

굽힘 하중을 받는 두꺼운 채널 빔의 해석

최 용 진* 전 흥 재** 변 준 형***

Analysis of Thick-walled Composite Channel Beam Under Flexural Loading

Choi, Yong-Jin*, Chun, Heung-Jae**, Byun, Jun-Hyung***

Key Words : Thick-walled channel beam, Composite materials

Abstract

A open section thick composite beam model is suggested in this study. In the model, the primary and secondary warping and transverse shear effects are incorporated. The rigidities associated with thick channel composite beam and thin channel composite beam are obtained and compared. The results show that the difference among rigidities of the thick and thin composite beams increase as the wall thickness increases.

1. 서 론

복합재료는 단독재료로서는 가질 수 없는 높은 비강성, 비강도 등의 우수한 재료 특성을 가지고 있으므로 산업분야가 다양해지고 경량화를 요구함에 따라 우주·항공 방위산업, 자동차, 스포츠 등의 여러 분야에 종래의 금속 재료를 대신하여 많이 사용되어지고 있으며 이러한 복합재료 중 섬유강화 복합재료는 적층판의 두께와 섬유의 각도 그리고 적층 순서를 결정할 수 있는 이방성 재료의 특성을 갖고 있으므로 설계자의 요구조건에 적합한 특성을 갖도록 구조요소를 설계할 수 있는 장점을 가지고 있다. 이러한 적층 복합재료는 주 구조재를 포함하여 산업전반

에서 폭넓게 사용되고 있으며, 현재 1차 구조재로서의 연구가 활발히 진행되고 있다.¹⁾ 일찍이 Bauld와 Tzeng²⁾은 얇은 개단면 복합재료 빔에 대하여 Vlasov-type 이론을 적용하여 복합재료 빔의 거동을 해석하였으며, Song과 Librescu³⁾은 임의의 단면을 가지는 얇은 폐단면 복합재료 빔에 대한 보완된 이론을 발전시켰다. 또한 두꺼운 폐단면 복합재료 빔에 대하여 White와 Kim⁴⁾은 주 뒤틀림 및 변의 뒤틀림 효과를 적용하여 복합재료 빔에 대한 이론을 전개하였으나 아직 두꺼운 개단면 복합재료 빔에 대한 이론의 연구는 미비한 상태이다. 본 연구에서는 1차 구조재로 사용되어 지는 철재빔을 대체하는 두꺼운 개단면 복합재료 빔의 굽힘하중에 대한 거동을 얇은 복합재료 빔과 비교하여 연구하였다.

* 연세대학교 기계공학과 대학원

** 연세대학교 기계공학부

*** KIMM(한국기계연구원)

2. 두꺼운 복합재료 빔 이론

2.1 기본가정

본 연구에서는 다음과 같은 기본가정이 사용되었다.⁵⁾

- 1) 빔단면의 등고선은 자신의 면에 대하여 변형하지 않는다.
- 2) 빔단면의 면의 변위는 단면 좌표계 y 와 z 의 3차함수로 표현되어 진다.
- 3) 빔의 각요소는 두꺼운 Shell의 거동을 가진다.
- 4) 주 뒤틀림과 번의 뒤틀림은 빔에 대하여 유효하다.
- 5) 미소 변형 및 선형탄성 한계 내에서 빔은 거동한다.

2.2 변위장 및 변형률

본 연구에서는 그림 1과 같이 상호 연관된 두 개의 좌표계가 사용되어 진다. 먼저 보의 단면이 y 축과 z 축으로 이루어져 있으며, x 축이 빔의 길이 방향인 (x, y, z) 직교좌표계이다. 또한 중간면에 접선방향으로 형성되어 지는 s 좌표계와 중간면에 수직방향으로 형성되는 n 좌표계를 사용하는 (x, s, n) 국부좌표계이며 이들 좌표계는 상호 연관되어 있다.

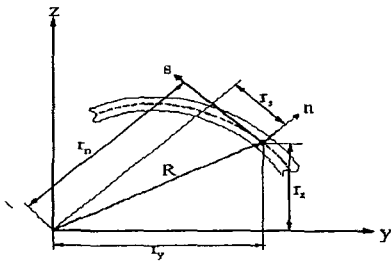


그림1. 직각좌표계 및 국부좌표계

이러한 두 개의 상호 연관된 좌표계와 가정 1) 과 2)를 이용하여 다음과 같은 일반적인 변위장을 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z) &= u_0(x) \\ &- y \left[\Phi_y(x) + y \alpha_y(x) + y^2 \beta_y(x) \right] \\ &- z \left[\Phi_z(x) + z \alpha_z(x) + z^2 \beta_z(x) \right] \\ \bar{v}(x) &= v_0(x) \\ \bar{w}(x) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} 는 각각 x , y , z 방향의 변위이고, $u_0(x)$, $v_0(x)$, $w_0(x)$ 는 x , y , z 좌표의 강체변위를 나타낸다. 또한 $\Phi_y(x)$, $\Phi_z(x)$ 는 z , y 좌표에 대한 회전각

