

이동최소자승법을 이용한 선형동기전동기의 디텐트력 특성 예측

김영균, 김성일, 권순오, 홍정표
 창원대학교

Prediction of Detent Force on Linear Synchronous Motor by means of Moving Least Square Method

Young-Kyoun Kim, Sung-il Kim, SooN-o Kwon, Jung-Pyo Hong
 Dept. of Electrical Engineering in Changwon Nat'l Univ.

Abstract - The Response Surface Methodology is frequently used for building an approximation model. However, its approximation errors often occur in engineering problem, because of the use of the Least Square Method. Therefore, this paper introduces the Moving Least Square Method to obtain the more accurate Response Surface Model, and then the detent force of a Permanent Magnet Linear Synchronous Motor is applied to verify the accuracy of the introduced method.

무요소법은 초창기 제안된 Smoothed Particle Hydrodynamics(SPH)에서 발전하여 Moving Least Square를 이용한 방법, Diffuse Element를 이용한 방법, Element Free Galerkin 방법, Reproducing Kernel 방법등이 소개되었으며, 최근 들어 이 방법들을 사용하여 전자기적 현상을 해석한 논문들이 발표되었다 [2], [3].

본 논문에서는 Element Free Galerkin 방법에 사용된 이동최소자승법을 소개하고 Response Surface Method에 결합하여 Response surface Model를 만드는데 사용하였다.

1. 서 론

최근 들어 설계공간내의 전기기기의 특성 예측 및 최적설계의 응용에 있어서 Response Surface Methodology(RSM)가 자주 이용되고 있다. RSM은 주어진 샘플 데이터를 이용하여 설계공간 내에서 설계변수에 대한 응답(PMLSM의 추력특성)을 전반적으로 예측하게 하는 통계적인 근사기법이다 [1].

RSM은 주어진 샘플 데이터로부터 Least Square Method라는 고전적인 방법을 이용하여 근사함수를 만든다. 따라서 근사값의 오차를 줄이려면 고차의 근사방정식을 사용하거나 많은 샘플 데이터를 필요로 한다. 하지만 고전적인 근사기법은 이러한 노력에도 불구하고 근사값의 정밀도를 향상시키기에는 한계가 있다. 이러한 근사기법의 한계를 극복하기 위해서 여러 가지 기법들이 연구되고 있으며, 그중하나가 이동최소자승법(Moving Least Square Method : MLSM)이다 [2], [3].

본 논문에서는 MLSM를 소개하고 이를 이용하여 Response Surface Model을 생성하고 근사값의 정확성 향상에 대하여 고전적인 기법과 비교하여 고찰하였다. 근사값 비교를 위해서 영구자석 선형동기 전동기의 디텐트력에 대한 Response Surface Model 생성을 예로 들었다. 디텐트력은 PMLSM의 추력리플을 발생하는 주요한 원인으로서 전동기 설계시 반드시 고려해야하는 특성중 하나이다 [4]. PMLSM은 에너지 밀도가 높은 자석 재료의 개발과 전력전자 기술 및 디지털제어 기술의 발달과 함께 별도의 동력 변환장치 없이 직선 추진력을 얻을 수 있으므로 리니어 엘리베이터, 공작기계 및 반도체 운송장비 등의 서보용으로 정밀제어 시스템에 널리 응용되고 있다. 따라서 설계공간 내에서 PMLSM의 디텐트력을 정확하게 예측할 수 있는 Response Surface Model을 만들 수 있다면 PMLSM의 추력 특성개선 및 최적설계에 응용할 수 있을 것이다.

2. 이동최소자승법

이동최소자승법은 무요소법(Meshless Method or Element Free Method)에서 절점 정보만을 가지고 형상함수를 생성하기 위해서 사용되는 기법이다. 무요소법은 기존의 유한요소법의 요소분할로 인하여 야기되는 단점을 극복하기 위해서 개발된 새로운 수치해석기법이다.

