

# 유한요소 교호법을 이용한 임의의 형상을 갖는 삼차원 균열의 응력강도계수 비교

김태순 · 박재학 · 박치용\*

충북대학교 공과대학 안전공학과 · \*한국전력공사 전력연구원

## 1. 서 론

각종 산업설비에서 발견되는 균열의 대부분은 임의의 형상을 갖는 삼차원 균열이므로 설비의 건전성 평가를 위하여 삼차원 균열에서의 응력강도계수를 정확히 구하는 문제는 많은 사람들의 관심의 대상이 되어왔다. 현재 삼차원 균열에 대한 연구는 타원형 균열과 같은 일부 비교적 간단한 형태의 균열에 대해서는 많은 결과가 발표된 바 있으나, 일반적인 형태의 균열에 대해서는 아직 연구가 미비한 실정이다. 따라서, 이러한 일반적인 형태의 삼차원 균열에 대한 해석의 필요성이 제기되어 왔다.

최근의 연구로는 Wiles와 Curran<sup>1)</sup>에 의해 변위의 불연속(displacement discontinuity)을 이용하는 방법과 Murakami 등<sup>2)</sup>에 의한 체적력법(body force method)를 사용하는 해석방법이 제안되었다. 그러나, 이러한 균열의 해석이 어려운 것은 각 균열요소에 대한 적분방정식의 커널이 갖는 특이성으로 인해 적분을 수행하는 것이 쉽지 않기 때문이다. 그래서 Forth와 Keat<sup>3)</sup>는 이러한 특이성을 제거할 수 있는 방법으로 경계적분법(boundary integral method)을 제시하였으며, Li와 Mear 등<sup>4)</sup>은 변위의 불연속에 대한 감소된 특이성을 갖는 대칭형의 적분방정식을 이용하여 여러 형태의 삼차원 균열에 대하여 정확한 응력강도계수를 구하는 방법을 제안하였다.

이외에도 유한요소 교호법을 이용하여 다양한 형상을 갖는 삼차원 균열을 해석하려는 시도도 진행되었는데, Nishioka와 Atluri<sup>5)</sup>에 의하여 타원형의 표면균열 또는 모서리 균열 등을 해석하는 방법이 제안되었다. 또한 박재학 등<sup>6)</sup>은 Forth와 Keat<sup>3)</sup>의 해를 유한요소 교호법에 적용하여 일반적인 삼차원 균열을 해석할 수 있는 방법을 제시하였다. 하지만 이러한 적용방법은 일부 표면 균열의 경우에 해의 정확성이 균열메쉬에 따라 변하는 경향을 보였다. 본 논문에서는 Li와 Mear 등이 제시한 변위의 불연속에 대한 감소된 특이성을 갖는 대칭형의 적분방정식의 균열해를 유한요소 교호법에 적용하여 임의의 삼차원 균열을 해석할 수 있는 방법을 제시하려고 한다.

## 2. 삼차원 균열의 해석해

### 2.1 지배방정식

무한 물체 내에 임의 형태의 평면 또는 비평면 삼차원 균열이 Fig. 1에서와 같이 존재하고, 균열면 상에는 임의의 표면력(traction)이 작용한다고 하자. 이때 균열은 두 개

의 균열면  $S_+$ 와  $S_-$ 에서의 변위의 불연속의 연속된 분포로 나타낼 수 있다. Li와 Mear 등(4)은 균열에 대하여 다음 식과 같은 낮은 특이성(weak singularity)을 갖는 경계적분 방정식(boundary integral equation)이 만족됨을 보였다.

$$-\int_S \int_S D_\alpha u_i^*(z) C_{\alpha\beta\gamma}(\xi-z) D_\beta u_\gamma(\xi) dS(\xi) dS(z) = \int_S u_k^*(z) t_k dS(z) \quad (1)$$

여기서  $u_i$ 는 균열면에서의 변위 불연속의 성분,  $u_i^*$ 는 시험함수(test function)의 성분,  $t_k$ 는 균열면  $S$ 에 작용되는 표면력 성분이다. 또한,

$$C_{\alpha\beta\gamma}(\xi) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-\nu)\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + 2\nu\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha} - \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - \frac{\xi_i\xi_j}{r^2}\delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2)$$

이다. 여기서  $\xi = \xi - z$ ,  $r^2(\xi) = \xi_i\xi_i$ ,  $\mu$ 는 전단탄성계수,  $\nu$ 는 푸아송비이고,  $D_\alpha$ 는 접선 연산자(tangential operator)이다.

