

# 이계 자기회귀 각란 모형을 고려한 EPC와 SPC의 통합시스템

## An Integrated Model of SPC and EPC with Second Order Autoregressed Disturbance

정 해 운 \*  
Jung Hae Woon

### Abstract

EPC seeks to minimize variability by transferring the output variable to a related process input(controllable) variable, while SPC seeks to reduce variability by detecting and eliminating assignable causes of variation. In the case of product control, a very reasonable objective is to try to minimize the variance of the output deviations from the target or set point. We consider an alternative EPC model with second-order autoregressed disturbance. We compare three control systems; EPC, EPC combined system with EWMA, CUSUM and Shewhart. This paper shows through simulation that the performance of the integrated model of EPC and SPC is more preferable than that of EPC.

### 1. 서론

본 연구는 공정개선을 위하여 공정조절에 사용되고 있는 EPC(Engineering process control)와 가피원인 탐지에 사용되고 있는 SPC(Statistical process control)를 통합한 모형을 제시하고자 한다.

EPC는 엔지니어링 공정관리 또는 APC(Automatic process control)라고 불리며, 정밀한 가공을 하는 공정산업에서 공정조절을 하기 위하여 사용한다.

SPC는 통계적 공정관리라고도 하며, 관리도로 나타내기도 한다. SPC에서 슈하트관리도는 안정상태의 공정이나, 공정평균의 변화가 큰 경우에 가피원인을 탐지하는 기능이 우수하다. 연속 공정산업이나 혼성공정산업은 SPC 만을 적용할 경우 과거의 데이터에 의한 변동을 감소시키는 사후 공정관리만 하지만, EPC와 병행 사용하면 변동을 감소시키는 공정조절 절차에 따라 예측 기능이 있는 공정관리가 된다. 이러한 절차의 SPC와 EPC통합시스템은 EPC만 사용할 때 보다 변동을 감소시키는 역할이 우수하다.본 연구에서 사용하는 기호를 정의하면 다음과 같다.

\*오산대학교 시스템경영과

<기호의 정의>

기 호	정 의	기 호	정 의
$Y_t$	t 시점에 공정 품질특성치	$e_t$	t 시점에 독립확률변수인 오차, $N(0, \sigma_e^2)$
$\mu$	공정평균	$a_t$	t 시점에서 $n_t$ 에 영향을 주는 확률변수인 백색잡음, $N(0, \sigma_a^2)$
$u_t$	t 시점에 공정조절의 효과	$\phi_1$	자기회귀(AR)모형에서 일계 회귀계수
$n_t$	t 시점에 각란의 효과	$\phi_2$	자기회귀(AR)모형에서 이계 회귀계수
MMSE	최소평균제곱오차, $PM = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Y_t - T)^2$	$\theta$	EWMA모수, $\theta = 1 - \lambda$

## 2. EPC와 SPC통합 모형의 설계

### 2.1 이계자기회귀 각란(撓亂)모형에 의한 공정조절모형의 설계

EPC/SPC통합시스템 모형은 맥그리거(MacGregor)의 EPC모형과 데밍(Deming, 1950)이 제안한 깔때기 실험의 규칙(Rule)이 연계된다[4]. 깔때기 실험의 규칙은 공깃돌을 깔때기를 통하여 떨어뜨려 보고 공깃돌이 떨어지는 형태에 따라 깔때기의 조절을 결정하는 실험이다. 본 연구는 깔때기 실험의 두 번째 규칙으로써, 공깃돌의 낙하지점 패턴이 AR(2)모형을 따른다고 가정하고 새로운 EPC모형을 설계하고자 한다. MacGregor는 공정평균이 이동하는 경우 공정을 조절을 하지 않을 때보다 조절을 할 때가 변동이 더 작아짐을 밝혔다[6].

