

상호연결망 하이퍼-스타 $HS(2n, n)$ 의 평균 거리와 방송

*김종석^o **박나연 ***이형옥 *허영남
*순천대학교 컴퓨터학과
**순천제일대학 인터넷정보학부
***순천대학교 컴퓨터교육과
{*rockhee^o, ***oklee, *hyn}@sunchon.ac.kr
pnayeon@suncheon.ac.kr

Average Distance and Broadcasting of Interconnection Network Hyper-Star $HS(2n, n)$

Jong-Seok Kim^o Na-Yeon Park Hyeong-Ok Lee Yeong-Nam Heo

Dept. of Computer Science, Suncheon National University

Div. of Internet Information, Suncheon First College

Dept. of Computer Education, Suncheon National University

요 약

최근에 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 상호연결망 하이퍼-스타가 제안되었다. 본 논문에서는 상호연결망 하이퍼-스타 $HS(2n, n)$ 의 평균 거리가 $\frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^{2n-1} k \binom{2n-1}{k}$ 임을 보이고, 스페닝 트리를 이용한 일-대-다 방송 기법을 제안하고, 방송 수행 시간이 $2n-1$ 임을 보인다.

1. 서 론

상호 연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 예자로 나타내는 무방향 그래프로 표현되는데, 지금까지 제안된 상호연결망은 노드 개수를 기준으로 분류하면 $k \times n$ 으로 표현되는 메쉬 부류, 2^n 으로 표현되는 하이퍼큐브(hypercube) 부류, $n!$ 로 표현되는 스타(star) 그래프 부류로 나눌 수 있다. 상호 연결망을 평가하는 척도로는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 대칭성(symmetric), 지름(diameter), 고장지름(fault diameter), 망비용(network cost), 방송(broadcasting), 임베딩(embedding) 등이 있다[4,5].

최근에 새로운 상호연결망으로 하이퍼-스타[3]가 제안되었다. 제안된 하이퍼-스타는 차원이 증가함에 따라 노드 개수가 조합(combination) 형태로 증가하는 새로운 형태의 상호연결망이다. 하이퍼-스타는 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용이 우수하고, 차원이 증가할 때 노드개수가 급격하게 증가하는 스타 그래프의 단점을 개선한 그래프이다.

노드간의 평균 거리는 임의의 두 노드 간의 거리의 평균값을 말하는데, 지름이 최악의 통신 시간을 반영하는 것에 비해 평균 거리는 연결망 내의 실제 통신 시간을 더 잘 보여준다[1]. 방송은 상호연결망을 위한 가장 기본적인 데이터 통신기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 가장 기본이 되는 작업으로 노드와 노드 사이의 메시지 전송을 의미하는데, 크게 일-대-다 방송과 다-대-다 방송으로 나눌 수 있다. 일-대-다 방송은 메시지를 갖고 있는 한 노드에서 다른 모든 노드로 메시지를

전송하는 것이고, 다-대-다 방송은 메시지를 갖고 있는 각각의 노드들이 다른 모든 노드들로 메시지를 전송하는 것이다. 방송은 상호연결망에서 다양한 선형대수 알고리즘(matrix-vector multiplication, LU-factorization, Householder-transformations)을 포함하고 있는 많은 응용 분야들을 위한 매우 중요한 요소이다[2].

본 논문에서는 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n, n)$ 의 평균 거리가 $\frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^{2n-1} k \binom{2n-1}{k}$ 임을 보이며, $HS(2n, n)$

의 스페닝 트리를 이용한 일-대-다 방송 기법을 제안하고, 방송 수행 시간이 $2n-1$ 임을 보이겠다. 다음 장에서는 하이퍼-스타에 대하여 알아보고, 3장에서는 하이퍼-스타 $HS(2n, n)$ 의 평균거리를 분석하고, 4장에서는 $HS(2n, n)$ 의 방송을 분석하며, 마지막으로 결론을 맺도록 하겠다.

