

매개화된 민감도 해석에 의한 3차원 비선형 모델의 형상 최적화

류 재 섭, 고 창 섭, *윤 소 남
충북대학교 전기공학과, *한국기계연구원

3D Shape Optimization of Nonlinear Electromagnetic Device Using Parameterized Sensitivity Analysis

Jae Seop Ryu, Chang Seop Koh, *Sonam Yun
Chungbuk National University, *Korea Institute of Machinery and Materials

Abstract - In this paper, a 3D shape optimization algorithm which guarantees a smooth optimal shape is presented using parameterized sensitivity analysis. The design surface is parameterized using Bezier spline and the control points of the spline are taken as the design variables. The parameterized sensitivity for the control points are found from that for nodal points. The design sensitivity and adjoint variable formulae are also derived for the 3D non-linear problems. Through an application to the shape optimization of 3D electromagnet to get a uniform magnetic field, the effectiveness of the proposed algorithm is shown.

1. 서 론

최근의 전기 기기 및 전자소자는 단순히 필요한 성능을 갖도록 설계하는 것으로 목적을 달성하는 것이 아니라, 필요한 성능을 가지면서도 최소의 비용 또는 최대 효율을 갖도록 하는 최적 설계를 요구하고 있다. 특히, 형상최적 설계 문제에서는 목적함수의 값을 최적화 시키는 것뿐만 아니라, 실제 현장에서 제작될 수 있는 설계가 되어야 하기 때문에 형상에 관한 제약 조건이 주어지게 된다.

유한요소법과 민감도 해석을 이용한 형상 최적화 문제에서 각각 독립적인 설계변수를 설정하는 경우에는 목적함수의 값은 충분히 작아지나 최적화 된 형상이 톱니 모양과 같이 실제로 제작하기 어려운 경우가 종종 발생하게 된다[1,2,3]. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 2차원 문제에서는 설계변수로 선정된 각각의 절점들 사이의 관계에 선형 제약조건(linear constraint)을 주거나, 보간 함수(spline function)를 이용하는 방법들이 연구되어 왔다[2,3,4].

본 논문에서는 매질의 비선형성을 고려한 3차원 유한요소법과 매개화된 설계 민감도 해석(parameterized design sensitivity analysis)을 이용한 3차원 전자소자의 형상최적화 알고리즘을 제시하였다. 설계 민감도 계산에서는 계산시간의 단축을 위하여 보조변수(adjoint variable)를 이용하였고, 민감도와 보조변수에 관한 식을 변요소를 이용한 3차원 비선형 유한요소 해석에 적용할 수 있도록 유도하였다. 최적화 하고자 하는 표면은 Bezier 스플라인을 이용하여 보간 하였으며, 최적화 과정 중에서 요소의 재구성은 탄성체의 구조변형 해석(structural deformation analysis)에 기초한 요소망 변형법(mesh relocation method)을 이용하였다[2,4,5].

2. 비선형성을 고려한 설계민감도 해석

전자장 문제의 지배방정식은 맥스웰 방정식으로부터

다음과 같이 얻어진다.

$$\nabla \times \nu(\nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \tag{1}$$

여기서 \vec{A} 는 자기벡터 포텐셜이고, ν 는 자기 저항률 그리고 \vec{J} 는 입력 전류밀도이다. Galerkin 법을 이용하여 근사화한 후 변요소를 이용한 유한 요소법을 적용하면 i 번째 변에서의 잔차 G_i 는 다음과 같이 된다.

$$G_i = \sum_{e=1}^{Nel} G_i^e = \sum_{e=1}^{Nel} \left\{ \sum_{k=1}^6 \nu^e K_{ik}^e A_i^e - Q_i^e \right\}, \quad i=1,2,\dots,N \tag{2}$$

여기에서 Nel 과 N 은 각각 전체 요소 수와 변의 수이고, 첨자 (e)는 (e)번 요소에 대한 물리량임을 뜻하고, A_i^e 는 요소 (e)의 1 번째 변에서 정의된 자기벡터 포텐셜이고, 사면체 변요소를 이용하는 경우에 요소 (e)에 대해서 다음과 같이 표현된다.

$$K_{ik}^e = \frac{1}{18^2 V_e} \sum_{h=x,y,z} S_{kh} S_{ih} \tag{3}$$

$$Q_i^e = \frac{1}{36 V_e} \sum_{h=x,y,z} N_{kh} J_h \tag{4}$$

여기서 V_e 는 요소 (e)의 체적율, J_k 는 입력 전류의 k 방향 성분분을 나타내며, S_{kh} 와 N_{kh} 는 형상함수로부터 계산된다[5].

