

# 지진파 전파 모의를 위한 불균등 격자 및 시간간격 유한차분법

## Discontinuous Grids and Time-Step Finite-Difference Method for Simulation of Seismic Wave Propagation

강태섭\*                      박창엽\*\*  
Kang, Tae-Seob              Baag, Chang-Eob

---

### ABSTRACT

We have developed a locally variable time-step scheme matching with discontinuous grids in the finite-difference method for the efficient simulation of seismic wave propagation. The first-order velocity-stress formulations are used to obtain the spatial derivatives using finite-difference operators on a staggered grid. A three-times coarser grid in the high-velocity region compared with the grid in the low-velocity region is used to avoid spatial oversampling. Temporal steps corresponding to the spatial sampling ratio between both regions are determined based on proper stability criteria. The wavefield in the margin of the region with smaller time-step are linearly interpolated in time using the values calculated in the region with larger one. The accuracy of the proposed scheme is tested through comparisons with analytic solutions and conventional finite-difference scheme with constant grid spacing and time step. The use of the locally variable time-step scheme with discontinuous grids results in remarkable saving of the computation time and memory requirement with dependency of the efficiency on the simulation model. This implies that ground motion for a realistic velocity structures including near-surface sediments can be modeled to high frequency (several Hz) without requiring severe computer memory.

---

### 1. 서론

지진 발생시 나타나는 효과는 그 규모와 지진파의 방사 형태 등 지진원 자체의 특성에 따라 많은 부분이 결정되지만, 매질의 속도 및 구조적인 특성과의 상호작용으로 인하여 실제 관측되는 지반운동의 양상은 지역적으로 매우 복잡하게 된다. 이러한 효과는 지진원에 바로 인접한 지역 또는

---

\* 학생회원 · 서울대학교 지구환경과학부, 박사과정

\*\* 정회원 · 서울대학교 지구환경과학부, 교수

상당히 먼 지역에서도 지진파 에너지의 집중에 중요한 영향을 준다. 1985년 멕시코 지진 발생시 진앙으로부터 300 km 이상 떨어진 멕시코시에서의 막대한 피해 및 1995년 고베 지진에 의한 좁고 긴 피해지역 형태 등이 그러한 예이다.

단순한 매질 구조를 가정한 상태에서의 지진파 전파 특성은 비교적 잘 알려져 있다. 반면에 2차원 또는 3차원적인 매질의 효과를 파악하기 위해서는 진원으로부터 먼 거리까지 상대적으로 고주파수 (보통 1 Hz 이상) 성분을 포함하는 파동을 고려해야 한다. 이러한 경우, 일반적으로 등간격의 격자를 이용한 유한차분법 등이 주로 사용되었다. 그러나 대규모의 처리 및 기억용량 뿐만 아니라 계산에 소요되는 시간이 막대하기 때문에 실제 적용에 있어서 많은 제약이 뒤따른다. 실제로 이와 관련된 기존의 연구들은 1 Hz 이하의 비교적 저주파수를 갖는 지반운동 모의에 만족해야 했다. 이 또한 많은 경우에 있어서, 모의 가능한 최대주파수가 모델 내에서 가장 낮은 매질속도에 의하여 결정되기 때문에, 지표 근처의 낮은 전단파 속도를 갖는 퇴적구조에 대하여 실제보다 높은 값을 가정해야만 하는 경우가 일반적이다. 그러므로 실제적인 속도구조를 이용한 지반운동 모의를 위하여, 가능한 한 높은 주파수 성분을 고려할 수 있는 방법의 개발은 수치모의 연구의 중요한 목표가 되고 있다.

일반적인 유한차분법은 균일한 격자 및 시간간격을 사용하는데, 속도에서 큰 차이를 갖는 불연속면이 존재할 경우 고속도층에서의 공간적 과샘플링(oversampling) 뿐만 아니라 저속도층에서의 시간적 과샘플링의 문제가 발생한다. 이것은 기억용량 및 계산시간에 있어서 비효율성을 극대화시키는 요인이 된다. 한편 Moczo (1989), Jastram and Tessmer (1994), Pitarka (1999), Aoi and Fujiwara (1999), Hayashi *et al.* (2001), Wang *et al.* (2001) 등은 불균일한 격자간격을 사용함으로써 공간적인 과샘플링의 문제를 해결하였다. 반면에 시간적인 과샘플링의 문제를 다룬 연구는 Falk *et al.* (1998)과 Tessmer (2000) 이외에는 찾아보기 어렵다. 그러나 이들의 연구 또한 시간에 대하여 다중적분을 사용하기 때문에, 지진파 전파 모의 연구를 위하여 가장 보편적으로 사용되는 엇갈린 격자법 (staggered grid) (Virieux, 1986)에 대해서는 적용하기 어려운 단점이 있다.