을 나타내고 α_y , α_z , β_y , β_z 는 각각 복합재료 빔의 자유단에서는 전단 응력이 작용하지 않는다는 경계조건에 의하여 결정되어 지며, 또한 주 뒤틀림과 번의 비틀림을 적용하면 다음과 같이 표현되어 진다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x) \\ &- y \left[\Phi_y(x) + (y \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} (\frac{y}{d_1 d_2})^2) (v_0'(x) - \Phi_y(x)) \right] \\ &- z \left[\Phi_z(x) + (z \frac{c_2 - c_1}{d_1 d_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} (\frac{z}{c_1 c_2})^2) (w_0'(x) - \Phi_z(x)) \right] \\ &- [\Psi_p(y, z) + \Psi_s(y, z)] \theta'(x) \\ \bar{v}(x) &= v_0(x) - z \theta(x) \\ \bar{w}(x) &= w_0(x) + y \theta(x) \end{aligned} \quad (2)$$

윗 식의 변위장을 전단면으로 확장하기 위하여 국부좌표계를 이용하여 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, s, n) &= u_0(x) - r_y \left[\Phi_y(x) + (r_y \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} (\frac{r_y}{d_1 d_2})^2) (v_0'(x) - \Phi_y(x)) \right] \\ &- r_z \left[\Phi_z(x) + (r_z \frac{c_2 - c_1}{d_1 d_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} (\frac{r_z}{c_1 c_2})^2) (w_0'(x) - \Phi_z(x)) \right] \\ &- [\Psi_p(s, n) + \Psi_s(s, n)] \theta'(x) \\ \bar{u}_s(x, s, n) &= v_0(x) \frac{d \bar{y}(s)}{ds} \\ &\quad + w_0(x) \frac{d \bar{y}(s)}{ds} \\ &\quad \theta(x) \left[r_n(s) \right. \\ &\quad \left. + n \left((\frac{d \bar{z}(s)}{ds})^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\frac{d \bar{y}(s)}{ds})^2) \right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(x, s, n) &= v_0(x) \frac{d \bar{z}(s)}{ds} \\ &\quad - w_0(x) \frac{d \bar{y}(s)}{ds} \theta(x) r_s(s) \end{aligned}$$

여기서 $r_s(s)$, $r_n(s)$, $r_y(s)$, $r_z(s)$ 는 각각 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\begin{aligned}
r_s(s) &= \bar{y}(s) \frac{d\bar{y}(s)}{ds} + \bar{z}(s) \frac{d\bar{z}(s)}{ds} \\
r_n(s) &= \bar{y}(s) \frac{d\bar{z}(s)}{ds} - \bar{z}(s) \frac{d\bar{y}(s)}{ds} \quad (4) \\
r_y(s) &= \bar{y}(s) + n \frac{d\bar{z}(s)}{ds} \\
r_z(s) &= \bar{z}(s) - n \frac{d\bar{y}(s)}{ds}
\end{aligned}$$

위의 변위장을 이용하여 변형율을 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
v_{xn} &= \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial x} \\
v_{xs} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x} \quad (5)
\end{aligned}$$

여기서 수직 방향의 빔의 성분과 수평방향의 뒤틀림 함수가 $\Psi = \Psi_p + \Psi_s$ 의 관계로 나타난다. 복합재료 빔에 대해서 두께가 증가함에 따라 변위 뒤틀림 함수의 효과가 증가하게 되므로 뒤틀림 함수를 무시하는 것은 잘못된 결과를 발생하게 된다.⁶⁾ 따라서 뒤틀림 함수의 효과를 유효하게 적용하기 위하여 다음의 뒤틀림 함수의 식을 적용하게 된다.

$$\begin{aligned}
\Psi(y, z) &= -yz + \frac{8a^2}{\mu\pi^3} \\
&\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{d}}{\cosh \frac{n\pi z}{2\xi}} \\
&\sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi y}{d} \quad (6)
\end{aligned}$$

2.3 응력 변형을 관계

직교 이방성을 갖는 일반적인 복합재료의 k번째 적층 판은 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{nn} \\ \tau_{sn} \\ \tau_{nx} \\ \tau_{xs} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{nn} \\ v_{sn} \\ v_{nx} \\ v_{xs} \end{pmatrix} \quad (7)$$