정자계 문제의 형상 최적화를 다루는 경우에 목적함수는 일반적으로 설계변수 $[p]$ 와 상태변수 $[A]$ 의 함수로 정의되며, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F = f([p], [A(p)]) \tag{5}$$

설계변수가 요소분할 과정에서 발생된 절점으로 구성되는 경우, 설계 민감도는 설계변수에 대한 목적함수의 변화율로서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \frac{\partial F}{\partial [p]^T} \Big|_{A=const.} + \frac{\partial F}{\partial [A]^T} \cdot \frac{\partial [A]}{\partial [p]^T} \tag{6}$$

여기에서 설계변수의 변화에 대한 상태변수의 변화율 $\partial [A] / \partial [p]^T$ 는 식 (2)를 설계변수 $[p]$ 에 대하여 미분함으로써 얻을 수 있고, 매질의 비선형성을 고려한 설계 민감도 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \frac{\partial F}{\partial [p]^T} \Big|_{A=const.} - [\lambda]^T \{ [M]_{Linear} + [M]_{Nonlinear} \} \tag{7}$$

$$[M]_{Linear} = \sum_{i=1}^{Nc} \left\{ \nu^e \frac{\partial [K^e]}{\partial [p]} [\bar{A}^e] - \frac{\partial [Q^e]}{\partial [p]} \right\} \quad (8)$$

$$[M]_{Nonlinear} = \sum_{i=1}^{Nc} [K^e] [\bar{A}^e] \frac{\partial \nu^e}{\partial B_i^e} \cdot \frac{\partial B_i^e}{\partial [p]} \quad (9)$$

여기에서 보조변수(adjoint variable) $[\lambda]$ 는 다음과 같이 정의된다[5].

$$[\lambda]^T = \frac{\partial F}{\partial [A]} [K]^{-1} \quad (10)$$

3. 매개화된 설계민감도 해석

전기 기기의 형상최적 설계에 있어 최적으로 설계하고자 하는 표면의 형상은 수치 제어기기(NC Machine) 등을 이용하여 충분히 가공할 수 있어야 한다. 이러한 이유로 최적화 하고자 하는 표면의 형상을 제어점(control points)을 이용하여 스플라인한다. 이 경우 설계변수는 유한요소법의 적용을 위하여 발생된 절점의 좌표로 정의되지 않고 형상을 결정짓는 제어점의 좌표로 정의된다. 따라서 형상을 매개화하는 경우에는 설계변수인 제어점에 대한 설계 민감도를 유도하여야 한다.

Bezier 스플라인을 이용하는 경우 표면에 위치한 점 $P(x_k, y_k, z_k)$ 에 대응하는 극부 좌표를 (u_k, v_k) 라고 하되(단 $0 \leq u_k, v_k \leq 1$) 다음 관계식이 성립하고

$$z_k = S(u_k, v_k) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M B_{i,N}(u_k) B_{j,M}(v_k) C_{ij} \quad (11)$$

여기서, N 과 M 은 각각 u 와 v 방향으로의 Bernstein 기저함수의 차수를, C_{ij} 는 u 와 v 의 방향으로 각각 i 및 j 번째 제어점을 나타내고, 차수 N 인 Bernstein 기저함수 $B_{i,N}(u_k)$ 는 다음과 같이 정의된다[6].

$$B_{i,N}(u_k) = {}_N C_i u_k^i (1-u_k)^{N-i} \quad (12)$$

여기서, ${}_N C_i$ 는 조합(combination)을 나타내며, 기저함수의 차수는 그 방향으로의 제어점의 수보다 1만큼 작은 값이다.

이와 같이 최적화하고자 하는 표면을 스플라인 하는 경우, 설계변수인 제어점의 좌표 $[C]$ 와 유한요소법의 적용과정에서 설정된 절점의 좌표 $[P]$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$[p] = [J][C] \quad (13)$$

여기서 $[J]$ 는 자코비안(Jacobian) 행렬로써 식 (12)를 이용하여 계산된다.

제어점에 대한 설계민감도는 식(7)과 식 (13)을 이용하여 다음과 같이 계산된다[3,6].

$$\frac{dF}{d[C]^T} = \frac{dF}{d[p]^T} \frac{d[p]}{d[C]^T} = \frac{dF}{d[p]^T} [J] \quad (14)$$

계산된 제어점의 민감도에 의하여 각각의 제어점의 위치는 경사법(gradient method)을 이용하여 계산되고, 이로부터 최적화 하고자 하는 표면의 절점들의 위치가 계산된다.

4. 해석 및 고찰

3차원 비선형 유한요소해석과 제약된 설계민감도 해석, 경사법(gradient method), 그리고 요소망 변형법을 결합하여 매질의 비선형을 고려한 3차원 형상최적화 알고리즘을 개발하였다.