이 연구에서, 일차 속도-응력 관계식으로 표현되는  $P$ - $SV$  계에 대하여 엇갈린 격자를 이용한 유한차분법을 시간 및 공간의 불균등한 격자로 표현하는 방법(Locally Variable Time-Step Scheme, 이하 LVTS)에 대하여 소개하고자 한다.

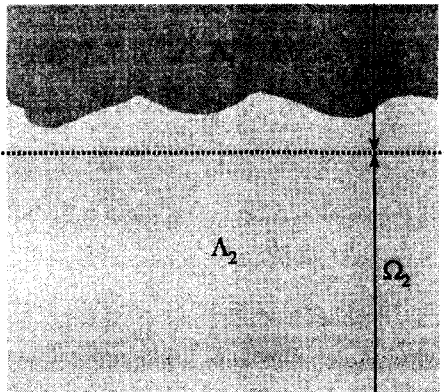


그림 1. 높은 전파 속도를 갖는 매질  $\Lambda_2$ 와 낮은 전파 속도를 갖는 매질  $\Lambda_1$ 이 접촉하는 모델. 두 지역  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 의 범위가 화살표로 지시되어 있다. 이러한 형태의 속도구조는 모암에 둘러싸인 국부적인 형태의 저속도 매질 또는 다층 구조를 갖는 매질들로 구성될 수 있다.

## 2. 불균등 시간 및 공간 격자법

유한차분법에 의한 계산 영역을 서로 다른 격자 간격을 갖는 두 개의 지역으로 구성한다 (그림 1). 지역  $\Omega_1$ 은 낮은 전파속도를 갖는 매질  $\Lambda_1$ 과 이와 접촉하면서 높은 전파속도를 갖는 매질  $\Lambda_2$ 의 일부를 포함한다. 지역  $\Omega_2$ 는 매질  $\Lambda_1$ 과 접촉하는 일부를 제외한 매질  $\Lambda_2$ 의 대부분을 차지한다. 여기서 두 지역  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 는 완전히 분리되어 있지 않고, 불연속면 근처의 매질  $\Lambda_2$ 의 내부에서 불연속 공간 및 시간 격자 간격의 변이대 역할을 하는 중첩지역을 공유한다. 지역  $\Omega_2$ 에서의 공간 및 시간 격자 간격은 지역  $\Omega_1$ 에서 보다 3배만큼 더 크다. 두 지역에서의 공간 및 시간 간격은 각 해당 지역에서의 적절한 안정조건을 만족해야 한다.

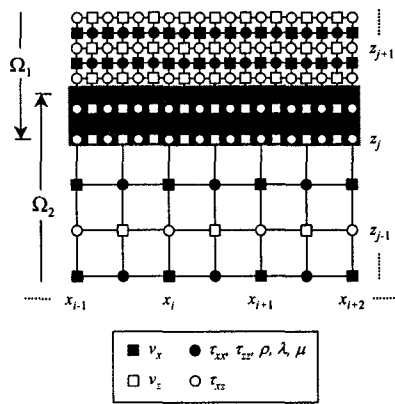


그림 2. 불균등 공간 격자 간격으로 이루어진 엇갈린 격자의 변수 배치. 음영지역은 지역  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 가 중첩되는 변이대.

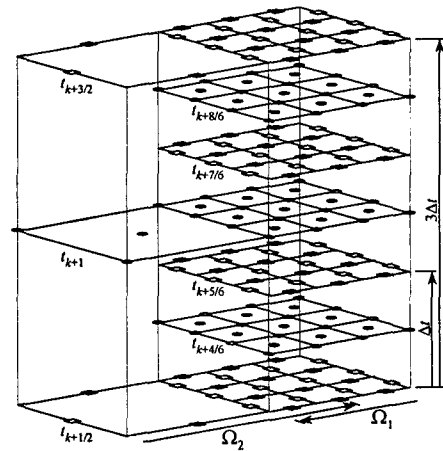


그림 3. 불균등 공간 격자 간격에 맞추어진 불균등 시간 격자 간격의 진행.

