

# 스타(Star) 그래프와 팬케익(Pancake) 그래프간의 임베딩

민준식<sup>o</sup>, 이형욱<sup>\*</sup>

o 경동대학교,

\* 순천대학교 컴퓨터교육과

jsmin@k1.ac.kr<sup>o</sup>, oklee@sunchon.ac.kr

## 요약

스타 그래프와 팬케익 그래프는 하이퍼큐브가 갖는 좋은 성질을 가지면서 하이퍼큐브 보다 망 비용이 적은 값을 갖는 상호연결망이다. 본 논문에서는 그래프의 에지 정의를 이용하여 스타 그래프  $S_n$ 은 팬케익 그래프  $P_n$ 에 연장을 4, 확장을 1에 임베딩 가능함을 보인다.

## 1. 서론

오늘날 과학과 공학 분야의 문제들은 많은 계산을 필요로 하므로 기존의 컴퓨터보다 더욱 빠른 계산 능력을 가지는 병렬컴퓨터를 요구하게 되었다. 병렬 컴퓨터의 다중컴퓨터시스템은 지역 메모리를 갖는 각 프로세서와 프로세서를 연결하는 상호연결망으로 되어 있으며, 프로세서간의 메시지 전송은 상호 연결망을 통한 메시지 전송(message passing)에 의해 이루어지고 계산은 데이터 구동(data driven) 방식을 취한다[2]. 따라서 효율적인 상호연결망의 설계와 메시지 전달 알고리즘이 전체 시스템의 성능에 직접적인 영향을 미친다. 상호연결망을 평가하는 망 척도는 분지수, 지름, 대칭성, 확장성, 고장 허용도, 방송 및 임베딩 등이 있다[3,5,7].

임베딩(embedding)은 상호연결망  $G$ 의 프로세서와 통신링크를 다른 연결망  $H$ 의 프로세서와 통신링크들로 사상하는 것으로서 상호연결망  $G$ 에서 개발된 알고리즘을 상호연결망  $H$ 에서 효율적으로 실행시킬 수 있는지를 연구하는 분야중의 하나이다. 임베딩의 평가 척도는 연장을(dilation), 밀집을(congestion), 확장을(expansion) 등이 있다[6,7].

본 논문에서는 Cayley 그래프로 널리 알려진 스타(star) 그래프[1,2,5]와 팬케익(pancake) 그래프[1,3,4]가 동일한 노드 개수를 가질 때, 두 그래프의 에지 정의를 이용하여 상호간의 임베딩을 분석한다. 연구의 주요 결과는 스타 그래프를 팬케익 그래프에 연장을 4, 확장을 1에 사상 가능하다. 이러한 결과는 스타 그래프에서 이미 개발된 알고리즘을 팬케익 그래프에서도 활용 가능함을 의미한다. 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 이미

제안된 그래프의 정의와 특징을 살펴보고, 3장에서는 스타 그래프와 팬케익 그래프 사이의 임베딩을 분석하고 결론을 맺는다.

## 2. 관련 연구

상호 연결망은 각 프로세서를 노드로 프로세서들 간의 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프  $G=(V,E)$ 로 표현된다[5]. 여기서  $V(G)$ 는 노드들의 집합 즉  $V(G)=(0,1,2,\dots,N-1)$ 이고,  $E(G)$ 는 에지의 집합으로써  $V(G)$  내의 임의의 두 노드  $v$ 와  $w$ 의 쌍  $(v,w)$ 으로서 에지  $(v,w)$ 가 존재할 필요충분 조건은 노드  $v$ 와  $w$  사이에 통신 채널이 존재하는 것이다. 지금까지 제안된 상호연결망을 노드 수를 중심으로 분류하면  $n \times k$ 개 노드를 갖는 메쉬 부류,  $2^n$ 개 노드를 갖는 하이퍼큐브 부류,  $n!$ 개 노드를 갖는 스타그래프 부류로 나눌 수 있다.

