반복 그린함수 방법을 이용한 평행도파관 H평면 T접합의 전자파 해석

Iterative Green's function analysis of an H-plane T-junction in a parallel-plate waveguide

조 용 희
목원대학교 정보통신전파공학부

Cho Yong-Heui
Division of Information Communication & Radio Engineering, Mokwon University

요약

평행도파관 H평면 T접합에 대한 전자파 산란해를 이론적으로 구한다. 반복법과 그린함수 관계식을 이용하여 E_z 에 대한 반복 방정식을 얻는다. 이 반복 방정식은 행렬로 표현될 수 있다. 반사 전력과 투과 전력에 대한 산란특성을 제시하고 다른 결과들과 비교한다.

Abstract

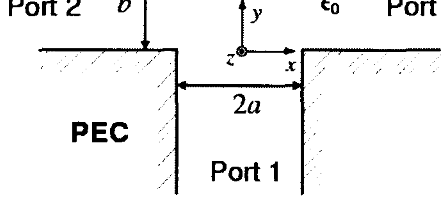
Scattering solutions of an H-plane T-junction in a parallel-plate waveguide are theoretically investigated. The iterative procedure and Green's function relation are used to obtain the iterative equations for the E_z field modal coefficients, thus resulting in matrix solutions. The scattering characteristics of reflection and transmission powers are presented and compared with other existing results.

I. 서론

도파관(waveguide) T접합은 결합기(coupler), 여파기(filter), 다중화기(multiplexer), 전력분배기(power divider)와 같은 부품을 구성하는 기본소자이다[1-4]. [4]에서는 T접합이 다중 개구 결합기(multi-aperture coupler)의 중요한 구성소자로 사용되었다. H평면 T접합에 대한 엄밀한 급수해가 푸리에 변환(Fourier transform)과 유수정리(residue theorem)를 이용해 얻어졌다[3]. 본 논문에서는 [5, 6]에 사용된 방법과 동일한 기법을 H평면 T접합에 적용한다. 반복법(iterative procedure)과 그린함수(Green's function)를 이용하여 H평면 T접합에 대한 엄밀하면서도 간단한 산란해(scattering solution)를 구한다. 반복 그린함수 방법으로 얻어진 산란해는 푸리에 변환 방법[3], 모드정합법(mode-matching method)[4]에서 얻어진 해와는 다르다. 또한, 반복법[7, 8]이 도파관(waveguide)과 공진기(cavity) 문제에도 적용되었다.

II. 필드(field) 해석

평행판 도파관(parallel-plate waveguide)에 구성된 H평면 T접합의 구조는 그림 1에 있다. 도파관 접합을 향해 포트(port) 1과 2에서 TE(Transverse Electric) 파가 입사한다.



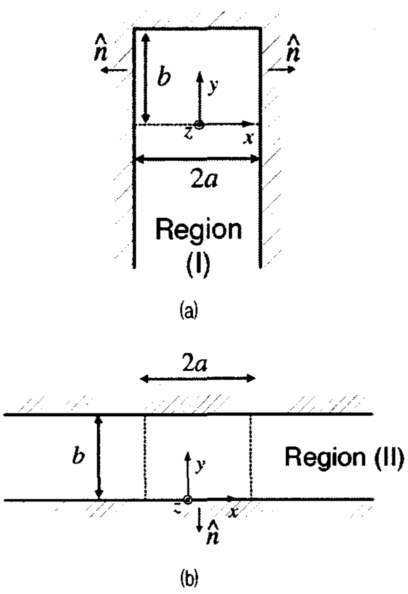
▶▶ 그림 1. H평면 T접합의 구조

$e^{-i\omega t}$ 시간요소는 생략한다. 영역 (I)($-a<x<a$, $y<b$)과 (II)($0<y<b$)에서 입사하는 E_z 파를

표현하면

$$E_0^I(x,y) = I_s^0 \sin a_s(x+a)[e^{i\xi_s y} - e^{i\xi_s(2b-y)}] \quad (1)$$
$$E_0^{II}(x,y) = J_s^{-0} \sin(b_s y) e^{i\zeta_s(x+a)} \quad (2)$$

여기서 $a_s = s\pi/(2a)$, $\xi_s = \sqrt{k_0^2 - a_s^2}$, $b_s = s\pi/b$, $\zeta_s = \sqrt{k_0^2 - b_s^2}$, $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. I_s^0 와 J_s^{-0} 는 포트 1과 2에서 입사하는 E_z 파의 모드(mode) 계수이다. 그림 1의 구조는 그림 2(a)와 2(b) 구조들의 선형 중첩(superposition)이라고 생각할 수 있다. 반복법에서는 $E^I_{n-1}(x,y)$ 파동이 $E^{II}_n(x,y)$ 파를 생성하고 $E^{II}_n(x,y)$ 파동이 $E^I_n(x,y)$ 파를 생성한다. 이런 과정을 연속적으로 반복하면 H평면 T접합에 대한 산란해를 얻을 수 있다. 위에서 소개한 반복법을 이용해 전체 파동(total fields)을 표현하면