그림 2와 3은 각각 불균등 공간 및 시간 간격에 대한 도식을 나타낸다. 지역  $\Omega_2$ 에서 속도와 응력 성분에 대하여 공간 격자 간격( $3\Delta h$ )과 시간 격자 간격( $3\Delta t$ )은 지역  $\Omega_1$ 에서의 간격( $\Delta h, \Delta t$ )보다 3배 더 크도록 구성되어 있음을 볼 수 있다. 지역  $\Omega_1$ 의 경계에서 각 성분의 계산은 지역  $\Omega_2$ 의 미래 시간단계에서의 값을 필요로 한다. 지역  $\Omega_2$ 에서의 그러한 값들은, 시간간격  $\Delta t$ 를 갖는 지역  $\Omega_1$ 에서의 계산과 상관없이, 시간간격  $3\Delta t$ 를 가지고 유한차분식을 통해 계산될 수 있다. 따라서 지역  $\Omega_1$ 의 경계에서의 성분 값은 지역  $\Omega_2$ 의 과거와 미래 시간에서의 값을 내삽(interpolation)함으로써 구할 수 있다.

## 3. 정확도

소개된 방법의 타당성과 정확도를 설명하기 위한 수치실험을 실시하였다. 그 결과를 해석적인 해 및 균일한 공간 및 시간 간격을 이용한 일반적인 방법(Constant Grid and Time-Step scheme, 이하 CGTS)에 의한 결과와 비교하였다. 계산에 사용된 진원시간함수는 Ricker wavelet이고, 매질은 P파와 S파의 속도가 각각 3.5 km/s, 2.0 km/s, 밀도가 2.0 g/cm<sup>3</sup>인 균질한 완전 무한체이다.

### 3.1 해석적인 해와의 비교

해석적인 해로서 완전 무한체 내에 수직력이 작용하였을 때의 2차원 탄성 파동방정식에 대한 결과를 사용하였다 (Pilant, 1979). 그림 4는 해석해와 수치해가 계산되는 진원과 3개의 관측점의 위치를 나타낸다. LVTS법에 대하여, 격자변수는 지역  $\Omega_1$ 에서  $(\Delta h, \Delta t) = (0.005 \text{ km}, 0.0005 \text{ s})$ 이고 지역  $\Omega_2$ 에서  $(3\Delta h, 3\Delta t) = (0.015 \text{ km}, 0.0015 \text{ s})$ 이다. 또한 해석해와 LVTS법에 의한 결과 사이에서 예상되는 차이의 원인을 분석할 목적으로 CGTS법에 의한 결과를 함께 제시하였다.

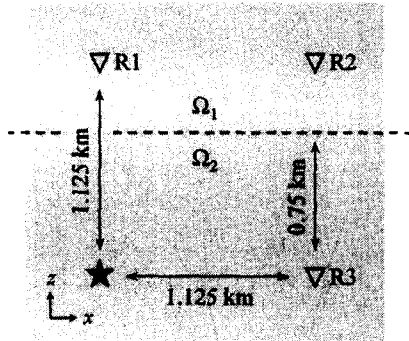


그림 4. 완전 무한체 모델에서의 진원(별표)과 세 관측점의 위치(역삼각형). 점선은 LVTS법에서 사용된 내삽이 수행되는 위치를 가리킨다.

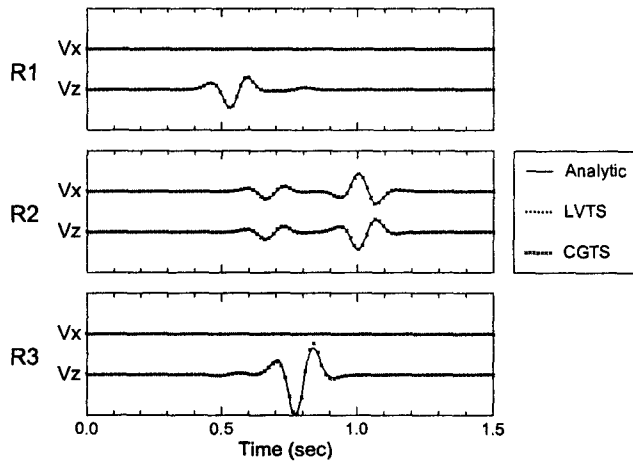


그림 5. 그림 4에 표시된 세 관측점에서의 해석 해와 수치 해의 비교

그림 5는 이들 3가지 방법에 의한 결과를 비교한 것이다. 전체적으로 유사한 결과를 보여주는 것을 알 수 있다. 특히 LVTS법에 의한 결과에서 지역  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$  사이에 공간 및 시간 간격이 달라짐으로서 생길 수 있는 인위적인 파형을 찾아보기 어렵다. 반면, 관측점 R3의 수직성분에서 해석해와 수치해 사이의 차이를 볼 수 있다. 이 차이는 LVTS법과 CGTS법에 의한 결과에 공통적으로 나타나기 때문에, 그 원인은 LVTS법에 있다기 보다는 엇갈린 격자를 이용한 유한차분법에 내재된 것으로 이해할 수 있다. Tessmer (2000)에서도 또한 이와 비슷한 결론을 내린 바 있다.