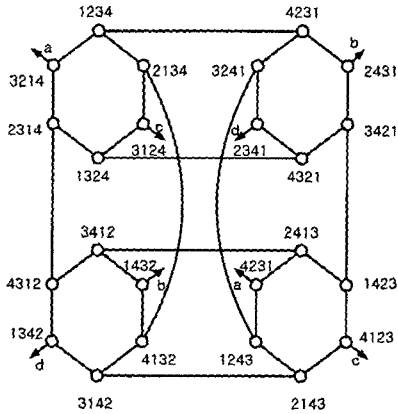
$n$ -차원 스타 그래프  $S_n$ 은  $n!$ 개의 노드와  $n!(n-1)/2$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는  $n$ 개의 서로 다른 심볼의 순열로 표현될 수 있고, 노드  $v$ 와  $w$ 의 비트 스트링에서 첫 번째 심볼과 나머지  $n-1$ 개 심볼 중 한 개의 심볼이 교환된 순열을 갖는 노드  $v$ 와  $w$  사이에 에지가 존재한다.  $n$ 개의 서로 다른 집합  $\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하고,  $\langle n \rangle$ 의 순열  $p = p_1 p_2 \dots p_n$ ,  $p_i \in \langle n \rangle$ 이라 하면 스타 그래프  $S_n$ 은 다음과 같이 정의된다[2].

$$V(S_n) = \{(p_1 p_2 \dots p_n) \mid p_i \in \langle n \rangle, i \neq j, p_i \neq p_j\}$$

$$E(S_n) = \{(p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n)(p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n) \mid (p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n) \in V(S_n), 2 \leq i \leq n\}$$

스타 그래프는 재귀적 구조를 갖고 있으며, 노드 및 에지 대칭적이고, 최대 고장허용도를 갖고 이분 그래프(bipartite graph)이다. 스타 그래프  $S_n$ 의 지름은  $\lfloor 3(n-1)/2 \rfloor$  이고, 고장 지름은  $dia(S_n) + 2$  이

하이프로 스타 그래프  $S_n$ 은 strongly resilient를 갖는다. 스타 그래프  $S_n$ 은 해밀톤 싸이클을 포함할 뿐만 아니라 임의의 에지를 지나는 해밀톤 싸이클이 존재한다. 임베딩에 있어서는  $n \times (n-2)!$  메쉬를 스타 그래프  $S_n$ 에 연장을  $n-1$ , 확장율  $n-1$ 로 사상하고,  $n(n-1) \times (n-2)!$  메쉬 구조를 스타 그래프  $S_n$ 에 연장을  $2 \lfloor n/2 \rfloor + 1$ , 확장율을 1로 사상 가능함이 알려져 있다[5].

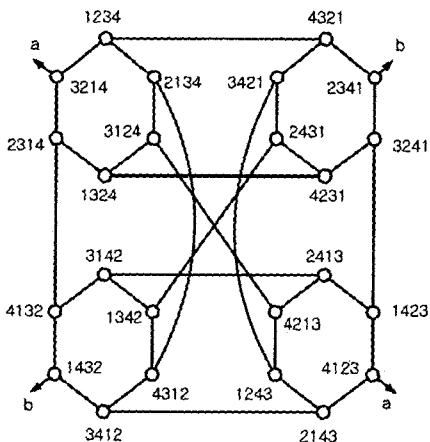


[그림 1] 4-차원 스타 그래프  $S_4$

팬케익 그래프는  $P_n$ 은  $n!$ 개의 노드와  $n!(n-1)/2$ 개의 에지로 구성되고 노드 대칭성을 갖는다.  $n$ 개의 서로 다른 집합  $\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$ 이라 하고,  $\langle n \rangle$ 의 순열  $p = p_1 p_2 \dots p_n$ ,  $p_i \in \langle n \rangle$ 이라 하면 팬케익 그래프  $P_n$ 은 다음과 같이 정의된다[1,5].

