

전자기 시스템의 신뢰성 기반 위상최적설계

강제남, 김좌일, 왕세명
광주과학기술원 기전공학과

Reliability-based Topology Optimization for Electromagnetic Systems

Jenam Kang, Chwail Kim, Semyung Wang

Dept. of Mechatronics, K-JIST

Abstract - A reliability-based topology optimization (RBTO) for electromagnetic systems using the finite element method is presented. Permeability and applied current density are considered as uncertain variable. In order to compute reliability constraints, performance measure approach is used. To find the reliability index, the limit state function is linearly approximated at each iteration. Numerical examples show the effectiveness of the proposed method.

1. 서론

일반적인 구조 문제의 최적설계는 설계 변수와 시스템 파라미터의 불확실성 (uncertainty)을 무시하는 결정론적 최적설계 (deterministic optimization)가 행해져 왔다. 변수가 불확실성을 갖는다는 것은 어떤 설계점에서 고정적인 값을 갖지 못하고 확률적인 분포를 갖는다는 것을 의미한다. 확률론적 최적설계 (probabilistic optimization)에서는 이러한 불확실성을 고려하여 목적함수를 최적화 하는 동시에 시스템이 실패할 확률을 최소화하는 해를 구하게 된다.

구조에서의 신뢰성 기반 최적설계 (Reliability-based Design Optimization, RBDO)는 제한 조건의 위반 확률을 이용한 방법으로서 최근 많은 연구가 진행되어 왔다. 제한 조건의 위반 확률을 효율적으로 구하기 위하여 신뢰성 지수 (reliability index)를 도입하여 근사값을 구하는 FORM (first-order reliability method) 방법이 많이 쓰이고 있다.

많은 연구에서 신뢰성 지수를 제한 조건으로 하여 최적설계를 수행하는 RIA (reliability index approach) 방법이 쓰이고 있으며 [1-2], 최근 Tu 와 K.Choi 등은 신뢰성 지수의 역함수를 사용하여 확률 조건을 계산하는 PMA (performance measure approach) 방법을 제안하였다[3].

본 논문에서는 PMA 를 이용하여 신뢰성 기반 최적설계 기법을 전자기 시스템의 위상최적설계에 적용하여 설계 파라미터의 불확실성을 고려한 신뢰성 기반 위상최적설계 (Reliability-based Topology Optimization, RBTO)를 수행하였다. 여기서 불확실성 변수로는 물성치인 투자율과 입력 전류 밀도를 사용하였다.

2. 신뢰성 기반 위상 최적설계의 정식화

신뢰성 기반 최적설계는 결정론적 방법에서와 같은 목적 함수를 가지며, 시스템의 실패 확률을

제한 조건으로 가지게 된다. 신뢰성 기반 최적 설계의 일반적인 정식화는 다음과 같다 [4].

$$\text{Minimize } f(X) \tag{1}$$

$$\text{Subject to } P_f = P(G \leq 0) \leq P_f \tag{2}$$

여기서 G 는 한계 상태식(limit state function)을, P_f 는 $G \leq 0$ 이 될 확률 즉, 시스템이 실패할 확률을 각각 나타낸다.

구조물의 체적을 목적함수로 고려하고, 시스템의 자기 에너지를 한계 상태식이라 정의하면 식 (1)과 (2)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Minimize total volume } V(X) \tag{3}$$

$$\text{Subject to } P_f = P(G \leq 0) \leq P_f \tag{4}$$

$$G = \Psi - \Psi_{\min} \tag{5}$$

$$\Psi = \int_{\Omega} g(A, u) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} B \cdot Hd\Omega \tag{6}$$

한계 상태식 G 의 실패할 확률은 누적 분포 함수(cumulative distribution function)를 통해 아래식과 같이 표현이 가능하다.

$$F_G(g) = \int_{G \leq g} f_x(x) dx \tag{7}$$

여기서 g 는 확률적 반응치(probabilistic performance measure)이며 $f_x(x)$ 는 확률 분포 함수(probability density function)이다.

실패 확률은 목표 신뢰성 지수(target reliability index), $\beta_t = -\phi^{-1}(P_f)$ 를 통해 표현이 가능하며, $\phi(\cdot)$ 는 표준 정규분포를 갖는 누적 확률 분포 함수이다. 식 (4)는 아래식과 같다 [4].

$$F_G(0) \leq \phi(-\beta_t) \tag{8}$$

이 때,

$$F_G(0) = P_f \tag{9}$$

식 (9)는 아래와 같이 두 가지 식으로 다시 표현이 가능하다 [4].

$$\beta_s = -\phi^{-1}[F_G(0)] \geq \beta_t \tag{10}$$

$$g = F_G^{-1}[\phi(-\beta_t)] \geq 0 \tag{11}$$

여기서 β_s 는 현재 설계점에서 신뢰성 지수를

의미하며 식 (10)과 (11)은 각각 RIA 와 PMA 에서의 제한 조건 함수로 사용된다 [4].

