

## Orthotropic 복합재료로 만든 두께가 얇은 압력용기의 변형에 관한 연구

김 형 원\* · 최 용 규\*

### The Analyses about Axisymmetric Deformation of a thin pressure vessel by orthotropic composites

Hyung-Won Kim\* · Yong-Kyu Choi\*

#### ABSTRACT

The analytic solution of displacements of thin cylindrical pressure vessel made by carbon fiber T700/Epoxy was obtained using equilibrium equations of orthogonal curvilinear coordinate system. Equilibrium equations with the assumed displacement field were derived from a reasonable description of the behavior of thin elastic shells using principle of virtual work. Some analyses of the theoretical solution are presented and compared with the results of hydraulic tests of the pressure vessel.

#### 1. 서 론

유도탄과 항공기 등 경량화를 요구하는 구조물의 구조재료로서 복합재료가 주목을 모으고 있는데 형상은 판 모양에 제한된 것이 아니고 대부분 셸 모양이어서 이론적으로 분석하는데 복잡한 형상을 띄고 있다.

셸이론과 전단 변형을 포함해서 복합재료에 대한 해를 구한 것은 Vinson과 Chou가 처음이다[5]. 1975년에 Winkins와 Love는 복합재료로 된 원통형 셸의 압축과 전단 좌굴 거동을 분석했다[6]. 1976년에 Waltz와 vinson은 복합재료 원통형 셸의 interlaminar 응력을 해석했으며 El Naschie는 복합재료 셸의 큰 변형에 대한 거동을 조사했다. 1977년에 Ecord는 왕복우주선의 압력용기에 관한 연구를 했는데 티타늄과 인코넬로 만들어진 구형 셸 위에 Kevlar49를 감아서 400파운드를 줄였다. 최근에는 Bert는 2중 적층 cross-ply의 얇은 두께의 셸에 관한 굽힘과 진

동에 관한 완전한 해를 구하였다.

여기서는 축대칭 하중이 작용하고 두께가 얇은 orthotropic 적층 복합재료로 만들어진 원통형 연소관에 관한 해를 구하고 끝단의 영향이 없는 중앙 부분에서의 반경방향의 처짐을 구하고 수압시험을 한 결과치와 비교하였다.

#### 2. Equations from three-dimensional elasticity in curvilinear coordinates

그림1에서의 같이  $\xi^i, i=1, 2, 3$ , 를 orthogonal curvilinear coordinate system이라 하자. 한점에서의 변형율은 변형이 작은 경우 선형탄성론에서 다음과 같이 표현된다.[1]

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (v_j / i + v_i / j) \quad (1)$$

$i, j = 1, 2, 3,$

여기에서 '/'는 covariant differentiation이며  $v_i$ 는 변위벡터로써 physical components( $u_i$ )는

\* 국방과학연구소(Agency for Defence Development)

다음과 같다.

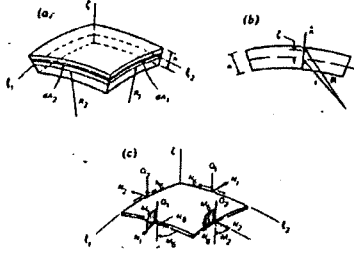


Fig. 1 Geometry and stress resultants of doubly curved shell

$$u_i = \sqrt{g^{ii}} v_i \quad (2)$$

여기서  $g^{ii}$ 는 Euclidean metric tensor라 칭하며 다음과 같이 정의된다.

$$g^{ii} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \theta^i}{\partial x^m} \frac{\partial \theta^i}{\partial x^m} \quad (3)$$

식 (1)에서 주어진 변형율의 physical components는 다음과 같다.

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{g^{ii}} \sqrt{g^{jj}} e_{ij} \quad (4)$$

Covariant derivative  $v_{j/i}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$v_{j/i} = v_{j,i} - \Gamma_{ij}^r v_r \quad (5)$$

여기에서 2번째 종류의 Christoffel symbol은 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{rs} (g_{is,i} + g_{js,i} - g_{ij,s}) \quad (6)$$

단위길이 마다의 다른 인장력에 대한 표현은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ M_{21} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_1 (1 + \frac{\xi}{R_2}) \\ \sigma_2 (1 + \frac{\xi}{R_1}) \\ \sigma_6 (1 + \frac{\xi}{R_2}) \\ \sigma_6 (1 + \frac{\xi}{R_1}) \\ \sigma_5 (1 + \frac{\xi}{R_2}) \\ \sigma_4 (1 + \frac{\xi}{R_1}) \\ \xi \sigma_1 (1 + \frac{\xi}{R_2}) \\ \xi \sigma_2 (1 + \frac{\xi}{R_1}) \end{pmatrix} d\xi \quad (6)$$

이러한 탄성셀에 대한 평형방정식을 구하기 위해 식(6)에 Kirchhoff의 가정을 하면 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$(N_i, M_i) = \sum_{k=1}^N \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \sigma_i(1, \xi) d\xi, \quad i=1,2,6;$$

$$(Q_i) = \sum_{k=1}^N K_i^2 \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \sigma_i d\xi, \quad i=4,5; \quad (7)$$