## 2.2 균열요소 적분

균열면을 몇 개의 경계요소로 나누고 요소 내에서의 변위 및 표면력은 다음 식과 같이 절점들에서의 값과 형상함수로 나타낼 수 있다고 한다.

$$u_i = N_\alpha u_{i\alpha}, \quad f_i = N_\alpha f_{i\alpha}. \quad (3)$$

여기서 아래첨자  $i$ 와  $\alpha$ 는 각각 전체좌표계와 요소 내 절점번호를 나타내고,  $u_{i\alpha}$ 와  $f_{i\alpha}$ 는 각각 이들 절점에서의 변위와 표면력 값이다. 시험함수로 형상함수를 사용하고 식(4)를 이용하면 식(1)은 다음과 같이 이중적분의 형태로 된다.

$$-\int_S \int_S C_{\alpha\beta\gamma} D_\alpha N_\alpha(z) D_\beta N_\beta(\xi) dS(\xi) dS(z) u_{j\beta} = \int_S N_\alpha N_\alpha(z) dS(z) t_{i\alpha} \quad (4)$$

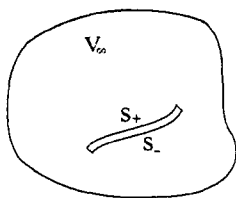


Fig. 1. Crack as displacement discontinuity.

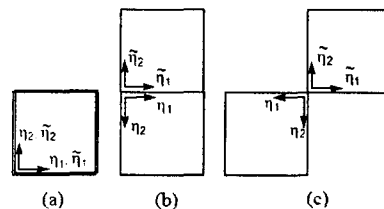


Fig. 2. Singular cases for boundary elements

식(5)를 사용하여 각 균열 절점에서의 변위의 불연속을 구한 후, 이들 값과 응력강도 계수의 관계로부터 각 모드에서의 응력강도계수를 계산한다. 그런데, 식(4)의 풀이를 위해서는 이중적분을 계산하여야 하므로, 적분은 각 균열요소  $S_m$ 과  $S_n$ 에 대하여  $S_m$ 에 대하여 적분한 후 다시  $S_n$ 에 대하여 적분할 필요가 있다. 이때 Fig. 2의 (a)에서와 같이  $S_m$ 과  $S_n$ 이 서로 동일한 요소이거나, (b)와 같이 서로 요소의 에지를 맞대고 있거나, (c)와 같이 요소의 모서리를 맞대고 있는 경우는 피적분 함수에 특이성이 나타나므로 적분에 어려움이 있다. 이러한 적분의 어려움은 적절한 좌표변환을 통하여 해결할 수 있음이 최근 밝혀졌다.<sup>8)</sup>

### 2.3 유한요소 교호법

일반적으로 유한요소법은 다양한 경우의 경계조건을 수용할 수 있으므로 탄성 또는 탄소성 문제를 해석하는 데 널리 사용되고 있고, 대칭 Galerkin 경계요소법은 무한 물체 내에 존재하는 임의 형태의 삼차원 균열에 대한 모델링에 아주 적합한 방법이다. 따라서 유한요소 교호법에서는 균열에 대한 모델링에는 대칭 Galerkin 경계요소법을, 균열을 포함하지 않는 유한요소모델에는 유한요소법을 사용하여 해를 구하게 된다.<sup>7)</sup> 결국 두 모델을 Fig. 3에서와 같이 중첩함으로써 균열을 포함한 유한물체에 대한 해를 구하는 방법으로 유한요소교호법의 해석단계는 참고문헌 7에 기술되어 있다.

## 3. 문제해석 및 고찰

유한요소 교호법의 정확성과 효율성을 검토하기 위하여 몇 가지 문제를 해석하였다. 우선 무한영역에 Fig. 4의 (a)와 같은 반원형 표면균열이 존재할 때의 응력강도계수를 기존 해와 비교하여 그 결과를 Fig. 4에 나타내었다. 그리고 같은 균열이 유한영역에 존재할 때의 응력강도계수를 기존 해와 비교하여 그 결과를 Fig. 5에 나타내었다. 결과에서 알 수 있듯이 균열선단에서 기존의 해와 잘 일치함을 알 수 있다. 또한, 이들 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 균열 요소의 수가 작은 경우에도 해석결과는 그다지 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