### 3.2 불균등 격자 사이의 내삽 오차에 의한 효과 분석

LVTS법에서 오차가 발생할 수 있는 가장 가능한 원인으로 조밀한 샘플링 지역( $\Omega_1$ )에서의 파동을 계산하기 위하여 사용한 내삽 오차를 생각할 수 있다. 이러한 내삽 오차를 정량적으로 분석하기 위하여 2가지의 수치실험을 실시하였다.

**실험 1.** 먼저 LVTS법과 CGTS법에 의한 결과를 비교하고 일정한 시간에서의 파동장을 기록한 스냅샷에 대하여 각 격자점에서의 오차를 계산하였다. 이 실험에서 사용된 단위 격자변수는  $(\Delta h, \Delta t) = (0.005 \text{ km}, 0.0005 \text{ s})$ 이다. 진원시간함수로서 Ricker wavelet이 사용되었고 폭발진원을 가정하였다. LVTS법에서 진원을 포함하는 지역의 격자변수는 CGTS법에서 사용된 것과 동일하게 하였는데,

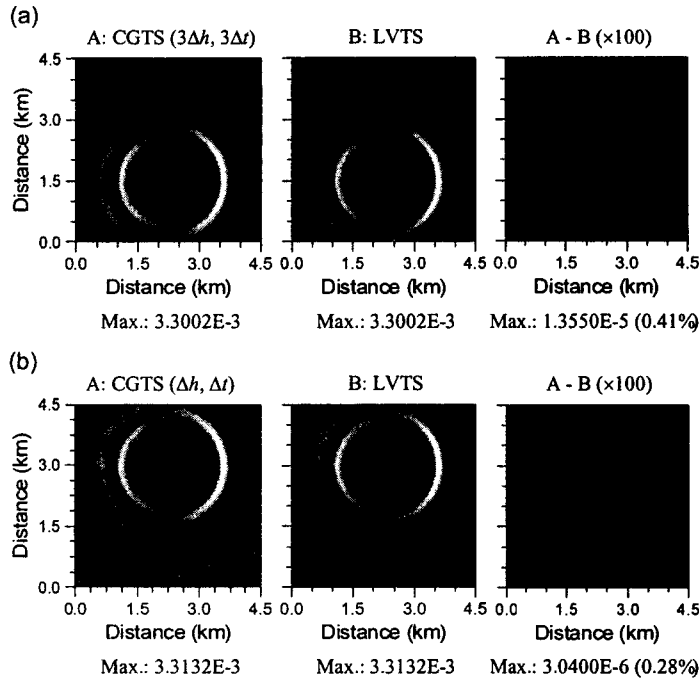


그림 6. LVTS법과 CGTS법의 차이 비교 ( $t=0.5985$  s). (a) 진원이 성긴 격자 간격을 갖는 지역  $Q_2(3\Delta h, 3\Delta t)$ 에 위치한 경우, (b) 진원이 조밀한 격자 간격을 갖는 지역  $Q_1(\Delta h, \Delta t)$ 에 위치한 경우. LVTS법에서 내삽은 수직거리 2.235 km에서 수행된다.

이것은 진원의 생성 단계에서 격자변수의 차이로 인하여 발생할 수 있는 두 방법 사이의 차이를 배제하기 위해서이다. 그러므로 LVTS법과 CGTS법에 의한 결과의 차이를 계산하였을 때 발생할 수 있는 값들은 단지 LVTS법에서 사용된 내삽 과정에서의 상대적인 오차만을 나타내게 된다.