깔때기 실험규칙1은 깔때기가 목표에 맞도록 고정되어 있다고 가정하면, 다음과 같다.

$$Y_t = e_t \quad t=1, 2, \dots, n \tag{1}$$

$e_t$  는 분산이  $\sigma_e^2$ 을 갖는 독립확률변수이다.

깔때기 실험규칙2는 다음에 떨어지는 공깃돌이 목표에 맞도록 깔때기를 정확하게 조절한다고 하면, 이때 품질특성은 다음과 같다.

$$Y_t = u_{t-1} + e_t \tag{2}$$

여기서  $e_t$ 는 독립확률변수이고,  $u_{t-1}$ 은 갈때기의 t-1시점의 조절된 위치이며, 갈때기의 현재 위치는 다음에 떨어질 공깃돌의 위치를 결정하기 위하여 조절된다. 갈때기실험의 규칙2에서 Mcgregor(1990)는 공정조절방법을 나타냈다[8]. 즉, 맥그리거가 설계한 공정조절모형은 다음과 같다.

$$u_t = u_{t-1} - Y_t \tag{3}$$

$u_{t-1}$ 은 공깃돌이 t번째 떨어질 갈때기의 위치를 조절 한다.

갈때기 두 번째 실험규칙 에서, t번째 공깃돌이 떨어질 때 공깃돌의 위치는 갈때기 조절과 확률오차의 합으로 나타난다.

목표와 공깃돌의 편차는 다음과 같다.

$$Y_t = e_t - e_{t-1} \tag{4}$$

갈때기실험의 규칙2의 조절활동은 식(3)에 기초하며, 그때 품질특성은 다음과 같다.

$$Y_t = n_t - n_{t-1} + e_t - e_{t-1} \tag{5}$$

조절활동을 할 때 분산은 조절활동을 하지 않을 때 분산의 2배이며 다음과 같다.

$$Var(Y_t) = \frac{2\sigma_a^2}{1+\phi} + 2\sigma_e^2 \tag{6}$$

본 논문은 공정평균이 이동할 경우, EPC의 통합관리로써 컨트롤러, 각란의 효과, 오차의 함수로 나타낸다. 결국 통합모형은 다음과 같다.

$$Y_t = \mu + u_{t-1} + n_t + e_t \tag{7}$$

여기서 통합모형은 공정평균  $\mu=0$ , 컨트롤러  $u_{t-1}$ 은 갈때기실험 규칙2에 따르며,  $n_t$ 는 이계 자기회귀 모형에 따르고,  $e_t$ 는 분산이  $\sigma_e^2$ 을 갖는 독립확률변수 라고 가정한다.

이때, 통합모형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_t = u_{t-1}' + n_t + e_t \tag{8}$$

이때,  $n_t$ 는 이계자기회귀모형에 따른다고 가정하면 다음과 같다.

$$n_t = \phi_1 n_{t-1} + \phi_2 n_{t-2} + a_t \tag{9}$$

각란은 조절되지 않고 품질특성에 남아있게 되는 효과로서 t 시점의 각란의 효과는 t-1, t-2 시점에서 발생한 각란과 각각  $\phi_1, \phi_2$ 가 맞물리고 백색잡음이 존재한다.

식(8)에 식(9)를 대입하면 다음과 같다.

$$Y_t = u_{t-1} + \phi_1 n_{t-1} + \phi_2 n_{t-2} + a_t + e_t \quad (10)$$

식(8)에서  $n_{t-1} = Y_{t-1} - u_{t-2} - e_{t-1}$ 이고,  $n_{t-2} = Y_{t-2} - u_{t-3} - e_{t-2}$ 이므로

윗식에 대입해서 정리하면 다음과 같이 전개된다.

$$Y_t = u_{t-1} + \phi_1(Y_{t-1} - u_{t-2} - e_{t-1}) + \phi_2(Y_{t-2} - u_{t-3} - e_{t-2}) + a_t + e_t \quad (11)$$