2. 관련연구

하이퍼-스타 $HS(m, k)$ 는 $\binom{m}{k}$ 개의 노드로 구성된 연결망으로 각 노드는 m 개의 비트스트링 $b_1 b_2 \dots b_i \dots b_m$ 으로 표현되며, $|b_i = "1" | = k$ 이다. b_1 과 b_i 가 보수일 때 b_1 과 b_i 를 교환하는 치환을 σ_i 라 하면, $v = \sigma_i(u)$ 인 두 노드 $u = b_1 b_2 \dots b_i \dots b_m$ 와 $v = b_1 b_2 \dots b_1 \dots b_m$ 사이에 에지가 발생하며, u 와 v 를 연결하는 에지를 i -에지라고 한다. 하이퍼-스타는 매우 간단한 라우팅 알고리즘과 유용한 확장성을 가지고 있고, 이분할 연결망이며, 최대 고장 허용도를 가지고 있다[3]. 하이퍼-스타 $HS(m, k)$ 는 비정규형 연결망이므로

본 논문에서는 정규연결망인 $HS(2n, n)$ 의 평균거리와 방송을 분석하겠다. 그림 1은 $HS(4, 1)$ 과 $HS(4, 2)$ 를 나타낸다.

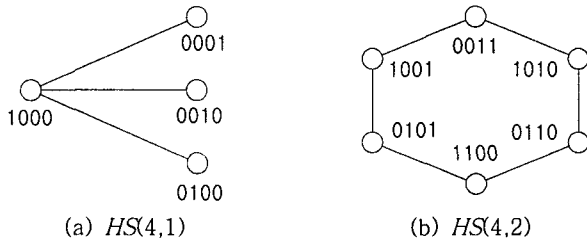


그림 1. $HS(4, 1)$ 와 $HS(4, 2)$

3. 평균거리

$HS(2n, n)$ 의 임의의 두 노드를 $u = a_1 a_2 \dots a_i \dots a_{2n}$ 와 $v = b_1 b_2 \dots b_i \dots b_{2n}$ 라고 하고, 두 노드 u 와 v 사이의 거리를 $dist(u, v)$ 라고 표시하겠다. 두 노드 사이의 거리 $dist(u, v)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \cdot d(u_i, v_i) &= \begin{cases} 1 & \text{if } a_i \neq b_i \\ 0 & \text{if } a_i = b_i \end{cases} \\ \cdot dist(u, v) &= \sum_{i=2}^{2n} d(u_i, v_i) \end{aligned}$$

정리 1. 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n, n)$ 의 평균 거리는 $\frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^{2n-1} k \binom{2n-1}{k}$ 이다.

증명. 대칭성을 갖는 연결망 내에서 평균 거리는 주어진 임의의 노드로부터 모든 노드들까지의 거리의 총합과 연결망의 노드수의 비로 나타낸다[1]. 그러므로 하이퍼-스타 $HS(2n, n)$ 의 노드 간의 평균 거리는 다음과 같다.

$$\cdot \text{평균거리} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^{2n-1} k \binom{2n-1}{k}$$

k 는 $dist(u, v)$ 이고, $\binom{2n-1}{k}$ 는 하이퍼-스타 $HS(2n, n)$ 내부의 임의의 노드로부터 거리가 k 인 노드들의 수를 나타낸다.

4. 방송

$HS(2n, n)$ 의 방송을 위해 원시 노드 $u = 0^n 1^n$ 를 정점으로 하는 스페닝 트리를 만들겠다. $HS(2n, n)$ 구조는 스페닝 트리를 쉽게 만들 수 있다는 장점이 있다. $Pa(v)$ 는 노드 v 의 상위 노드를 나타내는 함수라고 하고, $Ch(v)$ 는 노드 v 의 하위 노드를 나타내는 함수라고 하자. 노드 v 의 2차

원 상위 노드를 $g = Pa(Pa(v))$ 라고 하고, $E = \{i | r = g_i \oplus v_i = 1\}$ 라고 하자. $i^p \in E$ 이고, $i^1 \in E$ ($1 \leq i^1 \leq n$, $n+1 \leq i^1 \leq 2n$)이면 v 는 짝수 레벨에 위치하고, $i^p \in E$ 이고, $i^1 \in E$ ($1 \leq i^1 \leq n$, $n+1 \leq i^1 \leq 2n$)이면 v 는 홀수 레벨에 위치한다고 정의한다. 그리고 $\Psi = \{i^1 + 1, i^1 + 2, \dots, 2n\}$ 혹은 $\Psi = \{i^1 + 1, i^1 + 2, \dots, n\}$ 이면 Ψ 에 속하는 모든 h 에 대해 $r_h = 0$ 이다. 즉, Ψ 는 R 의 i^1 의 위치에 연속적으로 0만이 존재하는 집합을 말한다.