2.1 이동최소자승법의 개념

이동최소자승법의 개념은 이동처리(Moving Process)를 통해서 전역적인 근사를 한다는 것이다 [2], [3]. 영역 Ω 에서 정의된 임의 연속함수 $U(x)$ 의 근사함수 $U^h(x)$ 는 다음식과 같이 근사될 수 있다 [3].

$$U^h(x) = \sum_{j=0}^m P_j(x) a_j(x) = P(x)^T a(x) \tag{1}$$

여기서, 미지수 $a(x)$ 는 공간좌표 x 에 대한 함수이다. 그리고 $P(x)^T$ 는 다음식과 같이 공간좌표 x 에 대해서 $m+1$ 의 독립 항을 가진 m 차 다항식의 기저이다.

$$P(x)^T = [1, x, \dots, x^m] \tag{2}$$

임의의 점 x 주변에서 가중함수 W 가 0이 아닌 소영역의 절점수를 NP 라고 할 때, 소영역 Ω_I 에 대한 제곱의 합 J 는 식(5)와 같은 함수 형태로 표현할 수 있다.

$$J = \sum_{I=1}^{NP} (W(I)(U(x_I) - U^h(x_I))^2) \tag{3}$$

여기서 $W(I)$ 은 가중함수이다. 식(3)에 식(1)을 대입하여 잔차함수 J 를 다음식과 같이 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$J = (Pa(x) - U)^T W(x) (Pa(x) - U) \tag{4}$$

여기서 $P, U, W(x)$ 는 각각 다음식과 같이 표현된다.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_{NP} & \dots & x_{NP}^m \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$U^T = [U_1, U_2, \dots, U_{NP}] \tag{6}$$

$$W(x) = \begin{pmatrix} W(x-x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W(x-x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W(x-x_{NP}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

식(4)을 다음식 (8)과 같이 최소화 하면,

$$\frac{\partial J}{\partial a(x)} = 0 \quad (8)$$

미지수 $a(x)$ 를 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)U \quad (9)$$

여기서 A, B 는 아래와 같다.

$$A = P^T W(x) P \quad (10)$$

$$B = P^T W(x) U \quad (11)$$

따라서 근사함수 $U^h(x)$ 는 식(9)를 식(1)에 대입하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$U^h(x) = P(x)^T A^{-1}(x) B(x) U \quad (13)$$

2.2 가중함수

이동최소자승법에서 가중함수 $W(x)$ 는 매우 중요한 역할을 한다. 이 가중함수 $W(x)$ 는 영향영역 Ω 내에서 양의 값을 가지며 유일한 $a(x)$ 를 결정하기 위해서 임의의 근사점 x 점에서 가까운 점 x_i 에 대해서 큰 값을 가지고 먼 거리에 있는 점에 대해서는 작은 값을 가진다. 따라서 가중함수는 다음식과 같이 두 점 사이 거리의 함수로 정의된다 [3].

$$W(x) = W_l(d/r) \quad (14)$$

여기서 $d = \|x - x_i\|$ 이고, $r = \alpha d_l$ 로서 영향영역의 반경을 나타내며, α 는 scaling factor이다.

이러한 가중함수의 형태는 Spline 함수가 많이 사용되는데 본 논문에서는 quadratic Spline 함수를 사용하였으며 다음식과 같다.

$$W(x) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 8\left(\frac{d}{r}\right)^3 - 3\left(\frac{d}{r}\right)^4, & \frac{d}{r} \leq 1 \\ 0, & \frac{d}{r} > 1 \end{cases} \quad (15)$$

3. 적용 예 : 영구자석 선형동기전동기

3.1 해석대상

그림 1에 해석 모델인 양측식 PMLSM의 기본적인 구조를 나타내었다. 고정자측은 치/슬롯 구조를 가지는 코어에 3상권선이 감겨져 있으며, 이동자측은 계자자속원로서의 영구자석과 자속의 경로를 만들어주기 위한 back iron으로 구성되어 있다. 해석 모델의 1차측은 극수와 슬롯수 비가 4:3으로 영구자석 4극당 3개의 슬롯으로 구성되며, 2차측 영구자석은 12극(편측)으로 1차측보다 길이가 짧다.