$$V(S_n) = \{(p_1 p_2 \dots p_n) \mid p_i \in \langle n \rangle, i \neq j, p_i \neq p_j\}$$

$$E(S_n) = \{(p_1 p_2 \dots p_i \dots p_j \dots p_n) (p_1 p_2 \dots p_i \dots p_j \dots p_n) \mid (p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n) \in V(P_n), 2 \leq i \leq n\}$$



[그림 2] 4-차원 팬케익 그래프

팬케익 그래프  $P_n$ 은 해밀톤 싸이클을 포함하지만, 4-차원 이상의 팬케익 그래프는 길이가 홀수인 싸이클이 존재하기 때문에 이분 그래프(bipartite graph)가 아님이 알려져 있고, 전위합 문제, 정렬(sorting)과 합병(merging) 알고리즘에 대한 연구 결과가 있다[5]. 또한 팬케익 그래프에서 지름[3], 병렬 라우팅과 정렬[4], 임베딩[5], 방송, 부하균등 문제 등이 발표되었다.

### 3. 임베딩

그래프의 임베딩은 어떤 그래프  $G$ 가 다른 그래프  $H$  구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해, 어떤 특정한 그래프를 다른 그래프에 사상(mapping)하는 것이다. 그래프  $G$ 의 그래프  $H$ 에 대한 임베딩  $f$ 는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍  $(\theta, \rho)$ 을 말한다.  $\theta$ 는  $G$ 의 정점 집합  $V(G)$ 를  $H$ 의 정점 집합  $V(H)$ 에 대응시키는 함수이고,  $\rho$ 는  $G$ 의 에지  $e=(u,w)$ 에서  $\theta(u)$ 와  $\theta(w)$ 를 잇는  $H$ 상의 경로로 대응시키는 함수이다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도는 연장을, 밀집율, 확장율이 사용되고 있다[6,7]. 그래프  $G$ 의 에지  $e$ 의 연장은  $H$ 에서의 경로  $\rho(e)$ 의 길이를 말하고, 임베딩  $f$ 의 연장은  $G$ 의 모든 에지의 연장을 중 최대값이다. 그래프  $H$ 의 에지  $e'$ 의 밀집율은  $e'$ 에 포함되는  $\rho(e)$ 의 개수를 말하고, 임베딩  $f$ 의 밀집율은  $H$ 의 모든 에지의 밀집율 중 최대 값이다. 임베딩  $f$ 의 확장율은  $G$ 의 정점의 개수에 대한  $H$ 의 정점의 개수의 비를 말한다.

본 연구에서는 스타 그래프  $S_n$ 와 팬케익 그래프  $P_n$  사이의 임베딩을 분석한다. 임베딩 방법은 스타 그래프  $S_n$ 과 팬케익 그래프  $P_n$ 의 그래프 정의를 이용하여 연장을 분석한다. 예를 들어 스타 그래프  $S_n$ 를 팬케익 그래프  $P_n$ 로 임베딩 할 경우, 스타 그래프  $S_n$ 의 한 에지  $(U,V)$ 에 의해 연결된 두 개 노드  $U, V$ 와 동일한 주소를 갖는 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $U'$  및  $V'$ 로 각각 사상할 때, 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $U'$ 에서 노드  $V'$ 까지 최단경로로 라우팅 하는데 필요한 팬케익 그래프  $P_n$ 의 에지 개수로서 연장을 나타낸다.

스타 그래프  $S_n$ 의 노드  $S(s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n)$ 에서 심볼  $s_1$ 과  $s_i$ 가 교환된 순열  $s_1 s_2 \dots s_i \dots s_n$ 을 연결하는 에지를  $i$ -차원 에지라 하고,  $C_i$ 로 표현한다( $2 \leq i \leq n$ ). 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $P(p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n)$ 에서 심볼  $p_i$ 부터 첫 번째 심볼  $p_1$ 까지 역순으로 생성된 순열  $p_i p_i \dots p_1 p_{i+1} \dots p_n$ 을 연결하는 에지를  $i$ -차원 에지라 하고,  $D_i$ 로 표현한다( $2 \leq i \leq n$ ). 스타 그래프  $S_n$