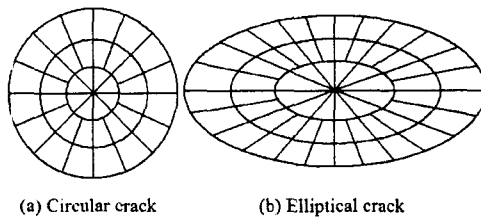


Fig. 3 Crack meshes for three dimensional crack analysis

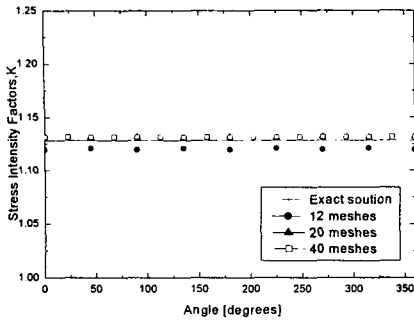


Fig. 4 Stress intensity factors for a circular crack in an infinite body

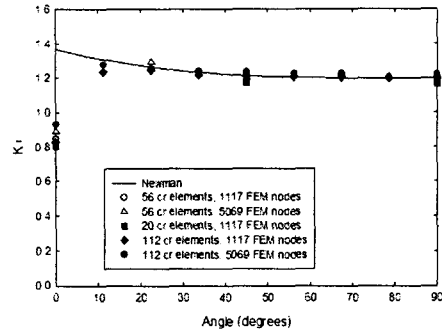


Fig. 5 Stress intensity factors in a circular surface crack in a finite body

### 3.1 무한영역에서의 삼차원 균열

본 논문에서 제안한 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용한 유한요소 교호법의 유용성을 검증하기 위하여 기존의 해석결과와 비교할 수 있는 문제들을 예로 들었다. 그 첫 번째로 우선, 무한체 내에 존재하는 타원형 균열의 해를 구하여 기존 해와 비교하였다. 타원의 장축의 길이를  $2a$ , 단축의 길이를  $2b$ 라 할 때, 장축의 길이와 단축의 길이의 비  $a/b$ 는 0.5, 1.0, 2.0으로 하였다.

해석을 위하여 사용된 균열요소는 Fig. 4의 (b)와 같이 균열요소의 모서리가 균열의 중심에 집중된 형태로, 균열면에 인접하는 균열요소의 모서리는 원형균열과는 다르게 균열선단에 수직하게 접하지는 않는다. 타원형 중심균열의 균열선단에서의 해를 정규화된 최대 응력강도계수로 표시하여 그 변화를 도시하면 Fig. 6과와 같다. 엄밀해와 비교한 결과, 논문에서 제안한 대칭 Galerkin 경계요소법을 이용한 방법의 결과가 기존의 결과와 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 다음으로 직사각형 균열에 대한 해석을 행하여 기존 해석과 비교하였다. 균열의 형태와 해석결과는 Fig. 7에 도시되어 있으며, 직사각형 균열의 해석에서도 기존의 해석 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.<sup>7)</sup>

### 3.2 유한영역에서의 삼차원 균열

유한체에 자유표면과 인접하여 존재하는 반타원 표면균열의 해를 구하여 기존 해와 비교하였다. 두께가  $h$ 인 유한체에 존재하는 타원의 단축의 길이의  $1/2$ 인  $b$ 는 표면에서부터의 균열의 깊이와 같으며, 장축의 길이와 단축의 길이의 비는 0.6으로 하였다. 해석을 위하여 사용된 균열요소는 무한체의 경우와 같다. 반타원 표면균열의 해를 두께에 대한 균열깊이의 비를 나타내는  $b/h$ 에 따른 정규화된 최대 응력강도계수로 표시하여 그 변화를 도시하면 Fig. 8과와 같다. 비교를 위해 같이 나타낸 한 Smith와 Sorensen의 결과보다는 크고, Isida 등의 결과나 박재학 등<sup>6)</sup>의 결과보다는 약간 작은 값을 보이고 있다.

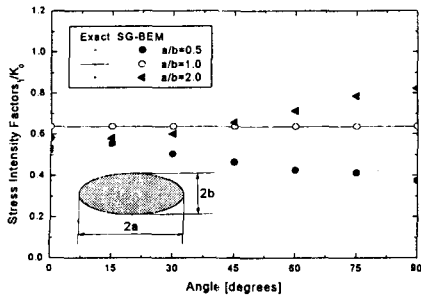


Fig. 6 Stress intensity factors for an elliptical crack

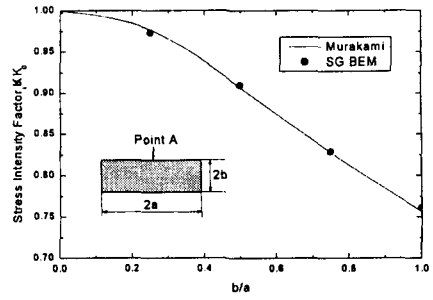


Fig. 7 Stress intensity factors for a rectangular crack

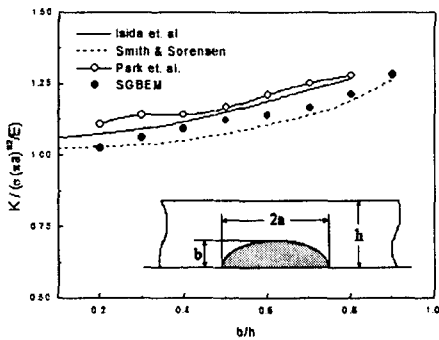


Fig. 8 Variation of normalized stress intensity factors for semi-elliptical surface cracks