그림 6은  $t = 0.5985$  s에서의 수평 속도 성분에 대한 스냅샷을 나타낸다. 그림 6(a)는 진원이 성긴 격자가 사용된 지역  $Q_2(3\Delta h, 3\Delta t)$ 에 위치하고 있는 경우에 LVTS법에 의한 결과와 CGTS법에 의한 결과의 비교를 나타낸다. 반면에, 그림 6(b)는 조밀한 격자가 사용된 지역  $Q_1(\Delta h, \Delta t)$ 에 진원이 위치한 경우의 결과를 비교한 것이다. 우측 끝의 스냅샷은 LVTS법과 CGTS법에 의한 결과 사이에 각 격자점에서의 오차를 나타내고 있으며, 뚜렷한 오차의 양상을 보여주기 위하여 각 오차를 100 배로 늘렸다. 오차를 나타내는 스냅샷에서, 내삽에 의한 인위적인 파상들이 LVTS법의 변이대가 위치한 선상에서 생성되고 있는 것을 알 수 있다. 제시된 스냅샷에서 최대오차는 CGTS법에 의한 결과의 0.41%에 불과하다. 그림에서 단지 일정한 시간에 대한 스냅샷만이 제시되었지만, 매 시간 단계에서의 최대오차는 시간이 진행함에 따라서 큰 변화를 보이지 않았다.

실험 2. CGTS법에서 고정된 시간 격자 간격에 대하여 공간 격자 간격을 변화시킨 효과와, 반대로, 고정된 공간 격자 간격에 대하여 시간 격자 간격을 변화시켰을 때의 효과를 분석하였다. 이 실험은 안정조건을 만족시키는 격자변수의 변화가 결과에 얼마나 영향을 미칠 수 있는가에 대한 정보를 제시해 줄 수 있다. 단위 격자변수로  $(\Delta h, \Delta t) = (0.005 \text{ km}, 0.0008 \text{ s})$ 가 사용되었다. Ricker wavelet 진원시간함수와 수직 방향으로 작용하는 진원이 사용되었다.

그림 7(a)는  $\Delta t$ 로 고정된 시간 격자 간격에 대하여 각각  $\Delta h$ 와  $3\Delta h$ 의 공간 격자 간격으로 계산한  $t = 0.6392$  s에서의 스냅샷을 비교한 것이다. 그림 7(b)는  $3\Delta h$ 로 고정된 공간 격자 간격에 대하여

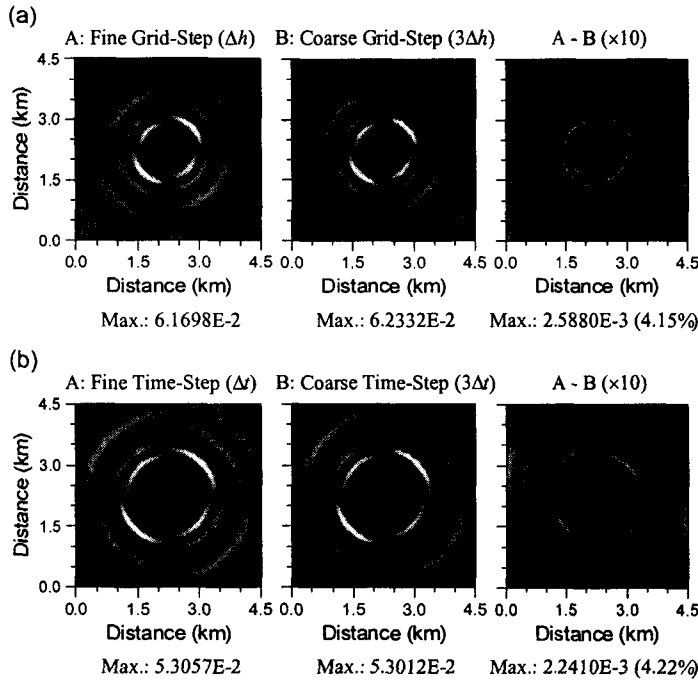


그림 7. 격자변수의 변화에 따른 효과. (a) 고정 시간 격자 간격 ( $\Delta t$ )에 대한 공간 격자 간격의 변화 ( $\Delta h$ 와  $3\Delta h$ ) ( $t=0.6392$  s), (b) 고정 공간 격자 간격( $3\Delta h$ )에 대한 시간 격자 간격의 변화 ( $\Delta t$ 와  $3\Delta t$ ) ( $t=0.7968$  s).

각각  $\Delta t$ 와  $3\Delta t$ 의 시간 격자 간격으로 계산한  $t = 0.7968$  s에서의 스냅샷을 비교한 것이다. 우측에서의 스냅샷은 각 격자점에서 두가지 격자변수를 사용한 결과의 스냅샷의 오차를 나타낸 것이다. 여기서 오차는 10배 곱해진 값이다. 이 두가지 예에서 최대 오차는 4% 이상으로 나타났다.