와 팬케익 그래프  $P_n$ 의 정의에 의해 노드를 표현하는 주소의 심볼  $p_i$ 와  $s_i$ 는  $n$ 개 심볼  $1, 2, \dots, n$ 중 하나이므로, 두 그래프의 노드는 동일한 주소를 갖는 노드로 일-대-일 사상 할 수 있음을 알 수 있다. 스타 그래프  $S_n$ 과 팬케익 그래프  $P_n$ 에서 임의의 노드  $U$ 에  $i$ -차원 에지  $C_i$ (또는  $D_i$ )를 적용하여 생성된 노드를  $V$ 라 하자. 이때  $V=C_i(U)$  또는  $V=D_i(U)$ 로 표현한다. 만약 노드  $U$ 에 스타 그래프의 차원 에지  $C_i, C_j, C_k$ 를 순차적으로 적용하여 생성된 노드는  $C_k(C_j(C_i(U)))$ 로 표현하고, 팬케익 그래프도 동일하게 적용한다.

**정리 1** 스타 그래프  $S_n$ 은 팬케익 그래프  $P_n$ 에 연장을 4, 확장율 1에 임베딩 가능하다.

**증명** 스타 그래프  $S_n$ 과 팬케익 그래프  $P_n$ 은 노드 대칭적인 성질을 갖고 있다. 스타 그래프  $S_n$ 의 노드  $S(s_1s_2\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_n)$ 를 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $P(p_1p_2\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n)$ 로 사상하고, 노드  $S$ 에서 에지  $C_i$ 에 의해 인접한  $n-1$ 개 노드를 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $P$ 에서 에지  $D_i$ 에 의해 라우팅 되는 노드로 사상한다. 스타 그래프  $S_n$ 의 노드  $S$ 에 연결된  $i$ -차원 에지  $C_i$ 에서  $i$ 의 범위에 따라 다음 경우로 나눈다.

경우1.  $i=2$  또는  $i=3$

스타 그래프  $S_n$ 의 노드  $S(s_1s_2s_3\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_n)$ 와 2-차원 에지에 의해 연결된 노드  $C_2(S)=s_2s_1s_3\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_n$ 이다. 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $P(p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n)$ 에서 2-차원 에지에 연결된 노드는  $D_2(P)=p_2p_1p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 이므로, 스타 그래프  $S_n$ 의 2-차원 에지와 팬케익 그래프  $P_n$ 의 2-차원 에지는 동일한 결과를 가짐을 알 수 있다. 스타 그래프  $S_n$ 의 노드  $S(s_1s_2s_3s_4\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_n)$ 와 3-차원 에지에 의해 연결된 노드는  $C_3(S)=s_3s_2s_1s_4\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_n$ 이다. 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $P(p_1p_2p_3p_4\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n)$ 에서 3-차원 에지에 연결된 노드는  $D_3(P)=p_3p_2p_1p_4\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 이므로, 스타 그래프  $S_n$ 의 3-차원 에지와 팬케익 그래프  $P_n$ 의 3-차원 에지는 동일한 결과를 가짐을 알 수 있다. 따라서 스타 그래프  $S_n$ 의 노드  $S(s_1s_2s_3\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_n)$ 와 2-차원 에지에 의해 연결된 노드  $C_2(S)$ 는 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $P(p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n)$ 와 노드  $D_2(P)$ 로 사상할 수 있고, 확장율은 1이다.

경우2.  $i=4$

스타 그래프  $S_n$ 의 노드  $S(s_1s_2s_3\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_n)$ 와 4-차원 에지에 의해 연결된 노드  $C_4(S)=s_4s_2s_3s_1\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_n$ 이다. 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $P(p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n)$ 에서 노드  $p_4p_2p_3p_1\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 는 서로 인접하지 않으므로 노드  $P(p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n)$ 에서 노드

$p_4p_2p_3p_1\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용할 차원 에지  $D_i$ 를 구한다.