위 식을 사용하여 신뢰성 기반 최적 설계의 정식화를 정리하면 다음과 같다. PMA 제한 조건을 사용할 경우

$$\text{Minimize total volume } V(X) \quad (12)$$

$$\text{Subject to } g = F_G^{-1}[\phi(-\beta, I)] \geq 0 \quad (13)$$

이 된다.

3. 확률 제한 조건의 설계 민감도 해석

밀도법(Density Method)을 사용한 위상최적 설계의 경우 설계변수는 ρ_i 이며, 재료 물성치와 아래식과 같은 관계를 갖는다 [5].

$$\mu = (\mu_0 \mu_r - \mu_0) \rho^p + \mu_0, \quad p > 1 \quad (14)$$

$$\int_n \rho(x) d\Omega \leq V, \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega$$

불확정성을 갖는 확률변수가 투자율과 입력 전류 밀도일 경우 식 (5)와 (6)의 한계 상태식으로 부터 PMA 제한 조건의 민감도를 구해보면 다음과 같다.

$$\frac{\partial G}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \Psi(X_1, X_2) \Big|_{\beta=\beta_i} \quad (15)$$

$$X = [X_1, X_2] = [\mu, J_s] \quad (16)$$

4. 예 제

이 장에서는 PMA 확률 제한 조건을 고려하여 전자기 문제에 대해 위상 최적설계를 수행하고, 결정론적 최적설계 결과와 비교해 보았다.

그림 1 은 예제로 사용된 C-core 액추에이터를 나타내며, 이때 사용된 입력전류는 2.5 A/mm² 이며 Core 와 Armature 의 두께는 20mm 이다.

신뢰성 기반 위상최적설계 문제는 다음과 같다.

$$\text{Minimize total volume } V(X)$$

$$\text{Subject to } P_f = P(G \leq 0) \leq 0.135\% (\beta = 3)$$

$$G = \Psi - \Psi_{\min}$$

$$\Psi = \int_n g(A, u) d\Omega = \frac{1}{2} \int_n B \cdot Hd\Omega$$

확률변수 μ 와 J_s 는 모두 정규 분포를 갖는다고 가정하며, 표준 편차는 0.1 μ 와 0.05 J_s 라고 가정한다.

여기서 Ψ_{\min} 의 값은 그림 1 의 초기 모델의 유한요소해석을 통해 시스템이 가지는 초기 자기 에너지를 구해내어 사용하였다.

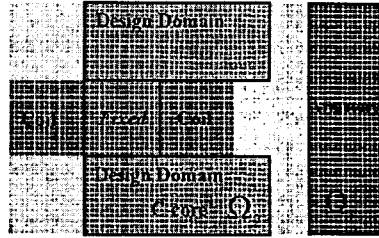


그림 1. C-core 액추에이터 및 설계 영역

4.1 불확실성 변수가 1 개일때(투자율)

확정론적 위상 최적설계(DTO)의 경우 수식화는 다음과 같으며, 최적설계의 결과는 그림 2 와 같다.

$$\text{Minimize Total Volume of Design Domain}$$

$$\text{Subject to } G = \Psi - \Psi_i \geq 0, \quad \Psi_i = 140$$

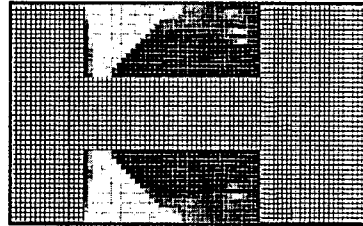


그림 2. DTO 결과

PMA 확률 조건을 고려할 경우의 위상 최적 설계 수식화는 다음과 같으며, 그 결과는 그림 3 과 같다

$$\text{Minimize Total Volume}$$

$$\text{Subject to } G = \Psi - \Psi_i \geq 0 \text{ when } \beta_i = 3, \Psi_i = 140$$

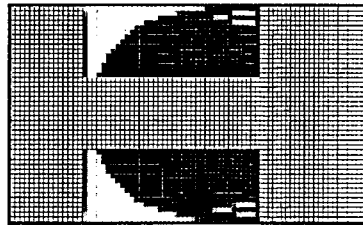


그림 3. PMA 를 이용한 RBTO 결과

표 1 로부터 결정론적 방법에 의한 최적설계의 성공확률이 50%미만 ($\beta = -0.095241$)임을 알 수 있으며, 신뢰성 기반 최적설계를 통해 성공률이 99% 이상 ($\beta = 2.96038$)임을 알 수 있다. 또한, 최적설계 결과를 반영한 유한요소모델을 생성하고 재해석을 수행하여 발생되는 힘을 구해내어 검증하였다.