실험 1과 2의 결과를 종합하였을 때, LVTS법에서 사용된 내삽에 의한 오차( $\sim 0.41\%$ )는 격자변수를 변화시켰을 때 발생할 수 있는 오차( $> 4\%$ )에 비하여 무시할 만 하다. 따라서 LVTS법의 내삽은 결과에 크게 영향을 미칠 정도의 인위적인 파상을 만들어내지는 않는다고 말할 수 있다.

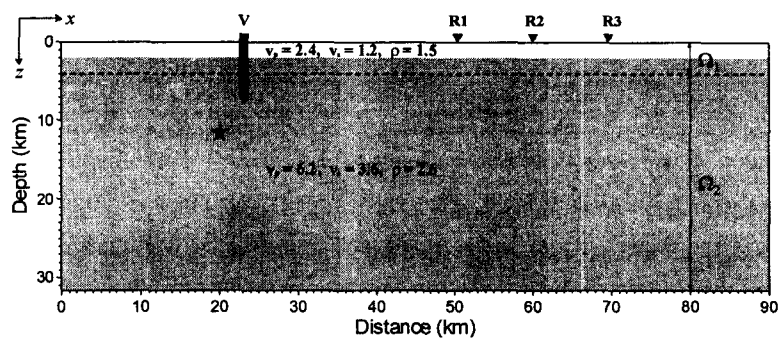


그림 8. 2층 속도구조 모델. 별표( $x=20.175$  km,  $z=11.425$  km)는 수직방향으로 작용하는 진원의 위치를 나타낸다. V는 지역  $Q_1$ 에서 ( $0.0 \text{ km} \leq z \leq 4.0 \text{ km}$ )의 구간에  $0.05 \text{ km}$  간격으로, 지역  $Q_2$ 에서 ( $4.0 \text{ km} \leq z \leq 7.9 \text{ km}$ )의 구간에  $0.015 \text{ km}$  간격으로 설치된 수직배열의 관측점을 나타낸다. R1, R2, R3는 자유표면에서 각각  $50.45 \text{ km}$ ,  $60.05 \text{ km}$ ,  $69.65 \text{ km}$ 에 설치된 관측점을 나타낸다. 점선은 지역  $Q_1$ 과  $Q_2$ 가 중첩하는 변이대의 위치를 나타낸다.

표 1. 층상 구조 모델에 대한 모의 변수

Parameters	Region $\Omega_1$	Region $\Omega_2$
Spatial step (km)	0.05	0.15
Temporal step (s)	0.005	0.015
Simulation time (s)	30.0	
Dominant period (s)	1.0	

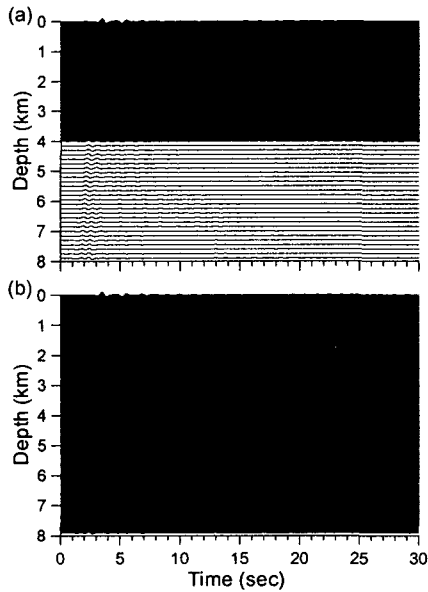


그림 9. 그림 8의 수직배열 관측점에서 수직성분 속도기록. (a) LVTS법, (b) 지역  $\Omega_1$ 에 해당하는 격자변수를 사용한 CGTS법

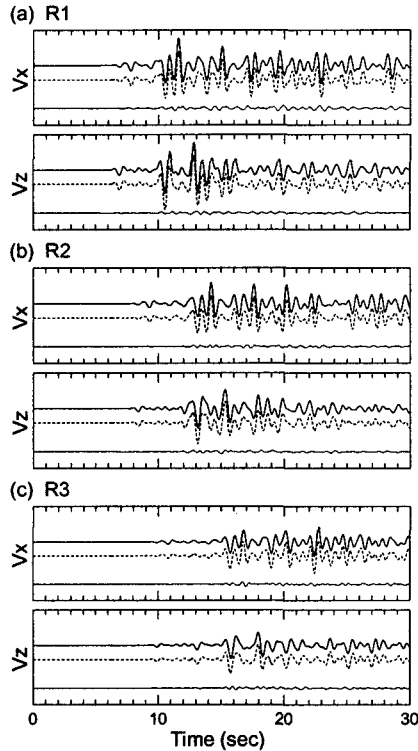


그림 10. 그림 8의 자유표면 상의 관측점 R1, R2, R3에서 LVTS법 (실선)과 CGTS법 (점선)을 이용하여 계산한 속도기록의 비교. 얇은 실선은 두 방법에 의한 결과의 차이를 나타낸다.