노드  $P(p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n)$ 에서 4-차원 에지  $D_4$ 에 의해 인접한 노드  $D_4(P)=p_4p_3p_2p_1p_5\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 이고, 노드  $D_4(P)$ 에서 3-차원 에지  $D_3$ 에 인접한 노드  $D_3(D_4(P))=p_2p_3p_4p_1p_5\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 이다.

노드  $D_3(D_4(P))$ 에서 2-차원 에지에 의해 인접한 노드  $D_2(D_3(D_4(P)))=p_3p_2p_4p_1p_5\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 이고, 노드  $D_3(D_4(P))$ 에서 3-차원 에지에 의해 인접한 노드  $D_3(D_2(D_3(D_4(P))))=p_4p_2p_3p_1p_5\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 이다. 즉, 스타 그래프  $S_n$ 의 노드  $S$ 를 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $P$ 로 사상할 때, 노드  $S$ 와 4-차원 에지에 의해 연결된 노드  $C_4(S)$ 와 동일한 주소를 갖는 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드는 노드  $P$ 에서 차원 에지  $D_4, D_3, D_2, D_3$ 를 순차적으로 적용하여 생성된 노드임을 알 수 있고, 이때 적용한 팬케익 그래프  $P_n$ 의 차원 에지 개수가 4개이므로 확장율 4이다.

경우3.  $5 \leq i \leq n$

스타 그래프  $S_n$ 의 노드  $S(s_1s_2s_3\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_n)$ 와  $i$ -차원 에지에 의해 연결된 노드는  $s_1s_2s_3\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_n$ 이다. 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $P(p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n)$ 에서 노드  $p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 는 서로 인접하지 않으므로 노드  $P(p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n)$ 에서 노드  $p_4p_2p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 까지 라우팅을 위해 적용할 최단경로의 차원 에지  $D_i$ 를 구하고 그 결과를 이용하여 확장율이 4 이하임을 보인다.

노드  $P(p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n)$ 에서  $(i-1)$ -차원 에지에 의해 생성된 노드  $D_{i-1}(P)=p_{i-1}p_{i-2}p_{i-3}\dots p_2p_1p_{i+1}\dots p_n$ 이고, 노드  $D_{i-1}(P)$ 에 차원 에지  $(i-2)$ -차원 에지를 적용한 노드  $D_{i-2}(D_{i-1}(P))=p_2p_3\dots p_{i-3}p_{i-2}p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 이다. 노드  $D_{i-2}(D_{i-1}(P))$ 에  $(i-1)$ -차원 에지를 적용한

노드  $D_{i-1}(D_{i-2}(D_{i-1}(P)))=p_1p_{i-1}p_{i-2}p_{i-3}\dots p_3p_2p_{i+1}\dots p_n$ 이고, 노드  $D_{i-1}(D_{i-2}(D_{i-1}(P)))$ 에  $i$ -차원 에지를 적용한 노드

$D_i(D_{i-1}(D_{i-2}(D_{i-1}(P))))=p_1p_2p_3\dots p_{i-3}p_{i-2}p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 이다.  $i$ -차원 에지가 5 이상인 경우 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $P$ 에서 차원 에지  $D_{i-1}, D_{i-2}, D_{i-1}, D_i$ 를 순차적으로 적용하여 생성한 노드  $p_1p_2p_3\dots p_{i-3}p_{i-2}p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n$ 는 스타 그래프  $S_n$ 의 노드  $S$ 와  $i$ -차원 에지에 의해 인접한 노드  $s_1s_2s_3\dots s_{i-1}s_{i+1}\dots s_n$ 과 동일한 노드임을 알 수 있고, 이때 적용한 차원 에지 개수는 4개이므로 확장율 4이다( $5 \leq i \leq n$ ). □