$u_{t-1}$ 로 다시 정리하면,

$$\begin{aligned} u_{t-1} &= Y_t - \phi_1(Y_{t-1} - u_{t-2} - e_{t-1}) - \phi_2(Y_{t-2} - u_{t-3} - e_{t-2}) - a_t - e_t \\ &= \phi_1 u_{t-2} - \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 u_{t-3} - \phi_2 Y_{t-2} + Y_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_2 e_{t-2} - a_t - e_t \end{aligned} \quad (12)$$

시간을  $t-1$ 에서  $t$  시점으로 조정하면,

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} - \phi_1 Y_t + \phi_2 u_{t-2} - \phi_2 Y_{t-1} + [Y_{t+1} + \phi_1 e_t + \phi_2 e_{t-1} - a_{t+1} - e_{t+1}] \quad (13)$$

[ ] 부분은 MA(2)모형의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} - \phi_1 Y_t + \phi_2 u_{t-2} - \phi_2 Y_{t-1} + \theta_1 Y_t + \theta_2 Y_{t-1} \quad (14)$$

결국, 새롭게 설계한 공정조절은 다음 식과 같이 유도된다.

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} - (\phi_1 - \theta_1) Y_t + \phi_2 u_{t-2} - (\phi_2 - \theta_2) Y_{t-1} \quad (15)$$

공정조절모형의 설계는 밀출된 부분은 MA(2)모형으로 가정하며, MMSE(최소평균제곱오차)가 되도록 하는 이동평균모수가 되어야 한다.

이계각란모형을 고려한 공정조절모형은 다음과 같다.

$$u_t = \begin{bmatrix} \phi_1 u_{t-1} - (\phi_1 - \theta_1) Y_t \\ \phi_2 u_{t-2} - (\phi_2 - \theta_2) Y_{t-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

각란의 모형과 자기회귀 시계열모형, 이동평균모형에 관해서는 Box와 Jenkins (1976)[3]와 Montgomery, Johnson과 Gardiner(1990)[9] 등 많은 학자들에 의해 연구되었다. 여기서  $\theta_i$  ( $0 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 1$ )는 식(8)에서 각란이 AR(2)모형일 때  $e_t$ 와  $a_t$  항목이 MA(2)모형의 이동평균모수로 나타낸다. Anderson[2], Box와 Jenkins[3]과 MacGregor와 Harris[7]는 ARMA공정에서  $\theta$ 의 추정을 연구하였고, MacGregor는  $\theta$ 와 관계 있는 등식에서  $\theta$ ,  $\sigma_e^2$ ,  $\sigma_a^2$  까지 모형으로 나타내었다[6].

## 2.2 맥그리거모형과 제안된 EPC모형 비교

맥그리거의 EPC모형의  $u_t$ 는 각란의 효과가 AR(1)모형일 때를 가정하였지만, 제안된 EPC모형은 공정평균을  $\mu$ 로 하고,  $u_t$ 의 설계는 각란  $n_t$ 가 AR(2)모형을 따를 경우에 대해서 새롭게 설계하였다.

AR(1)은 바로 전 단계의 데이터만으로 모수를 추정하여 공정조절에 사용하였지만, AR(2)는 전 단계까지도 고려한 모수의 추정을 통하여 공정조절을 함으로써 보다 정확한 공정조절을 한다.

본 연구에서 설계된 EPC모형과 맥그리거의 EPC모형의 비교는 <표 1>과 같다.