#### 4. 계산 예

기반암과 그 상부의 퇴적층을 가정한 2층의 속도구조에 대하여 LVTS법을 적용하였다 (그림 8). 이러한 구조는 일반적인 지층의 양상으로서 두 개의 층 사이에 큰 속도 대비를 보여주는 것이 보통이다. 일반적으로 사용되는 균일한 간격의 격자를 가정하였을 경우 (CGTS법), 수치 해의 안정성을 보장하기 위해서는 상부 퇴적층의 저속도를 표현할 수 있는 가장 작은 격자 간격을 고속도의 하부 기반암 영역까지 적용해야 하므로 공간 및 시간에서 불필요한 과샘플링(oversampling)을 하게 된다.

진원으로 1초의 특성주기를 갖는 Ricker wavelet이 속도의 수직성분에 가해졌다. 이 계산에 사용된 변수들에 대한 세부사항은 표 1에 제시되어 있다. 그림 9(a)는 LVTS법을 이용하여 그림 8의 수직배열의 관측점에서 계산한 속도의 수직성분을 나타낸 것이다. 그림 9(b)는 같은 관측점에서

CGTS법을 이용한 계산 결과이다. 전체적으로 이 두 결과는 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 특히 그림 9(a)에서 공간 및 시간 격자 간격의 변화에 따른 간섭파의 생성을 찾아보기는 어렵다. 또한 전체 30초의 모의 시간 동안, 격자 간격의 변화가 이루어지는 경계부에서 내삽 오차에 의해 발생할 수 있는 비정상적인 파상을 감지하기는 어렵다. 이러한 사실은 서로 다른 격자 간격을 갖는 지역 사이에서 이루어지는 공간 및 시간에서의 내삽이 그 경계를 지나는 파의 연속적인 진행에 큰 간섭을 하지 않는다는 것을 말한다.

그림 10은 자유 표면에서 계산한 속도의 수직성분 기록을 나타낸다. 이들 관측점의 위치는 그림 8에 제시되어 있다. LVTS법과 CGTS법을 사용하여 계산한 결과는 전반적으로 잘 일치하고 있고 약간의 오차를 확인할 수 있다. 그림에서 제시한 결과에서 오차는 모두 10% 이내이다. 한편 LVTS 법에서는 공간 및 시간에서 성긴 격자 간격이 사용된 지역에 진원이 위치한 반면, CGTS법에서는 전체 영역에 대하여 공간 및 시간 모두 3배 조밀한 격자간격이 사용되었다. 따라서 3절에서 확인한 정확도 비교에서 알 수 있는 것처럼, 오차의 대부분은 진원이 위치한 지역에서 사용한 격자 간격의 차이로 인한 것이라고 말할 수 있다. 이 계산에서 LVTS법에 의한 계산에 사용된 기억용량과 계산시간은 CGTS법에 의한 것의 약 20% 정도에 불과하다.

## 5. 토의 및 결론

불균등한 공간 및 시간 격자 간격을 이용한 유한차분법이 균등 격자 간격을 이용한 기존의 방법에 비하여 갖는 최대의 장점은 기억용량과 계산 시간을 현저하게 줄일 수 있다는 것이다. 따라서 동일한 계산 환경에서 훨씬 높은 주파수 성분을 갖는 파동의 전파를 보다 빠른 시간에 계산할 수 있다.

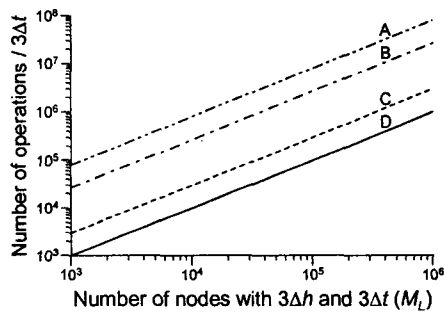


그림 11. 연산 회수의 비교. A) 3차원 CGTS 법, B) 2차원 CGTS법, C) 불균등 공간 격자 간격만을 사용한 경우, D) LVTS법.