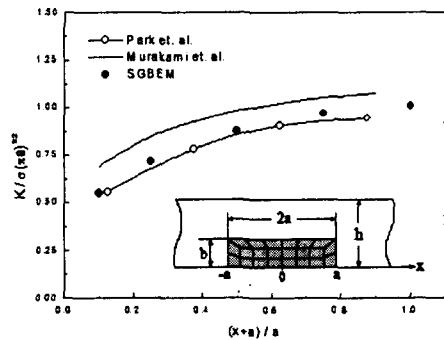


Fig. 9 Variation of normalized stress intensity factors for a rectangle surface crack

다음으로 직사각형 표면균열에 대한 해석을 행하여 기존 해석과 비교하였다. 균열의 형태와 해석결과는 Fig. 8에 도시되어 있듯이 두께가  $h$ 인 유한체의 표면에 인접하여 존재하는 직사각형 표면균열의 해석에서도 반타원 표면균열의 경우처럼 전체 균열요소의 1/2만 물체의 내부에 놓이게 고려하였다. 해석결과는 균열의 중심에서  $x$ 방향으로 증가 또는 감소하는 비를 나타내는  $(x+a)/a$ 에 대한 정규화된 응력강도계수로 표시하여 Fig. 8에 나타냈다. 기존의 해석 결과들과 유사한 값이 얻어졌음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

유한요소 교호법을 이용하여 구조물이나 설비에서 나타나는 일반적인 형태의 삼차원 균열을 해석할 수 있는 방법을 제안하였다. 유한요소 교호법은 유한요소법과 경계요소법의 장점을 이용하는 것으로, 이 두 가지의 방법은 서로 완전하게 독립적이므로 시간적 경제적으로 매우 유리하게 균열의 해석을 수행할 수 있다. 본 논문에서 제안한 방법

의 효율성과 유용성을 검토하기 위하여 균열을 포함한 유한 또는 반무한체의 형상과 균열의 형상을 변화시켜가며 몇 가지 문제를 해석하여 기존의 해석결과와 비교하였다. 이를 통하여 제안된 균열해석 방법이 구조물이나 설비 내에 존재하는 균열을 해석하는데 효율적이고 유용한 방법으로 사용될 수 있음을 알 수 있었다.

## 감사의 글

본 연구는 한국과학재단(KOSEF) 산하 성균관대학교 산업설비 안전성 평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

## 참고문헌

- 1) T. D. Wiles, and J. H. Curran, "A general 3-D Displacement Discontinuity Method," Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Vol. 1, ed. 2 Balkema, A. A., Rotterdam, The Netherlands, pp. 103~111, 1982.
- 2) Y. Murakami, "Analysis of Stress Intensity Factors of Mode I, II and III for Inclined Surface Cracks of Arbitrary Shape," Engng Frac. Mech., Vol. 22, pp. 101~114, 1985.
- 3) S. C. Forth and W. D. Keat, "Three-dimensional Nonplanar Fracture Model Using the Surface Integral Method," Int. J. Fracture, Vol. 77, pp. 243~262, 1996.
- 4) S. Li and M. E. Mear, "Singularity-reduced Integral Equations for Displacement Discontinuities in Three Dimensional Linear Elastic Media," Int. J. Fract., Vol. 93, pp. 87~114, 1998.
- 5) T. Nishioka and S. N. Atluri, "Analytical Solution for Embedded Elliptical Cracks and Finite Element Alternating Method for Elliptical Surface Cracks, Subjected to Arbitrary Loadings," Engng Frac. Mech., Vol. 17, pp. 247~268, 1983.
- 6) 박재학, 김태순, S. N. Atluri, "유한요소 교호법을 이용한 모드 I 하중 하의 삼차원 균열의 해석," 대한기계학회 논문집 (A), 제24권, 제4호, pp. 982~990, 2000.
- 7) G. P. Nikishkov, J. H. Park and S. N. Atluri, "SGBEM-FEM Alternating Method for Analyzing 3D Non-planar Cracks and Their Growth in Structural Components," Computer Modeling in Engng & Sci., Vol. 2, No. 3, pp. 401~422, 2001.
- 8) A. Frangi, G. Novati, R. Springhetti and M. Rovizzi, "Fracture Mechanics in 3D by the Symmetric Galerkin Boundary Element Method," VIII Conf. on Numerical Methods in Continuum Mechanics, Liptovsky Jan, Slovak Republik, 2000.