정의 1. 원시 노드를 노드 $u = 0^n 1^n$ 라고 할 때, $Pa(v)$ 와 $Ch(v)$ 에 의해 노드 u 를 정점으로 하는 스페닝 트리 $ST(u)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} Ch(v) &= \sigma_h(v), \text{ 모든 } h \in \Psi, \\ Pa(v) &= \sigma_{i^1}(v) \end{aligned}$$

특히, 원시 노드 u 가 v 일 때는 $i^1 = n$ 이고, $Pa(v)$ 는 존재하지 않으며, $i^p = 1$ 이고, $E = \{i | r = u_i \oplus v_i = 1\}$ 라고 가정한다. 그러면 v 의 하위 노드는 h -에지에 의해 연결되는 노드이고, v 의 상위 노드는 i^p -에지에 의해 연결되는 노드임을 쉽게 알 수 있다. 그림 2는 노드 u 를 정점으로 하는 $HS(6, 3)$ 의 스페닝 트리 $ST(000111)$ 이다. 그림 2에서 보면 L_2 에 위치한 노드 010011을 v 라고 할 때, v 의 2차원 상위 노드는 000111이고, $E = \{2, 4\}$ 임을 알 수 있다. 또 v 가 짝수 레벨에 위치해 있으므로, $i^p = 2$ 이고 $i^1 = 4$ 이며 $\Psi = \{5, 6\}$ 임을 알 수 있다. 그러므로 v 의 하위 노드는 $\sigma_5(v) = 110001$ 과 $\sigma_6(v) = 6$ 이며, v 의 상위 노드는 $\sigma_2(v) = 100011$ 이다.

정리 2. 원시 노드 $u = 0^n 1^n$ 이면, 스페닝 트리 $ST(u)$ 의 최적 높이는 $2n-1$ 이다.

증명. 스페닝 트리 $ST(u)$ 안의 임의의 노드를 w 라고 하면, 노드 u 와 w 사이에 Exclusive-OR 함수를 적용하여 생성된 비트스트링을 $R = r_1 r_2 \dots r_{2n}$ 이라고 하고, $r_i = u_i \oplus w_i$ 인 비트들의 집합을 R' 라고 하자. 그러면 함수 $Pa(w)$ 는 $i^p \in R'$ 인 상위노드 $\sigma_{i^p}(w)$ 를 나타낸다. 성질 1에 의해 에지 $(w, Pa(w))$ 는 노드 u 로부터의 최단거리를 이끌어 낸다. $HS(2n, n)$ 은 노드 대칭이므로, $ST(u)$ 의 높이는 $HS(2n, n)$ 의 지름과 동일하다. 특히 $w = 1^n 0^n$ 일 때, $ST(u)$ 의 노드 u 와 w 를 연결하는 길이 $2n-1$ 인 최단 경로를 구성한다. 그러므로 스페닝 트리 $ST(u)$ 의 최적 높이는 $2n-1$ 이다.

본 논문에서는 일-대-다 방송 기법을 제안하겠다. 방송 기법은 다음과 같다.

먼저 원시 노드 u 가 가지고 있는 정보 M 을 하위 노드 중 가장 왼쪽에 위치한 하위 노드에 전달한다. 그러면 u 와 u_1 이 정보 M 을 가지고 있게 된다. 두 번째로 원시 노드 u 가 가지고 있는 정보 M 을 하위 노드 중 u_1 의 오른쪽에 위치한 하위 노드에 전달하고, 동시에 u_1 은 u_1 의 하위 노드 중 가장 왼쪽에 위치한 하위 노드에 정보 M 을 전달한다. $ST(u)$ 의 모든 노드에 정보 M 이 전달될 때까지