(a)

(b)

▶▶ 그림 2. T접합의 세부영역들

$$E_z^I(x,y) = E_0^I(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^I(x,y) \quad (3)$$
$$E_z^{II}(x,y) = E_0^{II}(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^{II}(x,y) \quad (4)$$

[9]에서 주어진 그린함수를 이용하면

$$\begin{aligned} E_n^{II}(x,y) &= i\omega \bar{A}\Big|_{z\ \text{component}} \\ &= -i\omega\mu_0 \int \bar{J}(r') G_{II}(r,r')\, dr'\Big|_{z\ \text{component}} \\ &= -\int \frac{\partial}{\partial n'}\Big[E_{n-1}^I(r')\Big] G_{II}(r,r')\, dr' \quad (5) \end{aligned}$$
$$E_n^I(x,y) = -\int \frac{\partial}{\partial n'}\Big[E_n^{II}(r')\Big] G_I(r,r')\, dr' \quad (6)$$
$$\bar{J}(r') = \begin{cases} H_y(r')\hat{a}_y \times \hat{n} & \text{for } G_{II}(r,r') \\ H_x(r')\hat{a}_x \times \hat{n} & \text{for } G_I(r,r') \end{cases} \quad (7)$$

여기서 $\bar{A}$ 는 자기 벡터 포텐셜(magnetic vector potential), n 은 그림 2에서 외부로 향하는 방향,

$$\begin{aligned} G_I(r,r') &= \frac{1}{a}\sum_{m=1}^{\infty} \sin a_m(x+a)\sin a_m(x'+a) \\ &\times \frac{e^{-i\xi_m y_<} \sin \xi_m(y_> - b)}{-\xi_m e^{-i\xi_m b}} \quad (8) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} G_{II}(r,r') &= \frac{2}{b}\sum_{m=1}^{\infty} \sin(b_m y)\sin(b_m y') \\ &\times \frac{e^{i\zeta_m|x-x'|}}{-2i\zeta_m} \quad (9) \end{aligned}$$

H_x , H_y 에 대한 불연속(discontinuity)을 없애기 위하여 반복법을 활용한다. 즉,

$$\begin{aligned} E_n^I(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin a_m(x+a) \\ &\times \Big[e^{i\xi_m|y|} - e^{i\xi_m(2b-y)}\Big] I_m^n \quad (10) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} E_n^{II}(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin(b_m y) \\ &\times \Big[e^{i\zeta_m|x+a|} J_m^{-n} - e^{i\zeta_m|x-a|} J_m^{+n}\Big] \quad (11) \end{aligned}$$

여기서 $n = 1, 2, \cdots$,

$$
\begin{aligned}
I_m^n &= \frac{i}{2\xi_m a}\int_{-a}^{a} \sin a_m(x'+a)\frac{\partial}{\partial y'}E_n^{II}(x',0)\,dx' \\
&= \frac{i a_m}{2\xi_m a}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{b_v\left[(-1)^m e^{i2\zeta_v a}-1\right]}{\zeta_v^2-a_m^2} \\
&\times \left[J_v^{-n}+(-1)^m J_v^{+n}\right] \qquad (12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_m^{\pm n} &= \frac{i}{\zeta_m b}\int_{0}^{b} \sin(b_m y')\frac{\partial}{\partial x'}E_{n-1}^{I}(\pm a,y')\,dy' \\
&= \frac{i b_m}{\zeta_m b}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{(\mp 1)^v a_v(e^{i2\xi_v b}-1)}{\xi_v^2-b_m^2}I_v^{n-1} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

(12)와 (13)에 행렬 대수(matrix algebra)를 도입하면

$$
\begin{aligned}
\left[I_m^n\right] &= \left[A_{mv}\right]\left[J_v^{-n}\right]+\left[(-1)^m A_{mv}\right]\left[J_v^{+n}\right] \qquad (14) \\
\left[J_m^{\pm n}\right] &= \left[(\mp 1)^v B_{mv}\right]\left[I_v^{n-1}\right] \qquad (15)
\end{aligned}
$$

여기서

$$
\begin{aligned}
A_{mv} &= \frac{i a_m b_v\left[(-1)^m e^{i2\zeta_v a}-1\right]}{2\xi_m a(\zeta_v^2-a_m^2)} \qquad (16) \\
B_{mv} &= \frac{i b_m a_v(e^{i2\xi_v b}-1)}{\zeta_m b(\xi_v^2-b_m^2)} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