개발된 알고리즘을 공극 중심에서의 자속밀도의 분포를 일정하게 만들기 위한 3차원 전자석의 형상최적화 문제에 적용하였다. 그림 1에는 해석모델의 형상 및 치수를 보이고 있으며, 해석 영역은 전자석의 대칭성을 고려하여 전체 영역의 1/4만 해석하였고, 입력전류는 12240 [AT]이다.

목표 영역에서의 설계 목표 값은 2300[Gauss]이고, 목적함수는 다음과 같이 정의하였다.

$$F = \sum_{n=1}^{Np} (B_n^* - B_n)^2 \quad (15)$$

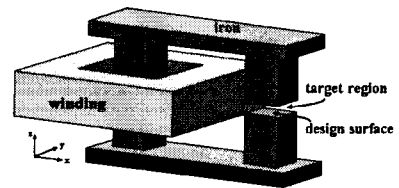
여기에서 B_n^* 는 목표영역의 sampling point k 에서의 자속밀도 B_z 값이고, B_n 는 설계 목표 값이며, Np 는 목표영역에서 선택된 절점의 개수로 158개의 절점을 선택하여 사용하였다.

본 연구에서는 전자석 표면의 형상 최적화 과정을 매개화를 하지 않은 경우와 Bezier spline을 이용한 매개화 방법에 의하여 수행하고 그 결과를 비교하였다. Bezier spline을 사용한 경우의 제어점의 개수는 각각 5×3 과 9×5 를 사용하였다.

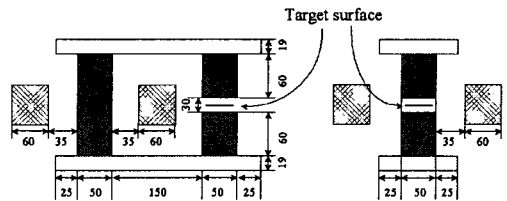
그림 2에는 최적화 과정을 수행하는 동안의 목적함수의 변화를 보이고 있다. 일반적으로 매개화를 하지 않은 경우의 목적함수가 매개화를 사용한 경우의 목적함수보다 작게 나타나며, 매개화를 사용한 경우에는 제어점의 개수가 많을수록 목적함수가 작게 나타남을 그래프를 통해서 알 수 있다.

그림 3에는 전자석 표면의 초기 형상과 매개화를 사용하지 않은 경우의 최적 형상, 그리고 매개화를 사용한 경우의 최적 형상을 보이고 있다.

그림 3(b)의 매개화를 사용하지 않은 경우의 최적 형상은 전자석 표면의 절점이 각각 독립적으로 이동하였기 때문에 매우 불규칙한 형상을 하고 있으나, (c)와 (d)의 최적 형상은 매개화를 하지 않은 경우와 비교하여 매우 완만한 형상을 하고 있다. Bezier spline을 이용한 매개화의 경우에 모든 제어점이 각각의 절점의 변화에 영향을 미치지 않기 때문에, 제어점의 위치와 개수가 최종형상



(a) 3D shape



(b) front view

(c) side view

그림 1 3차원 전자석 모델의 형상[단위:mm]

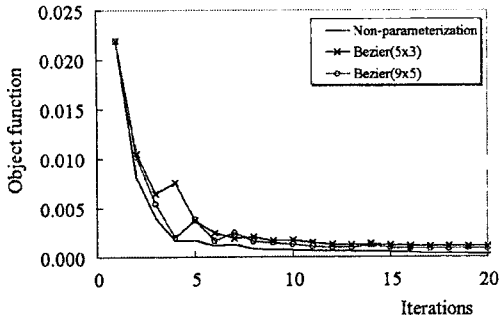


그림 2 목적함수의 변화

에 많은 영향을 미친다. 제어점의 개수가 적은 경우 (5×3)의 최종 형상은 전자석 표면의 양 끝단보다 중심 부분의 하강 정도가 비교적 작지만, 표면의 중앙 부근과 끝단 부근에 제어점을 추가하여 9×5 개의 제어점을 사용한 경우에는 최종 형상이 매개화를 사용하지 않은 경우의 최종 형상에 비슷하면서도 매우 완만한 형상을 하고 있음을 알 수 있다.

최적화 과정에서 요소의 재구성은 요소망 변형법에 의하여 수행되었으며, 이것은 요소망의 재분할 과정이 없이 초기 요소망의 절점의 위치만을 변화시켜 요소를 재구성하는 방법으로 그림 3(a)의 초기 형상과 (b), (c), (d)의 최종형상을 비교하면 초기 요소망의 형상(topology)에는 변화 없이 요소가 변형되었음을 잘 보이고 있다.