일반적인 경우에 있어서 LVTS법의 효율성을 파악하기 위하여 다음과 같은 조건을 고려해 볼 수 있다. 먼저 격자변수 ( $\Delta h$ ,  $\Delta t$ )를 갖는 격자점의 개수가  $M_S$ 이고, 격자변수 ( $3\Delta h$ ,  $3\Delta t$ )를 갖는 격자점의 개수가  $M_L$ 인  $N$ 차원의 영역을 가정한다. 이 때 CGTS법을 사용할 경우 필요한 격자점의 수를  $M_C$ 라고 하였을 때,  $M_C = M_S + 3^N \times M_L$ 의 관계를 얻을 수 있다. 그러므로,  $N=2$  인 2차원의 경우, CGTS법은 LVTS법 보다  $1 + 8 \times M_L / (M_S + M_L)$ 배 만큼 더 많은 기억 용량을 필요로 한다. 또한 3차원의 경우에는 CGTS법이 요구하는 기억용량은 LVTS법의  $1 + 26 \times M_L / (M_S + M_L)$ 배가 된다.

계산 시간의 측면에서, LVTS법이  $3\Delta t$  만큼 진행하는 동안 CGTS법은  $\Delta t$ 의 시간 간격을 가지고



$3 \times M_S + 3^{N+1} \times M_L$  회의 반복계산을 수행하여야 한다. 같은 경우에 대하여, LVTS법은  $3 \times M_S + M_L$  회의 계산을 수행하는 것으로 충분하다. 즉 CGTS법은 LVTS법 보다  $(3^{N+1} - 1) \times M_L$  회 만큼 더 많은 계산을 수행하여야 한다. 그림 11은 각 경우에 대하여 반복계산 회수의 비교를 나타내고 있다. 그림에서  $M_L$  이 증가함에 따라 LVTS법에 의한 계산 효율이 현저하게 증가하는 것을 알 수 있다.  $M_L$  이 증가한다는 것은 전체 속도 구조에서 상대적으로 높은 속도를 차지하는 부분이 상대적으로 커진다는 것을 의미한다. 일반적으로 지진원을 포함하는 기반암의 영역은 지표 가까이의 낮은 속도를 갖는 퇴적층의 영역에 비하여 월등히 크다.

이 연구에서 큰 속도 대비를 갖는 구조에서의 지반운동 모의를 위하여 LVTS법에 의한 유한차분법이 효율적으로 사용될 수 있음을 보였다. 제시된 예가  $P$ - $SV$ 계에 국한되었지만,  $SH$  파의 전파를 LVTS법으로 다루는 것은 이보다 간단하며 3차원 문제로의 확장 역시 2차원 문제에서 고려된 것 이외의 특별한 사항은 없다. 또한 원리적으로 LVTS법은 파동방정식과 같이 시간 종속 쌍곡선 함수를 지배방정식으로 하는 어떤 종류의 문제에도 적용할 수 있다.

#### 참고문헌

1. Aoi, S., and Fujiwara, H., 3D finite-difference method using discontinuous grids, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.89, 1999, pp.918-930.
2. Falk, J., Tessmer, E., and Gajewski, D., Efficient finite-difference modelling of seismic waves using locally adjustable time steps, *Geophys. Prosp.*, Vol.46, 1998, pp.603-616.
3. Jastram, C., and Tessmer, E., Elastic modeling on a grid with vertically varying spacing, *Geophys. Prosp.*, Vol.42, 1994, pp.357-370.
4. Hayashi, K., Burns, D. R., and Toksöz, M. N., Discontinuous-grid finite-difference seismic modeling including surface topography, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.91, 2001, pp.1750-1764.
5. Moczo, P., Finite-difference technique for  $SH$  waves in 2-D media using irregular grids: Application to the seismic response problem, *Geophys. J. Int.*, Vol.99, 1989, pp.321-329.
6. Pilant, W. L., *Elastic Waves in the Earth*, Elsevier, New York.
7. Pitarka, A., 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.89, 1999, pp.54-68.
8. Tessmer, E., Seismic finite-difference modeling with spatially varying time steps, *Geophysics*, Vol.65, 2000, pp.1290-1293.
9. Virieux, J.,  $P$ - $SV$  wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, Vol.51, 1986, pp.889-901.
10. Wang, Y., Xu, J., and Schuster, G. T., Viscoelastic wave simulation in basins by a variable-grid finite-difference method, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol.91, 2001, pp.1741-1749.