표 1. DTO 와 RBTO 의 비교

	Objective (Volume)[%]	Energy [J/m]	Force [Nm]	Reliability
DTO	58.33	139.84	-6047.9	-0.095241
RBTO	73.63	140.25	-6053.2	2.96038

4.2 불확실성 변수가 2 개일때(투자율과 입력 전류 밀도)

불확실성 변수를 투자율과 전류밀도, 두 개를 사용하였을 경우의 최적설계 수식화는 한 개를 사용하였을 때와 같으며, 그 결과는 그림 4 와 같다.

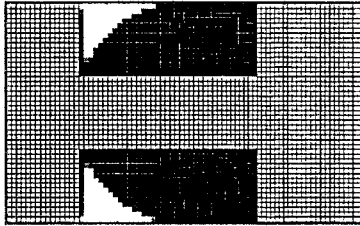


그림 4. PMA 를 이용한 RBTO 결과

RBTO 결과에서 부피를 많이 쓰면 신뢰성이 높아지는 것처럼 생각될 수가 있다. 이에 대한 가능성을 확인해 보기 위해서 그림 4 에서 얻어진 최종 부피를 사용하여 DTO 를 다시 한번 수행하였다. 그 문제의 정의는 아래와 같으며, RBTO 결과와 같은 부피를 사용하여 수행한 DTO 의 결과는 그림 5 와 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \Psi = \text{Energy} \\ & \text{Subject to } V \leq 0.864V_0 \end{aligned}$$

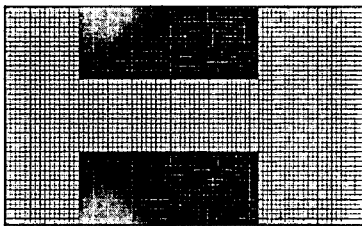


그림 5. DTO 재해석 결과

표 2. 불확실성 변수가 2개일 때의 DTO 와 RBTO의 비교

	Objective (Volume) [%]	Energy [J/m]	Force [Nm]	Reliability
DTO	59.03	139.96	-6048.5	-0.070274
RBTO with PMA	86.40	140.81	-6110.6	3.00241
DTO (volume used as much as RBTO result)	86.40	140.73	-6102.9	2.40125

표 2 는 이에 대한 결과를 나타낸 것이다. 이를 통해 알 수 있는 것은 RBTO 의 결과와 같은 부피를 써서 수행한 DTO 결과의 신뢰성이 RBTO 를 이용해 얻은 결과보다 좋지 않다는 것이다.

5. 결론

본 논문에서는 전자기 시스템의 신뢰성을 고려한 위상 최적설계를 수행하였다. 체적이 목적함수이고 시스템의 자기 에너지가 한계 상태일 때 PMA 를 확률 제한 조건을 고려하였다. 간단한 전자기 예제를 통하여 본 연구에서 제안된 신뢰성을 고려한 위상 최적 설계(RBTO)의 효용성을 확인하였다.

6. 후기

이 연구는 한국과학기술원 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

[참고문헌]

- [1] Belegundu, A. D., 1988, "Probabilistic Optimal Design using Second Moment Criteria", *J. Mech. Transmissions Automat. Design ASME*, Vol. 110, pp. 324-329.
- [2] Nicolaidis, E. and Burdisso, R., 1988, "Reliability based Optimization: A Safety Index Approach", *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, Vol. 100, pp. 111-121.
- [3] Tu, J., Choi, K. K. and Park, Y. H., 1999, "A New Study on Reliability-Based Design Optimization", *Journal of Mechanical Design*, Vo. 121, pp. 557-564.
- [4] Haldar, A. and Mahadevan, S., 2000 "Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design", *John Wiley & Sons, Inc., New York*.
- [5] Wang, S. and Kim, Y, "Topology Optimization of Electromagnetic Systems," IEEE CEFC'2000, Milwaukee, Wisconsin, USA, June 2000.