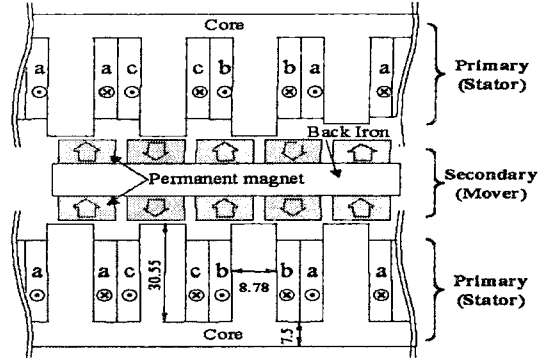


그림 1 양측식 영구자석 선형 동기전동기의 구조도
Fig. 1 Basic structure of a double sided PMLSM

따라서 본 연구에서는 단부구조로 인하여 디텐트력에 포함되어 있는 end force를 같이 고려하기 위해서 전동기의 전 영역을 해석하였으며, 이하 본 논문에서 디텐트력은 단부에 의한 end force를 포함한다.

3.2 해석방법

본 논문에서는 PMLSM의 특성해석을 위해서 재질의 비선형성과 형상의 복잡함을 고려하기 위해서 유한요소법을 이용하였다. 영구자석을 포함하는 해석 대상의 자기벡터포텐셜 \vec{A} 를 계변수로 하는 지배방정식은 맥스웰 방정식으로부터 식 (1)과 같이 정의된다.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J}_0 + \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \vec{M}_r \quad (16)$$

여기서, \vec{J}_0 는 입력 전류밀도, \vec{M}_r 은 영구자석의 잔류자화량, μ 는 투자율, μ_r 은 영구자석의 비투자율이다. 식(1)을 2차원 유한요소해석을 위해서 정식화하면 다음식 (2)와 같이 쓸 수 있다.

$$-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = J_0 + J_m \quad (17)$$

여기서, A, J_0, J_m 은 z 방향 성분이며, J_m 은 영구자석에 의한 등가자화 전류밀도이다.

또한, 맥스웰 응력텐서 T_x, T_y 를 사용하면 식(3)과 같이 추력과 수직력을 구할 수 있다.

$$F_x = h \int T_x^{(e)} dl, \quad F_y = h \int T_y^{(e)} dl, \quad (18)$$

여기서 h 는 해석모델의 z 축 방향의 길이로서 철심의 적층 폭을 나타내고, 맥스웰 응력텐서 T_x, T_y 는 다음식과 같이 주어진다.

$$T_x^{(e)} = \frac{1}{\mu_0} B_x^{(e)} B_y^{(e)} n_y, \quad (19)$$

$$T_y^{(e)} = \frac{1}{2\mu_0} (B_y^{(e)2} - B_x^{(e)2}) n_x,$$

여기서 $B_x^{(e)}, B_y^{(e)}$ 는 한 요소내의 자속밀도 x, y 성분이고 n_x, n_y 는 적분경로에 수직인 외향 단위법선 벡터의 y 성분이다.

3.3 설계변수 정의

본 논문에서는 PMLSM의 추력 리플을 저감을 위해서 1/4 슬롯 피치만큼 스큐를 부여 하고, 단부에 영구자석을 사용한 보조극을 설치하였다. 이때 보조극의 위치와 크기 변화에 따른 디텐트력의 Response Surface Model을 만들기 위해서 그림 2와 같이 보조극의 폭(x_1), 보조극의 두께(x_2) 및 인접하는 주자극과의 이격거리(x_3)를 설계변수로 정의하였다.

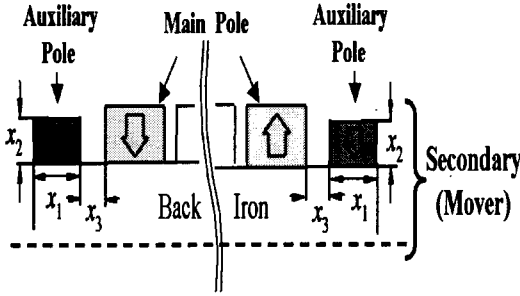


그림 2 설계변수에 대한 설명
Table 2 Description of design variables

4. 디텐트력 예측 결과 비교

설계공간 내의 설계변수(입력)에 대한 출력특성을 근사하는데 있어서, 실험계획법으로 얻어지는 표본자료와 최소자승법을 이용하는 기존의 RSM은 입/출력관계를 근사함수로 표현하는데 있어서 한계가 있다. 따라서 본 논문에서는 이러한 근사오차를 줄이기 위해서 이동최소자승법을 소개하였다. 기존의 최소자승법과 이동최소자승법의 근사결과를 비교하기 위하여 실험계획법 중에서 3^3 요인배치법[4]을 이용하여 27개의 표본을 취하였으며, 각 설계변수의 수준을 표1에 나타내었다.