\bar{Q}_{ij} 는 축소된 변형강성을 나타낸다.⁵⁾

여기서 응력 성분 σ_{nn} , σ_{ss} , τ_{sn} 은 면외응력 성분으로서 이외의 응력 성분에 비하여 무시할 만큼 작다. 그런데 그에 따르는 변형율 성분인 ε_{nn} , ε_{ss} , v_{sn} 은 빔의 두께

가 증가 함에 따라 무시할 수 없는 항이 된다. 따라서, ε_{nn} , ε_{ss} , v_{sn} 의 변형율 성분을 ε_{xx} , v_{xs} , v_{xn} 의 항으로 나타내면 다음과 같이 표현되어 진다.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ss} &= B_1 \varepsilon_{xx} + B_2 v_{xs} \\
\varepsilon_{nn} &= B_3 \varepsilon_{xx} + B_4 v_{xs} \quad (8)
\end{aligned}$$

$$v_{sn} = B_5 v_{xn}$$

여기서 B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 는 다음과 같이 나타내고,

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\bar{Q}_{13} \bar{Q}_{23} - \bar{Q}_{12} \bar{Q}_{33}}{\bar{Q}_{22} \bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2} \\
B_2 &= \frac{\bar{Q}_{23} \bar{Q}_{36} - \bar{Q}_{26} \bar{Q}_{33}}{\bar{Q}_{22} \bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2} \\
B_3 &= \frac{\bar{Q}_{12} \bar{Q}_{23} - \bar{Q}_{22} \bar{Q}_{13}}{\bar{Q}_{22} \bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2} \\
B_4 &= \frac{\bar{Q}_{26} \bar{Q}_{23} - \bar{Q}_{22} \bar{Q}_{36}}{\bar{Q}_{22} \bar{Q}_{33} - \bar{Q}_{23}^2} \\
B_5 &= -\frac{\bar{Q}_{45}}{\bar{Q}_{44}} \quad (9)
\end{aligned}$$

k번째 적층에 대한 3차원 탄성 효과를 가지는 축소된 구성방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xs} \\ \tau_{nx} \end{pmatrix}_k \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ v_{xs} \\ v_{nx} \end{pmatrix}_k \quad (10)$$

응력 변형을 관계를 응력 변위 관계에 치환시키고 직교 좌표계를 국부좌표계에 따라 적분을 실시하면 다음과 같은 평형방정식이 표현되어 진다.

$$F(x) = \int_s \int_n \sigma_{xx} dn ds$$

$$V_y(x) = \int_s \int_n (\tau_{xs} \frac{d\bar{y}}{ds} + \tau_{xn} \frac{d\bar{z}}{ds}) dy dz$$

$$V_z(x) = \int_s \int_n (\tau_{xs} \frac{d\bar{z}}{ds} - \tau_{xn} \frac{d\bar{y}}{ds}) dy dz \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
T(x) &= \int_s \int_n [(r_y - \frac{\partial \Psi}{\partial r_z}) (\tau_{xs} \frac{d\bar{z}}{ds} - \tau_{xn} \frac{d\bar{y}}{ds}) \\
&- (r_z + \frac{\partial \Psi}{\partial r_y}) (\tau_{xs} \frac{d\bar{y}}{ds} - \tau_{xn} \frac{d\bar{z}}{ds})] dn ds \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \int_s \int_n \Psi \sigma_{xx} dn ds
\end{aligned}$$

$$M_y(x) = - \int_s \int_n \sigma_{xx} r_z dn ds$$

$$M_z(x) = - \int_s \int_n \sigma_{xx} r_y dn ds$$

윗 식을 힘과 변위 관계로 나타내고 평형방정식을 적용하게 되면 다음의 지배 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{Bmatrix} F(x) \\ V_y(x) \\ V_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_0(x) \\ v'_0(x) - \Phi_y(x) \\ w'_0(x) - \Phi_z(x) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{54} & K_{55} & 0 \\ K_{64} & 0 & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(x) \\ \Phi'_y(x) \\ \Phi'_z(x) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

3. 결과 및 고찰

다음 그림 2, 3, 4는 125×65×6의 단면수치를 가지는 U-channel 복합재료 빔에 대하여, 각각 얇은 개단면 복합재료 빔 이론과 두꺼운 개단면 복합재료 빔 이론을 적용하여, 두께(t)에 따른 굽힘강성과 축방향 강성의 변화를 나타낸 것이다. 이때 복합재료는 $[0^\circ / 45^\circ / 90^\circ / -45^\circ]_n$ 의 적층순서를 가진다.