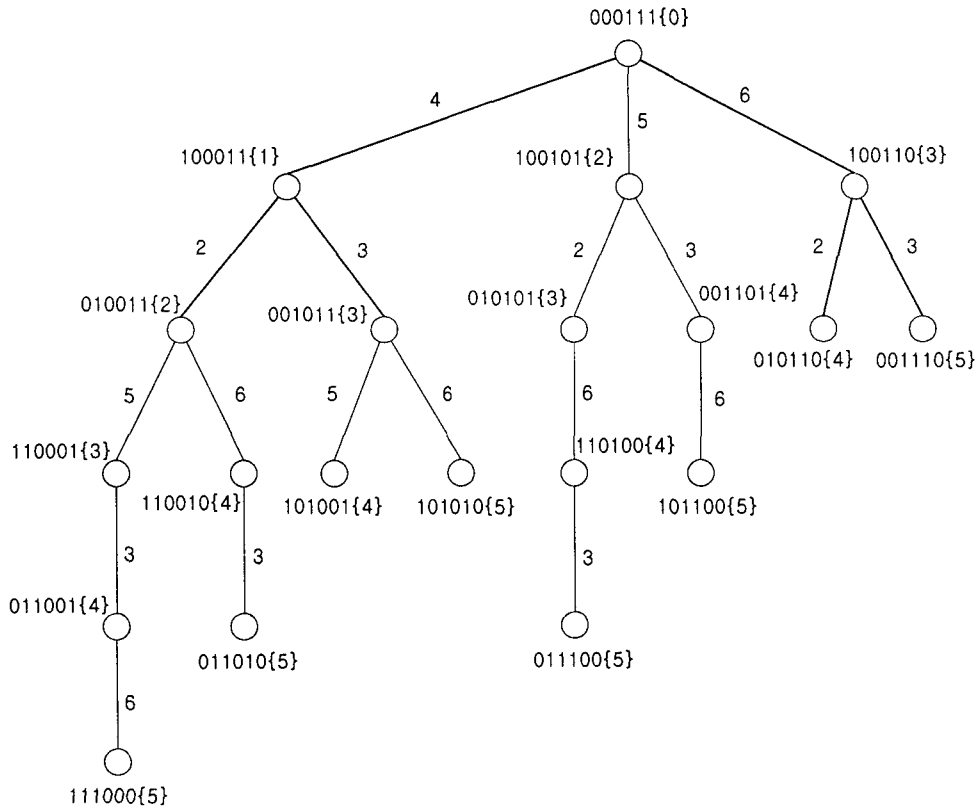


그림 2. 노드 $u=000111$ 를 정점으로 하는 $HS(6,3)$ 의 스패닝 트리

지 이와 같은 방송을 계속 수행한다. 제안한 방송 기법의 수행 시간은 $2n-1$ 이며, 이것은 $HS(2n,n)$ 의 지름과 같으므로 최적 방송임을 알 수 있다. 그림 2에 표시한 $\{t\}$ 는 노드가 t 시간 만에 정보를 전달받는다는 것을 나타낸다.

5. 결론

본 논문에서는 상호 연결망으로 널리 알려진 하이퍼큐브의 망비용을 개선한 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$ 의 평균 거리가 $\frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^{2n-1} k \binom{2n-1}{k}$ 임을 보였고, $HS(2n,n)$ 의 스패닝 트리를 이용한 일-대-다 방송 기법을 제안하였고, 방송 수행 시간이 $2n-1$ 임을 보였다.

이와 같은 결과는 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$ 의 일-대-다 방송 기법이 최적 방송 기법임을 증명하는 것이며, $HS(2n,n)$ 에서의 실제 통신 시간을 알 수 있음을 보여주는 것이다.

참고문헌

- [1] W.-K. Chiang and R.-J. Chen, "Topological properties of hierarchical cubic networks," *Journal of systems Architecture*, pp. 289-307, 1996.
- [2] S. L. Johnsson, "Communication Efficient Basic Linear Algebra Computations on Hypercube Architectures," *Journal of Parallel Distributed Comput.*, vol. 4, pp. 133-172, 1987
- [3] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, H.-S. Lim, "Hyper-Star Graph: A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," *Lecture Notes in Computer Science : EurAsia-ICT 2002*, LNCS 2510, pp. 858-865, 2002.
- [4] F. T. Leighton, *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes*, Morgan Kaufmann Publishers, 1992.
- [5] V. E. Mendia nad D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," *IEEE Trans. Parallel Distributed syst.*, Vol.3, No.4, pp. 389-396, 1992.