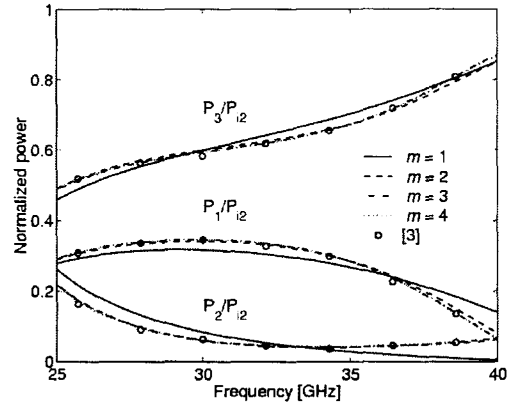
$[I_m^n]$ 과 $[J_m^{\pm n}]$ 에 대한 연립방정식을 풀면

$$
\begin{aligned}
\left[I_m\right] &= \left\{\mathbf{I}-\left[C_{ml}\right]\right\}^{-1} \\
&\cdot \left\{\left[C_{ml}\right]\left[I_l^0\right]+\left[A_{ml}\right]\left[J_l^{-0}\right]\right\} \qquad (18) \\
\left[J_m^{\pm}\right] &= \left[(\mp 1)^v B_{ml}\right]\left\{\mathbf{I}-\left[C_{ml}\right]\right\}^{-1} \\
&\cdot \left\{\left[I_l^0\right]+\left[A_{ml}\right]\left[J_l^{-0}\right]\right\} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

여기서 $I_m=\sum_{n=1}^{\infty} I_m^n$, $J_m^{\pm}=\sum_{n=1}^{\infty} J_m^{\pm n}$, I는 단위행렬(unit matrix),

$$
C_{ml} = \left[1+(-1)^{m+l}\right]\sum_{v=1}^{\infty} A_{mv}B_{vl} \qquad (20)
$$

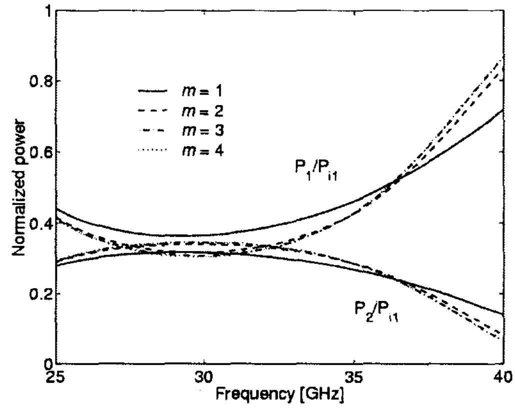
III. 수치 해석



▶▶ 그림 3. 정규화된 반사전력과 투과전력에 대한 주파수 특성

($I_1^0=0$, $J_1^{-0}=1$, $a=3.5mm$, $b=7mm$)

그림 3은 포트 2로 전자파가 입사하는 경우에 대한 H평면 T접합의 산란 특성을 보여준다. $m\geq 2$ 인 경우, 본 논문에서 제안하는 산란해가 [3]의 결과와 잘 맞는다는 것을 알 수 있다.



▶▶ 그림 4. 정규화된 반사전력과 투과전력에 대한 주파수 특성

($I_1^0=1$, $J_1^{-0}=0$, $a=3.5mm$, $b=7mm$)

포트 1으로 입사하는 전자파의 산란해는 그림 4에 제시되어 있다. 그림 4는 본 논문에서 제시된 산란해가 수렴이 빠르고 수치해석적으로 효율적이라는 것을 보여준다.

▌참고문헌▌

[1] F. Arndt, I. Ahrens, U. Papziner, U. Wiechmann, and R. Wilkeit, "Optimized E-plane T-junction series power dividers," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 35, no. 11, pp. 1052-1059, Nov. 1987.

[2] X. P. Liang, K. A. Zaki, and A. E. Atia, "A rigorous three plane mode-matching technique for characterizing waveguide T-junction and its application in multiplexer design," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 39, no. 12, pp. 2138-2147, Dec. 1991.

[3] K. H. Park and H. J. Eom, "An analytic series solution for H-plane waveguide T-junction," IEEE Microwave Guided Wave Lett., vol. 3, no. 4, pp. 104-106, April 1993.

[4] T. Sieverding, U. Papziner, and F. Arndt, "Mode-matching CAD of rectangular or circular multiaperture narrow-wall couplers," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 45, no. 7, pp. 1034-1040, July 1997.

[5] Y. H. Cho, "New iterative equations for E-plane T-junction in parallel-plate waveguide using Green's function," *Microwave Optical Tech. Lett.*, vol. 37, no. 6, pp. 447-449, June 2003.

[6] 조용희, "전파 교육에 적용할 수 있는 반복 그린함수 방법을 이용한 전자파 도파관 구조의 새로운 해석법," 한국콘텐츠학회 2003 춘계 종합학술대회 논문집, vol. 1, no. 1, pp. 403-405, 2003년 5월.

[7] M. F. Iskander and M. A. K. Hamid, "Iterative solutions of waveguide discontinuity problems," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 25, no. 9, pp.763-768, Sept. 1977.

[8] J. L. Rodriguez, L. F. Obelleiro, and A. G. Pino, "Iterative solutions of MFIE for computing electromagnetic scattering of large open-ended cavities," IEE Proc.-Microw. Antennas Propag., vol. 144, no. 2, pp.141-144, April 1997.

[9] Y. H. Cho and H. J. Eom, "Analysis of a ridge waveguide using overlapping T-blocks," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 50, no. 10, pp.2368-2373, Oct. 2002.