**정리 2** 팬케익 그래프  $P_n$ 의 스타 그래프  $S_n$ 으로 임베딩 비용은  $O(n)$ 이다.

**증명** 팬케익 그래프  $P_n$ 의 노드  $P(p_1p_2p_3\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots p_n)$ 에

서  $n$ -차원에지에 의해 연결된 노드는  $p_n p_{n-1} p_{n-2} \dots p_i \dots p_2 p_1$ 이다. 스타 그래프  $S_n$ 의 노드  $S(S_1 S_2 S_3 \dots S_i \dots S_n)$ 와 노드  $S_n S_{n-1} S_{n-2} \dots S_i \dots S_2 S_1$ 는 서로 인접하지 않으므로 노드  $S(S_1 S_2 S_3 \dots S_i \dots S_n)$ 에서 노드  $S_n S_{n-1} S_{n-2} \dots S_i \dots S_2 S_1$ 까지 최단경로 라우팅을 위해 적용할 스타 그래프의 차원 에지를 구하여 연장율을 분석한다.

스타 그래프의 노드  $S(S_1 S_2 S_3 \dots S_i \dots S_n)$ 에서 노드  $S_n S_{n-1} S_{n-2} \dots S_i \dots S_2 S_1$ 까지 라우팅을 위해 필요한 차원 에지의 개수는 스타 그래프의 지름 값을 쉽게 알 수 있다. 따라서 팬케익 그래프  $P_n$ 을 스타 그래프  $S_n$ 으로 임베딩 하는 비용은  $O(n)$ 이다.  $\square$

#### 4. 결론

본 논문에서는 상호 연결망의 주요 성질인 노드 대칭성, 재귀적 구조, 최대 고장허용도 등을 가지면서 하이퍼큐브 보다 망비용이 개선된 스타(star) 그래프와 팬케익 그래프 사이의 임베딩을 분석하였다. 본 연구의 임베딩 방법은 각 그래프가 동일한 노드 수를 가질 때 그래프의 정의 즉, 에지 생성 규칙을 통해 인접한 두 노드를 사상하고자하는 대상 그래프에서 사용되는 에지 정의로 표현하였다. 그래프 정의를 통해 임베딩 분석이 가능한 이유는 스타 그래프와 팬케익 그래프가 노드 대칭적인 성질이 있기 때문이다.

본 논문의 연구 결과는 스타 그래프  $S_n$ 을 팬케익 그래프  $P_n$ 에 연장비율 4, 확장비율 1에 임베딩 가능하고, 팬케익 그래프  $P_n$ 을 스타 그래프  $S_n$ 으로 임베딩 비용이  $O(n)$ 임을 보였다. 이러한 결과는 스타 그래프에서 개발된 알고리즘을 팬케익 그래프에서 상수의 추가적인 비용으로 시뮬레이션 할 수 있음을 의미한다.

#### 참고문헌

[1] P. Berthome, A. Ferreira and S. Perennes, "Optimal Information Dissemination in Star and Pancake Networks," IEEE Trans. on Parallel and Distributed Syst., Vol. 7, No. 12, pp. 1292-1300, 1996.

[2] V. E. Mendia and D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol. 3, No. 4, pp. 389-396, July 1992.

[3] H. Mohammad and I. Hal, "On the Diameter of Pancake Network," Journal of Algorithms, No. 25, pp. 67-94, 1997

[4] K. Qiu, H. Meijer and S. G. Akl, "Parallel

Routing and Sorting on the Pancake Networks," Lecture Notes in Computer Science, No. 497, Springer-Verlag, pp. 235-242, 1991.

[5] K. Qiu, S. G. Akl and H. Meuer, "On Some Properties and Algorithms for the Star and Pancake Interconnection Networks," Journal. Parallel and Distributed Computing 22, pp. 16-25, 1994.

[6] J-S. Jwo, S. Lakshmirarahan, and S. K. Dhall, "Embedding of Cycles and Grids in Star Graphs," Proc. of IEEE, Vol. 5, pp. 540-547, 1990.

[7] A. K. Gupta and S. E. Hambruch, "Multiple Network Embeddings into Hypercubes," J. Parallel and Distributed Computing 19, pp. 73-82, 1993.