표 1 표본의 설계변수 수준
Table 1 Levels of design variables for the samples

설계변수 \ 수준	-1	0	1
x1	1.5	4.5	7.5
x2	1.5	4.5	7.5
x3	2	3.6	5.2

추출한 27개의 표본으로부터 기존의 최소자승법과 이동최소자승법을 이용하여 영구자석 선형동기전동기에 대한 디텐트력의 2차 다항식회귀모형을 생성하고, 두 방법의 근사정도를 비교하기 위하여 먼저 추출한 27개의 표본내의 설계변수 범위 내에서 2^3 요인배치법[4]을 이용하여 설계변수에 대한 임의조합 8개를 추출하여 유한요소 해석치와 두 근사모형에 대한 결과값에 대한 오차분석을 하고 그림 3에 나타내었다. 임의조합에 사용한 설계변수의 수준은 표 2에 나타내었다.

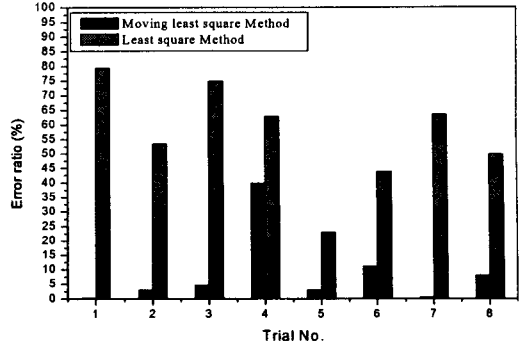


그림 3 LSM과 MLSM에 대한 오차평가
그림 3 Compare the error of LSM with that of MLSM

표 2 오차평가를 위한 표본의 설계변수 수준
Table 2 Levels of design variables for test samples

설계변수 \ 수준	-1	1
x1	1.5	6
x2	1.5	6
x3	2	4.4

주어진 설계변수 영역 내에서 두 가지 방법으로 영구자석 선형동기전동기의 디텐트력을 근사한 결과를 유한요소 해석 값과 각각 비교해볼 때, 8개의 임의표본에 대해서 일반적인 최소자승법은 평균오차가 56.3 (%)인 반면에 이동최소자승법을 이용한 경우에는 평균오차가 8.7 (%)로 감소하였다.

5. 결 론

본 논문에서는 통계적 근사기법을 이용하여 Response Surface Model 생성 시에 근사정밀도를 향상시키기 위한 방법으로 이동최소자승법을 소개하였으며, 기존의 최소자승법을 이용하는 것 보다 이동최소자승법을 이용하는 것이 근사오차를 줄일 수 있음을 확인하였다. 하지만 이동최소자승법은 필연적으로 비교적 많은 수의 표본을 필요로 하고, 가중함수의 선택 및 scaling factor (α) 결정 등의 문제가 남아있으므로, 이러한 부분에 대한 면밀한 검토가 이뤄진다면 근사정밀도를 더욱 향상시킬 수 있을 것으로 사료된다.

[참 고 문 헌]

[1] Raymond H. Myers, Response Surface Methodology, John Wiley & Sons, 1995.
 [2] Vlatko Cingoski, et al., "Element-Free Galerkin Method for Electromagnetic Field Computations", *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 34, No. 5, pp. 3236-3239, 1998.
 [3] Simore. A. Viana, et al., "Moving Least Reproducing Kernel Method for Electromagnetic Field Computation", *IEEE Trans. on Magnetics*, vol. 35, No. 3, pp. 1372-1375, 1999.
 [4] 임기채, 우중근, 홍정표, 김규택, "영구자석 선형전동기의 디텐트력 저감법," 대한 전기학회 논문지, Vol. 49B, No. 11, pp. 749-756, 2000.