^* \text{diag}[\zeta_n^*(\theta)^{i-1}] \mathbf{h}^{i-1} + \overline{\mathbf{D}^* \text{diag}[\zeta_n^*(\theta)^{i-1}]} \mathbf{q}^{i-1} \\ \Sigma_2^*(\theta) &= \mathbf{B}^* \text{diag}[\zeta_n^*(\theta)^{i-1}] \mathbf{h}^{i-1} + \overline{\mathbf{B}^* \text{diag}[\zeta_n^*(\theta)^{i-1}]} \mathbf{q}^{i-1} \\ \Pi_1^*(\theta) &= \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{A}^* \text{diag}[\zeta_n^*(\theta)^{i-1}] \mathbf{h}^{i-1} + \frac{1}{\lambda_1} \overline{\mathbf{A}^* \text{diag}[\zeta_n^*(\theta)^{i-1}]} \mathbf{q}^{i-1} \\ \Sigma_1^{\dagger}(\theta) &= \mathbf{D}^{\dagger} \text{diag}[\zeta_n^{\dagger}(\theta)^{i-1}] \mathbf{h}^{i-1} + \overline{\mathbf{D}^{\dagger} \text{diag}[\zeta_n^{\dagger}(\theta)^{i-1}]} \mathbf{q}^{i-1} \\ \Sigma_2^{\dagger}(\theta) &= \mathbf{B}^{\dagger} \text{diag}[\zeta_n^{\dagger}(\theta)^{i-1}] \mathbf{h}^{i-1} + \overline{\mathbf{B}^{\dagger} \text{diag}[\zeta_n^{\dagger}(\theta)^{i-1}]} \mathbf{q}^{i-1} \\ \Pi_1^{\dagger}(\theta) &= \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{A}^{\dagger} \text{diag}[\zeta_n^{\dagger}(\theta)^{i-1}] \mathbf{h}^{i-1} + \frac{1}{\lambda_1} \overline{\mathbf{A}^{\dagger} \text{diag}[\zeta_n^{\dagger}(\theta)^{i-1}]} \mathbf{q}^{i-1} \\ \Sigma_1^{\ddagger}(\theta) &= e^{i\pi(\lambda_1-1)} \mathbf{D}^{\ddagger} [\mathbf{I} - (\lambda_1 - 1)(1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^*] \mathbf{q}^{i-1} + e^{-i\pi(\lambda_1-1)} \overline{\mathbf{D}^{\ddagger} [\mathbf{I} - (\lambda_1 - 1)(1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^*]} \mathbf{q}^{i-1} \\ \Sigma_2^{\ddagger}(\theta) &= e^{i\pi(\lambda_1-1)} \mathbf{B}^{\ddagger} [\mathbf{I} - (\lambda_1 - 1)(1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^*] \mathbf{q}^{i-1} + e^{-i\pi(\lambda_1-1)} \overline{\mathbf{B}^{\ddagger} [\mathbf{I} - (\lambda_1 - 1)(1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^*]} \mathbf{q}^{i-1} \\ \Pi_1^{\ddagger}(\theta) &= e^{i\pi(\lambda_1-1)} \mathbf{A}^{\ddagger} \left[ \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{I} - (1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^* \right] \mathbf{q}^{i-1} + e^{-i\pi(\lambda_1-1)} \overline{\mathbf{A}^{\ddagger} \left[ \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{I} - (1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^* \right]} \mathbf{q}^{i-1} \\ \Sigma_1^{\S}(\theta) &= e^{i\pi(\lambda_2-1)} \mathbf{D}^{\S} [\mathbf{I} - (\lambda_2 - 1)(1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^*] \mathbf{q}^{i-1} + e^{-i\pi(\lambda_2-1)} \overline{\mathbf{D}^{\S} [\mathbf{I} - (\lambda_2 - 1)(1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^*]} \mathbf{q}^{i-1} \\ \Sigma_2^{\S}(\theta) &= e^{i\pi(\lambda_2-1)} \mathbf{B}^{\S} [\mathbf{I} - (\lambda_2 - 1)(1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^*] \mathbf{q}^{i-1} + e^{-i\pi(\lambda_2-1)} \overline{\mathbf{B}^{\S} [\mathbf{I} - (\lambda_2 - 1)(1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^*]} \mathbf{q}^{i-1} \\ \Pi_1^{\S}(\theta) &= e^{i\pi(\lambda_2-1)} \mathbf{A}^{\S} \left[ \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{I} - (1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^* \right] \mathbf{q}^{i-1} + e^{-i\pi(\lambda_2-1)} \overline{\mathbf{A}^{\S} \left[ \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{I} - (1 - e^{i\pi}) \mathbf{Q}^* \right]} \mathbf{q}^{i-1} \end{aligned} \quad (8)$$

#### 5. Stress Intensities

계면 모서리에서 응력집중계수를 계산하는데 편리한  $H$ -적분은 Betti의 Reciprocal Work Theorem을 계면 모서리에 응용한 것이다. Betti의 Reciprocal Work Theorem은 실제의 변위장과 보조장을 통해 유도된다. 체적력이 없다고 한다면  $H$ -적분은 다음과 같은 형태를 취한다(Fig. 1 참고).

$$H = \int (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j ds = 0. \quad (9)$$

여기서  $\sigma_{ij}$  와  $u_i$  은 실제의 응력과 변위값이고 유한요소해석을 통해 얻을 수 있다.  $\sigma_{ij}^*$  와  $u_i^*$  은 보조장의 응력과 변위를 나타내고  $n_j$  은 적분 구간인  $\Gamma$  에 대해 수직방향의 단위 벡터이다. 폐쇄된 적분 구간 내에 특이점을 포함하지 않는 경우에  $H$ 의 값은 0을 취한다. 여기서 만약  $\lambda$ 가 고유치이면  $-\lambda$ 도 역시 고유치임을 이용하여 식(7)과(8)을 쓸 수 있다.