선형으로 가정한 변위를 식 (1)에 적용하면 다음과 같은 변형율과 변위의 관계를 얻는다.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + \xi x_1;$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + \xi x_2;$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_4^0;$$

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_5^0;$$

$$\varepsilon_6 = \varepsilon_6^0 + \xi x_6; \quad (8)$$

여기에서

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{g_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_3}{R_1}$$

$$; \varepsilon_2^0 = \frac{1}{g_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{u_3}{R_2};$$

$$\varepsilon_4^0 = \frac{1}{g_2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} + \phi_2 - \frac{u_2}{R_2};$$

$$\varepsilon_5^0 = \frac{1}{g_1} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + \phi_1 - \frac{u_1}{R_1}; \quad (9)$$

$$\varepsilon_6^0 = \frac{1}{g_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{g_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2};$$

$$x_1 = \frac{1}{g_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1}; \quad x_2 = \frac{1}{g_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2};$$

$$x_6 = \frac{1}{g_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{g_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2}$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\left( \frac{1}{g_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{1}{g_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \right)$$

평형방정식을 얻기 위해 virtual work principle과 variational principle을 적용하면 다음과 같은 방정식을 얻는다.[8]

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (N_6 + c_0 M_6) + \frac{Q_1}{R_1} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (N_6 - c_0 M_6) + \frac{\partial N_2}{\partial \xi_2} + \frac{Q_2}{R_2} = 0;$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_2} - \left( \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - q \right) = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial M_6}{\partial \xi_2} - Q_1 = 0;$$

$$\frac{\partial M_6}{\partial \xi_1} + \frac{\partial M_2}{\partial \xi_2} - Q_2 = 0;$$

### 3. 두께가 얇은 연소관에 적용되는 방정식

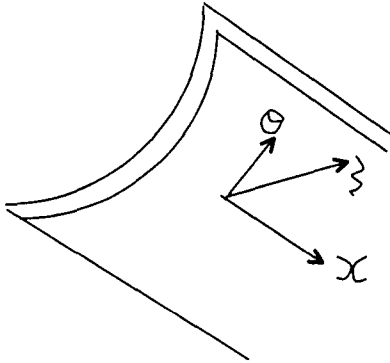


Fig 2 Cylindrical coordinate system of pressure vessel

축대칭으로 변형하고 두께가 얇은 실린더 연소관은 다음과 같은 변형율의 성질을 갖고 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_6^0 &= \gamma_{\xi_1 \xi_2} = 0; \\ x_6 &= 0 \\ \epsilon_4^0 &= \gamma_{\xi_1 \xi} = 0; \\ \epsilon_5^0 &= \gamma_{\xi_2 \xi} = 0; \\ u_{\xi_2} &= \phi_{\xi_2} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)의 조건을 식(10)에 적용하고 좌표계를 그림2에서와 같이 적용하면 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{N_\theta}{R} + p &= 0; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x &= 0; \end{aligned} \quad (12)$$

다음 식(8)의 식은 식(11)과 축대칭 변형이라는 성질을 이용하면 다음과 같은 변형율과 변위의 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E_x} (\sigma_x - \nu_{x\theta} \sigma_\theta) \\ &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \xi \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E_\theta} (\sigma_\theta - \nu_{\theta x} \sigma_x) = \frac{w}{R} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\epsilon_{x\theta} = \frac{1}{2G_{x\theta}} \sigma_{x\theta}$$

식(13)을 셸의 두께에 따라 적분을 하고 단위 길이 당 합력의 정의를 이용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{hE_x}{1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x}} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu_{x\theta} \frac{w}{R} \right) \\ N_\theta &= \frac{hE_\theta}{1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x}} \left( \frac{w}{R} + \nu_{x\theta} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ M_x &= \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (14)$$

식 (11)에서 중립면에 수직인 방향으로의 전단변형은 없다는 가정으로부터 다음의 조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_{x\xi} &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + \phi_1 - \frac{u_1}{R_1} = 0 \\ \text{정리하면 } \phi_x &= - \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (15)$$

식(14)와 식(15)를 평행방정식 식(12)에 넣고 정리하면 다음과 같은 변위미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{\nu_{\theta x}}{R} \frac{dw}{dx} &= 0 \\ \frac{d^4 w}{dx^4} + 4 u^4 w &= \frac{1}{D_x} (p - \frac{\nu_{\theta x}}{R} N_x) \end{aligned} \quad (16)$$

여기에서  $\nu^4 = \frac{3 D_\theta (1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})}{R^2 h^2 D_x}$

### 4. 미분방정식의 해

반경방향의 변위 미분방정식 (16)의 일반해와 특수해를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{M_0}{2 \epsilon^2 D_{11}} e^{-\epsilon x} (\sin \epsilon x - \cos \epsilon x) - \frac{Q_0}{2 \epsilon^3 D_{11}} e^{-\epsilon x} \cos \epsilon x \\ &+ \frac{M_L}{2 \epsilon^2 D_{11}} e^{-\epsilon(L-x)} (\sin \epsilon(L-x) - \cos \epsilon(L-x)) \\ &+ \frac{Q_L}{2 \epsilon^3 D_{11}} e^{-\epsilon(L-x)} \cos \epsilon(L-x) + \frac{1}{4 \epsilon^4 D_{11}} (p(x) - \frac{\nu_{\theta x}}{R} N_x) \end{aligned} \quad (17)$$