그림 4에는 초기 형상에 의한 공극 중심에서의 자속 밀도 분포와 최종 형상에서의 자속밀도 분포를 보이고 있다. 그림 4(a)는 초기 형상에서의 자속밀도 분포이며, 이 경우에는 단부 효과에 의하여 중앙 부근의 자속밀도가 더 높고, 끝단으로 갈수록 자속밀도가 낮아지는 분포를 보이고 있다. 최종 형상에서의 자속밀도 분포는 매개화를 사용하지 않은 경우나 매개화를 사용한 경우 모두 목표 값으로 설정한 자속밀도 2300[Gauss] 부근에서 만족할 만한 분포를 나타내고 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 자성체의 비선형성을 고려한 유한요소

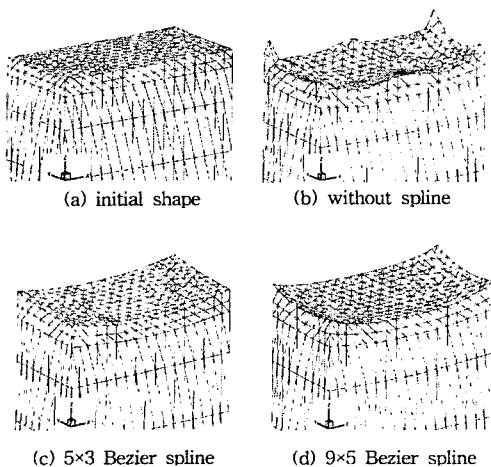


그림 3 전자석의 초기 형상과 최종 형상

법과 설계 변수의 매개화에 의한 민감도 해석을 이용한 3차원 전자소자의 형상 최적화 알고리즘에 대해서 연구하였다. 매개화를 하지 않는 경우에 설계 변수는 최적화 대상 표면의 절점으로 하지만, Bezier spline을 이용한 경우에는 제어점이 설계 변수가 되어, 표면 절점의 민감도로부터 제어점의 민감도를 계산한 후 각 절점의 위치를 재 계산하였다. 최적화 결과로부터 제어점의 개수와 위치에 따라서 최종 형상이 변화함을 알 수 있었다. 그리고 매개화를 이용한 경우의 최종형상은 실제 제작이 가능할 수 있을 정도로 완만한 형상을 가지며, 목적 함수는 매개화를 사용하지 않은 경우와 비교해서 조금 높아졌지만, 최종 자속밀도는 거의 비슷한 분포를 보이고 있다.

본 연구의 결과로부터 실질적인 산업현장에서 형상 최적설계가 응용되기 위해서는 설계변수의 매개화를 이용한 형상 최적화 방법이 매우 유용할 것으로 판단된다.

[참고 문헌]

- [1] S.Subramaniam, A.A.Arkadan, and S.R.H. Hoole, "Optimization of a Magnetic Pole Face Using Linear Constraints to Avoid Jagged Contours," *IEEE Trans. on Magn.*, vol.30, pp.3455-3458, 1994
- [2] K. Weeber and S. R. H. Hoole, "A Structural Mapping Technique for Geometric Parameterization in the Optimization of Magnetic Devices", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.33, pp.2145-2179, 1992.
- [3] 이향범, 박일한, 한승업, "설계변수 매개화를 이용한 전기 기기 최적설계," *대한전기학회 논문지*, Vol, 50B, No. 11, pp. 546-555, 2001
- [4] Yingying Yao, Jae Seop Ryu, Chang Seop Koh and Dexin Xie, "The 3D Shape Optimal Design of Transformer Tank Shield by Using Parameterized Design Sensitivity Analysis", *대한전기학회 추계학술대회 논문집*, pp.80-83, 2002. 11, 14-16
- [5] 류재섭, Yingying Yao, 고창섭, "설계 민감도법과 요소망 변형법을 이용한 3차원 비선형 전자소자의 형상최적화", *대한전기학회 추계학술대회 논문집*, pp.124-127, 2002. 11, 14-16
- [6] D. F. Rogers and J. A. Adams, *Mathematical Elements for Computer Graphics*, McGraw Hill, 1990

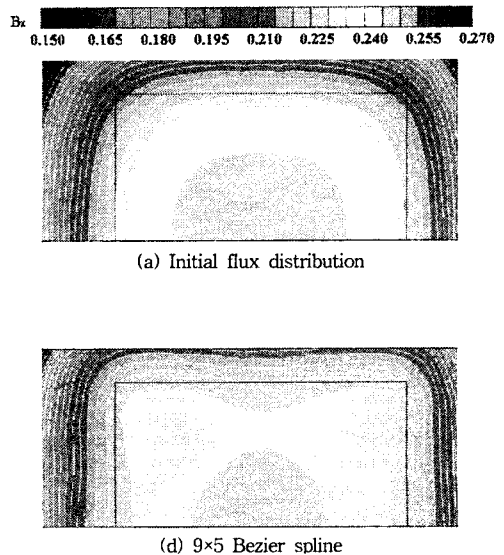


그림 4 공극에서의 자속밀도 분포