상수  $K_1^M$ 을 계산하기 위해 보조장으로 다음과 같은 식을 선택한다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{1M*} &= K_1^{1M} r^{\lambda_1-1} \Sigma_{ij}^{1M*}(\theta) \\ u_i^{1M*} &= K_1^{1M} r^{\lambda_1-1} \Pi_i^{1M*}(\theta). \end{aligned} \quad (10)$$

같은 방법으로  $K_2^M$ 를 계산하기 위한 보조장을 구할 수 있다. 두 가지 보조장 모두에 대하여  $\Sigma_{ij}^*(\theta)$  와  $\Pi_i^*(\theta)$  은  $\Sigma_{ij}(\theta)$  와  $\Pi_i(\theta)$  의 형태와 유사하게 구할 수 있다. 식(10)에서 구하지 못한 유일한 상수는 모드 I과 모드 II의 보조장 상수(Complimentary scaling factors)인  $K_1^M$  와  $K_2^M$ 이다. 모드 I에 대해  $H = H_1 = K_1^M$ 와 같이 두면  $K_1^M$ 을 계산할 수 있다. 같은 방법으로 모드 II에 대해서도  $K_2^M$ 을 구할 수 있다. 이때 식(9)의 적분을 계산하기 위해 계면 모서리로부터  $r$ 만큼 떨어진 적분구간에 대해 모서리의 하측면에서 상측면까지  $\sigma_{ij}$  와  $u_i$  을 이용하여 계산한다.

마지막으로 유한요소해석에서 구한 응력과 변위를 실제장(Actual fields)에 이용하고 위에서 구한 보조장의 응력과 변위를 이용하여 다음과 같이  $H$ -적분을 통해 응력집중계수를 구할 수 있다.

$$K_I'' = \int_{\beta}^{\alpha} \left( \sum_{i,j=1}^2 n_i \sigma_{ij} u_j'' - n_i \sigma_{ij}'' u_j \right) r d\theta$$

$$K_{II}'' = \int_{\beta}^{\alpha} \left( \sum_{i,j=1}^2 n_i \sigma_{ij} u_j'' - n_i \sigma_{ij}'' u_j \right) r d\theta \quad (11)$$

## 6. Conclusions

본 논문에서는 복합재료/강재료로 구성된 동시 경화조인트의 계면 모서리에서의 응력집중계수를 구하는 방법을 제시하였다. 기존의 방법에 비해 간편하게 개선된 Stroh 방법을 이용하여 이방성/등방성 재료의 고유치 문제를 고려하여 고유치와 고유 벡터를 계산하였다. 응력집중계수를 구하기 위해 필요한 변위장을 추가적으로 계산하였다. 최종적으로  $\lambda' = -\lambda$  을 가지는 보조장을 정의하여 H-적분을 통해 모드 I 과 모드 II 의 응력집중계수를 계산하는 방법을 제시하였다.

## References

1. K. C. Shin, Jung Ju Lee and Dai Gil Lee, *Journal of Adhesion Science and Technology*, **14** (2000) p. 123
2. D. H. Cho and D. G. Lee, *Journal of Adhesion Science and Technology*, **14** (2000) p. 939
3. K. C. Shin and Jung Ju Lee, *Journal of Adhesion Science and Technology*, **14** (2000) p. 1539
4. K. C. Shin and Jung Ju Lee, *Journal of Adhesion Science and Technology*, **14** (2000) p. 1691
5. D. G. Lee and D. H. Cho, *Journal of Composite Materials*, **34** (2000) p. 689
6. Z. Suo, *International Journal of Solids and Structures* **25** (1989), p. 1133
7. Z. Suo, *Proc. R. Soc., Lond.* **A427** (1990) p. 331
8. S. T. Choi, H. Shin, and Y. Y. Earmme, *International Journal of Solids and Structures* (accepted for publication).
9. T. C. T. Ting, *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications*, Oxford University Press, New York (1996)
10. W. C. Carpenter and C. Byers, *International Journal of Fracture*, **35** (1987) p. 245
11. P. E. W. Labossiere and M. L. Dunn, *Engineering Fracture Mechanics*, **62** (1999) p. 555
12. J. D. Eshelby, W. T. Read and W. Shockley, *Acta Metallurgica*, **1** (1953) p.251

13. A. N. Stroh, *Phil. Mag.* **3** (1958) p. 625

14. N. I. Muskhelishvili, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff, Groningen (1953)