표 1. 재료의 기계적 물성치

Mechanical Properties Material	Modulus (GPa)	Shear Modulus (GPa)	Poisson's ratio
S-glass / Epoxy	43 (Longitudinal)	4.5 (In-plane)	0.27 (Major)
	8.9 (Transverse)		0.06 (Minor)

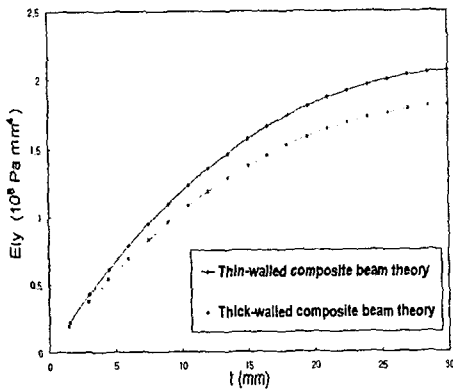


그림 2. 두께 증가에 따른 굽힘강성(EI_y)의 변화 비교

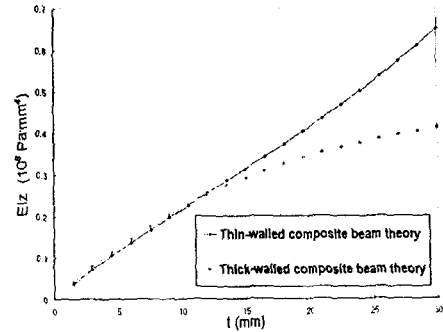


그림 3. 두께 증가에 따른 굽힘강성(EI_z)의 변화 비교

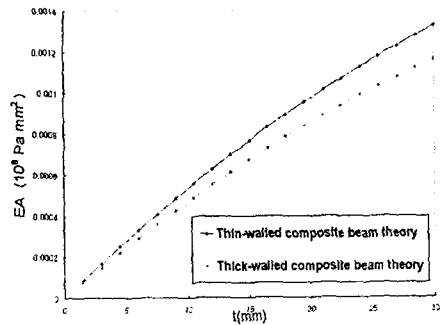


그림 4. 두께 증가에 따른 축방향 강성(EA)의 변화 비교

그림에서 보면, 축 방향으로의 강성 및 굽힘강성 모두에 대하여 두께가 얇은 경우(3mm이하), 얇은 개단면 복합재료 빔 이론과 두꺼운 개단면 복합재료 빔 이론을 이용한 강성은 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 두께가 증가함에 따라 두꺼운 개단면 복합재료 빔이론이 얇은 개단면 복합재료 빔이론의 경우보다, 비선형성이 증가함을 알 수 있다. 일반적으로 얇은 개단면 복합재료 빔 이론의 경우, 계산과정이 간단하지만 면의 응력 성분에 따른 변형율을 무시함으로써, 그림에서와 같이 복합재료 빔의 두께가 증가할수록 얇은 복합재료 개단면 빔 이론과 두꺼운 복합재료 빔 이론에 의한 강성의 차이가 현저하게 나타나는 것을 볼 수 있다. 차후, 보완된 비틀림 함수를 적용하여, 전단 변형 효과를 고려한 두꺼운 복합재료 빔 이론을 적용하면, 더욱 정확한 복합재료 빔의 굽힘강성 및 축방향 강성을 예측할 수 있을 것이다.

4. 결 론

$[0^\circ / 45^\circ / 90^\circ / -45^\circ]_{sn}$ 의 적층순서를 가지는 $125 \times 65 \times 6$ U-channel 복합재료 빔의 경우 두께가 3mm 이상일 경우, 얇은 개단면 복합재료 빔 이론에 의한 강성은 두꺼운 복합재료 빔이론에 의한 강성과 많은 차이가 있으며, 특히 두께가 증가 할 수록, 면외 응력 성분에 따른 변형율을 고려하고, 뒤틀림 변위함수가 지배적인 전단효과를 고려한 두꺼운 개단면 복합재료 빔 이론이 적용되어야 함을 알 수 있다.

후 기

본 연구는 차세대 프론티어 연구사업 차세대 소재성형 기술개발사업의 연구비 지원으로 이루어 졌습니다. 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

- (1) I. M. Daniel, Ori Ishai. Engineering mechanics of composite materials. Oxford University Press.1994
- (2) N. R. Bauld, L. S. Tzeng, A Valsov theory for fiber reinforced beams with thin walled open cross sections, Int. J. Solid struct., Vol 20, 1984, pp. 227-297
- (3) Song, O. Librescu, L., Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed section contour, J. Sound Vibration, Vol.167, No.1, 1993,pp.129-147
- (4) C. Kim, S.R. White, Thick-walled composite beam theory including 3-D elastic effects and torsional warping, Int. J. Solid struct., Vol 34, 1997, pp. 4237-4259
- (5) C. Kim, S.R. White, Analysis of thick hollow composite beams under general loading, Composite structures, Vol 34, 1996, pp.263-277