<표 1> 맥그리거 EPC모형과 제안된 EPC모형의 비교

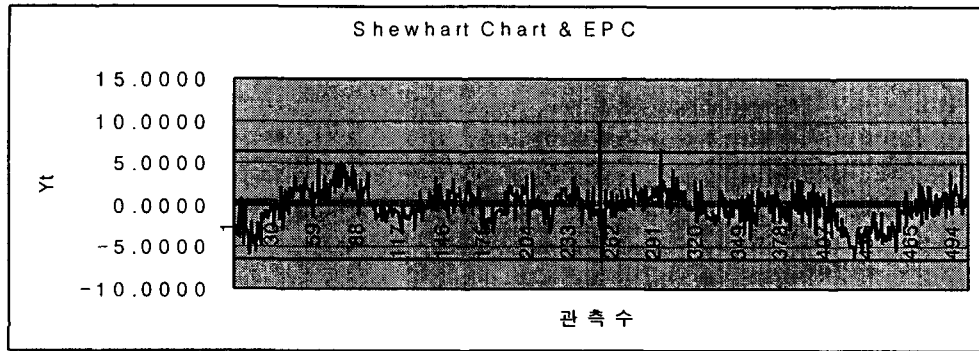
항목	맥그리거의 EPC모형	제안된 EPC 모형	제안된 모형의 특성
EPC 모형	$Y_t = u_{t-1} + n_t + e_t$	$Y_t = u_{t-1}' + n_t + e_t$	품질특성의 절차 확립
공정 평균	사용하지 않음	$\mu = 0, u_{t-1}' = \mu + u_{t-1}$	
공정 조절	$u_t = \phi u_{t-1} - (\phi - \theta) Y_t$	$u_t = [\phi_1 u_{t-1} - (\phi_1 - \theta_1) Y_t] + [\phi_2 u_{t-2} - (\phi_2 - \theta_2) Y_{t-1}]$	이계모수 $-1 \leq \phi_1 + \phi_2 \leq 1$ $0 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 1$
각란 효과	$n_t = \phi n_{t-1} + a_t$ 일차자기회귀모형 AR(1)	$n_t = \phi_1 n_{t-1} + \phi_2 n_{t-2} + a_t$ 이차자기회귀모형 AR(2)	이계자기회귀계수, 이계이동평균모수를 사용한 선형식

### 3. EPC와 SPC의 통합모형의 수행도 평가

#### 3.1 모형의 수행도 평가의 절차 및 특성

본 연구는 EPC와 SPC통합모형의 수행도 평가를 위하여 시뮬레이션을 수행한다. 시뮬레이션에서는 품질특성치를 500개를 발생시키고, 가피원인을 인위적으로 발생되도록 251번째에 크기가 각각 1, 2, 5, 7.5, 10이 되도록 쉬프트하여 수행도를 평가한다. SPC를 이용하여 슈하트, EWMA, 누적합(CUSUM)관리도에서 가피원인을 탐지하지 못할 경우, 즉 관리한계 내에 있을 경우는 EPC가 계속 공정조절을 하는 역할을 한다.

[그림 1]의  $Y_t$ 는 EPC와 슈하트관리도의 통합된 결과를 나타낸다. 슈하트관리도의 관리한계선 위에 점은 t=251에 쉬프트된 값이 10이며, 가피원인으로 판단되어 제거된다. EPC와 SPC 통합절차에서 SPC는 가피원인이 발견되자마자 가피원인을 제거하고, 다시 EPC는 공정조절을 시작한다. 이러한 통합모형은 더 많은 변동의 감소를 가져온다. 이 때 PM값은 3.408이다.



[그림 1] 품질특성은 EPC와 슈하트관리도를 사용한 목표와의 편차  
(t=251에서 쉬프트된 값 10, PM=3.408)

### 3.2 통합모형의 수행도 측정 결과

제안된 통합모형시스템의 수행도 평가는 EPC와 슈하트관리도 통합시스템, EPC와 EWMA관리도 통합시스템, EPC와 CUSUM관리도의 통합시스템에서 PM 값을 산출하여 비교한다. <표 3>은 EPC와 SPC 통합시스템의 수행도 측정결과가 평균PM 값으로 나타난다. 각란모형  $n_t$ 는 AR(2)모형에 따른다고 가정한다. EWMA와 EPC통합모형시스템은 전반적으로 PM값이 적다.