여기에서

$$\epsilon^4 = \frac{3(1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})}{R^2 h^2} \frac{D_\theta}{D_{11}}$$

위의 해를 고찰하면 일반해는 진폭이 1인 삼각함수를 포함하고 있으며 이것에 음의 지수를 갖는 e를 계수로 곱하여서 이것은 지수의 값이 커지면 0으로 접근하는 것을 알 수 있다.  $e^{\epsilon x}$ 과  $e^{-\epsilon(L-x)}$ 이 0.005보다 작을 때 이 항이 무시된다고 하면  $\epsilon x = \epsilon(L-x)$ 이 5.12보다 작을 때 이러한 현상이 일어난다. 연소관이 다음과 같은 성질을 갖는 orthotropic 재질이라 가정하자.

Table 3 Effective mechanical properties of T700/Epoxy

$E_x$	$E_\theta$	$E_z$	$G_{x\theta}$	$G_{\theta z}$	$G_{xz}$	$\nu_{x\theta}$	$\nu_{xz}$	$\nu_{\theta z}$
0.74e4 kg/mm <sup>2</sup>	0.55 e4	0.99 e3	0.18 e4	0.46 e3	0.49 e3	0.26	0.31	0.34

표 3에서는 연소관의 두께의 변화에 따른 반경방향의 처짐을 나타내었다.

Table 4 The deflection of pressure vessel at 1450psi pressure

h(두께)	Dx	Dθ	w(x)처짐
6mm	1.4E5	1.04E5	6.3mm
8mm	3.32E5	2.47E5	4.7mm
10mm	6.48E5	4.82E5	3.8mm

### 5. 수압시험 및 결과 검토

이론으로부터 구한 결과치를 검증하기 위하여 연소관 수압시험을 실시하였다.

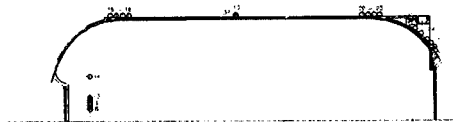


Fig. 3 Hydraulic test of the thin pressure vessel by orthotropic composites

그림 2에서와 같이 orthotropic 복합재료로 만든 압력용기를 전방과 후방에 알루미늄 마개로 막고 용기가 파열이 될 경우 안전장치가 되 있는 시험장치에 용기를 후방이 위로 향하게 장착했다. 연소관이 동적하중을 받지 않게 하기 위해 물을 분당 300psi 내로 서서히 넣어 압력을 가한다. 각 중요한 부분에 스트레인 게이지를 장착했으며 그림 2에서 19번이 연소관 실린더 부위의 중앙에 해당한다. 압력별 변형도를 계측하기 위해 M/M사의 System4000으로 데이터를 분석했다.

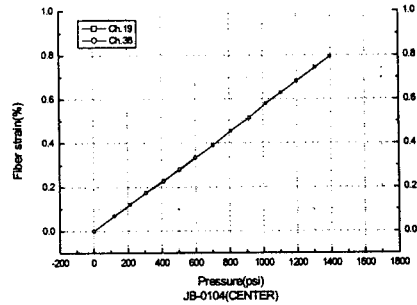


Fig. 4 The hydraulic test result of hoop directional strain at the cylinder center

수압시험을 한 결과 실린더 부위 중앙에서의 Hoop 방향의 strain에 대한 결과는 그림 3에 나타나 있다. 변형율은 압력에 거의 선형적으로 비례하는 것을 알 수 있으며 압력이 1450psi에서 약 0.8%의 strain 값이 측정됐으며 이것을 반경방향의 변위로 환산하면 표 3에서 나타난 것과 같다. 표 3에서는 3차례의 수압시험을 실시한 결과를 나타낸 것으로 시험 결과치가 이론 결과치에 근접하는 것을 나타냈으며 약간의 편차가 있으나 이것은 시험시 연소관 두께 내부의 층간 분리나 그 밖의 결함이 내재해서 변형이 더 발생한 것으로 추정된다.

Table 5 The hydraulic test result of radial directional displacement at the cylinder center

수압시험	1차	2차	3차
w(x); mm	3.7	4.0	3.5

### 참고문헌

- [1] Y. C. Fung, Foundations of Solid Mechanics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1965).
- [2] J. L. Sanders, Jr, An improved first-approximation theory for thin shells. NASA Tech. Rept. R-24 (1959).
- [3] G. Dupuis, Application of Ritz's method to thin elastic shell analysis. Trans. ASME, J. applied Mechanics. 38, 987-996.
- [4] C. W. Bert, M. Kumar, Vibration of Cylindrical Shells of Bimodulus Composite Materials, Journal of Sound and Vibration, vol. 81, No. 1, 1982, pp. 107-121
- [5] Vinson, J. R. and T. W. Chou. Composite materials and their use in structures, Applied Science Publishers, London (1975).