<표 3> AR(2)에서  $U_t$ 의  $\psi$  값(0.7, 0.25),  $\theta$  값(0.1, 0.4) 일 때 평균PM.

품질특성의 쉬프트된값	공정조절이전 값	EPC	EPC/ 슈하트	EPC/ EWMA $\theta_1=0.1$	EPC/ EWMA $\theta_2=0.4$	CUSUM h=4, k=0.5
1	3.648 (0.0050)	3.365 (0.0059)	3.305 (0.0048)	3.315 (0.0052)	3.209 (0.0049)	2.421 (0.0052)
2	3.648 (0.0049)	3.383 (0.0060)	3.323 (0.0051)	3.333 (0.0052)	3.229 (0.0051)	2.428 (0.0052)
5	3.648 (0.0050)	3.476 (0.0073)	3.417 (0.0051)	3.428 (0.0053)	3.324 (0.0051)	2.479 (0.0064)
7.5	3.648 (0.0045)	3.601 (0.0085)	3.366 (0.0052)	3.554 (0.0058)	3.405 (0.0055)	2.554 (0.0067)
10	3.648 (0.0048)	3.768 (0.0118)	3.408 (0.0058)	3.734 (0.0069)	3.343 (0.0068)	2.660 (0.0070)

#### 4. 결론

본 연구에서 설계한 EPC와 SPC통합모형시스템은 평균이 이동할 때(Drifting mean) 사용한다. 공정조절모형  $u_t$ 는  $n_t$ 가 AR(2) 모형에 따른다고 가정하여 설계하였다. SPC/EPC통합모형시스템은 시뮬레이션을 통하여 가피원인을 탐지하는 능력과 정확하고 우수한 공정조절능력이 나타난다.

통합모형시스템은 슈하트관리도와 EPC통합모형, EWMA관리도와 EPC통합모형, CUSUM관리도와 EPC통합모형을 사용하였다. 수행도 측정은 평균편차제곱의 합을 PM값으로 나타내었다. 수행도 평가에서, 공정변동은 탁월하게 감소되었다. <표 3>은 각란모형이 AR(2)일 때 통합시스템의 평균PM 값이다. 수행도 측정의 평균 PM값은 AR(2)모형이 AR(1)모형을 사용할 때 보다 PM값이 적게 나타난다.

향후 연구 과제로는 SPC와 다중변수에 의한 EPC통합모형과 고차 자기회귀에 의한 각란모형에 대한 개발이 기대된다.

#### 5. 참고 문헌

- [1] 김종걸, 채호식(1988), CUSUM 관리도에 관한 조사연구, 성균관대학교 과학기술연구소 과학기술편, 제39집 No. 2.
- [2] Anderson O. D., (1976). *Time Series and Forecasting*, Butterworth, London.
- [3] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M.(1976). *Time Series Analysis, Forecasting, and Control*. Holden-Day, San Francisco, CA.
- [4] Deming, W. E. (1950). *Some Theory of Sampling*. John Wiley & Sons, NY.
- [5] Lucas, J. M., and M. S. Saccucci (1990), "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes : Properties and Enhancements", *Technometrics*, Vol. 32.
- [6] MacGregor, J. F.(1990). "A Different View of the Funnel Experiment". *Journal of Quality Technology* 22, pp.255~259.
- [7] MacGregor, J. F. and T. J. Harris(1990), "Discussion of 'EWMA Control Schemes: Properties and Enhancement' by Lucas and Saccucci". *Technometrics* 32, pp.23~26.
- [8] MacGregor. j. f. A Different Wiew of the Funnel Experiment vol. 22.No. 4. October 1990. J, Q. T
- [9] Montgomery, D. C., Johnson, L. A. and Mardiner, J. S.(1990), *Forecasting and Time Series*, 2nd ed., McGraw-Hill, NY.