

전자기력에 대한 설계민감도 계산 및 위상 최적화

문희곤, 왕세명

광주과학기술원 기전공학과

Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization for Electromagnetic Force

Heegon Moon, Semyung Wang

Dept. of Mechatronics, K-JIST

Abstract - This paper presents design sensitivity analysis for the electromagnetic force and torque obtained from Coulomb's virtual work method using the adjoint variable method. And virtual displacement field is calculated from a static structural analysis. Derived equations are verified by comparison with finite different method. And topology optimization for a c-core is given as a verification example.

$$F_s = -\frac{\partial W_{mech}}{\partial s} = \frac{\partial W_{mag}}{\partial s} \quad (3)$$

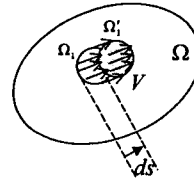


그림 1. 가상일에 의한 전자기력 계산

1. 서론

유한 요소법을 이용한 전자기력의 계산에는 주로 맥스웰 응력 텐서나 가상일에 의한 방법을 쓰고 있다[1]. 그 중에서도 가상일에 의한 방법이 유한요소의 크기에 영향을 덜 받기 때문에 더 많이 사용된다[2].

전자기 시스템에 대한 최적설계를 하기 위해서는 민감도 계산이 요구되는데, 지금까지는 목적함수가 에너지 이거나 맥스웰 응력 텐서에 의한 힘일 때의 민감도 계산이 주로 이루어져 왔다[3,4]. 또 수천개의 설계 변수를 다루는 위상 최적설계를 수행하기 위해서는 보조 변수법에 의한 민감도 계산이 필수적이다.

본 연구에서는 가상일로부터 유도된 전자기력에 대한 보조 설계 민감도식을 유도 하고 유도된 식을 유한 차분법과 비교하였다. 또 이 식을 이용하여 ANSTOPM 이라는 위상 최적설계 프로그램을 개발하여 몇 가지 예제를 실행 하였다.

2. 유한 요소법을 이용한 전자기력 계산

일반적으로 정전계 시스템의 유한요소 지배 방정식은 다음과 같이

$$KA=J \quad (1)$$

나타낼 수 있다. 여기서 K 는 투자율 행렬이며, A 는 벡터 포텐셜, J 는 절점의 전류를 나타낸다. 또 시스템의 에너지는

$$W_{mag} = \frac{1}{2} A^T KA \quad (2)$$

와 같다. 이것으로부터 <그림 1>과 같은 시스템의 Ω<sub>1</sub> 에 작용하는 전자기력을 가상일 원리에 의해 계산하는 방법은

여기에서 s 는 힘을 계산하려는 방향을 나타낸다. 식(1)과(2)로부터

$$F_s = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A^T}{\partial s} KA + A^T \frac{\partial K}{\partial s} A + A^T K \frac{\partial A}{\partial s} \right)$$

그런데 식(1)로부터

$$\frac{\partial K}{\partial s} A + K \frac{\partial A}{\partial s} = 0$$

이므로 결국

$$F_s = -\frac{1}{2} A^T \frac{\partial K}{\partial s} A \quad (4)$$

인 관계를 얻을 수 있다. 결국 s 방향으로의 투자율 행렬에 대한 변화율만 구하면 힘이 계산됨을 알 수 있다. 그런데 투자율 행렬은 다음과 같이 절점의 위치에 대한 함수이고 절점의 변화는 가상변위벡터 V 로 표현할 수 있으므로 상기 변화율은 다음과 같은 방향미분식(directional derivative)을 통하여

$$F_s = \frac{\partial W_{mag}(p+sV)}{\partial p} \Big|_{s=0} = \frac{\partial W_{mag}(p)}{\partial p} V \quad (5)$$

절점벡터 p 에 대한 투자율 행렬의 변화율과 가상변위 V 의 내적으로 표현할 수 있다. 따라서 전자기력은

$$F_s = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial (\tilde{A}^T K \tilde{A})}{\partial p} \right\} \{V\} \quad (6)$$

와 같이 나타낼 수 있으며 여기에서 기호 (~)는 미분시에 상수로 취급됨을 의미한다.

3. 보조 설계 민감도 해석

전자기 시스템에 대한 최적설계를 수행할 때

목적함수는 일반적으로 다음과 같이

$$\psi = \psi(b, A(b)) \quad (7)$$

나타낼 수 있다. 여기에서  $b$  는 설계 변수를 나타낸다. 식 (1)과 (7)로부터

$$\frac{d\psi}{db} = \frac{\partial\psi}{\partial b} - \frac{\partial\psi}{\partial A} K^{-1}(b) \frac{\partial}{\partial b} [K(b)\tilde{A}] \quad (8)$$

과 같은 민감도 식을 유도할 수 있다[5]. 여기에서  $K$  의 역행렬을 구하는 과정을 피하기 위하여 다음과 같이 보조 변수  $\lambda$  를 도입하고

$$\lambda = \left[ \frac{\partial\psi}{\partial A} K^{-1}(b) \right]^T = K^{-1}(b) \frac{\partial\psi^T}{\partial A} \quad (9)$$

이식을 다시 정리하면 다음과 같은 보조 방정식을 얻을 수 있다.

$$K(b)\lambda = \frac{\partial\psi^T}{\partial A} = J_{eq} \quad (10)$$

결국 보조변수  $\lambda$  는 원래의 시스템에 등가전류  $\partial\psi^T / \partial A$  를 주고 해석한 결과의 벡터 포텐셜임을 알 수 있다.

결론적으로 설계 민감도식은

$$\frac{d\psi}{db} = \frac{\partial\psi}{\partial b} - \lambda^T \frac{\partial}{\partial b} [K(b)\tilde{A}] \quad (11)$$

와 같이 구해진다.

목적함수가 전자기력 일 때는 식(6)과 (10)으로부터 다음과 같은 등가 전류

$$J_{eq} = - \left\{ \frac{\partial(K\tilde{A})}{\partial p} \right\} \{V\} \quad (12)$$

를 주고 해석하면 보조 변수를 구할 수 있다.

#### 4. 프로그램 개발

프로그램은 MS VC++6.0 을 기반으로 제작되었으며, ANSYS 의 customer 함수를 사용하기 위하여 Digital Fortran 6.0 도 사용되었다. 또한 분산작업을 위해 <그림 2>와 같이 3 개의 실행파일로 구성되어 하였으며 부수적인 동적 라이브러리(DLL)를 사용하였다.

ANSTOPM 은 Pre/Post 와 최적설계를 수행하며 결과를 텍스트 파일로 저장한다. 또한 iteration 중간에 필요한 메시지를 ANSTOPM 로 보내서 화면에 정보가 실시간으로 출력한다.

이 외의 주요 특징으로는

- MS Windows 98/2000/XP 지원
- Network 을 통한 ANSYS 해석 지원
- Reanalysis 파일 생성
- 다양한 Postprocessor 기능 (Zoom, Rotate, Animate 등)이 있다.

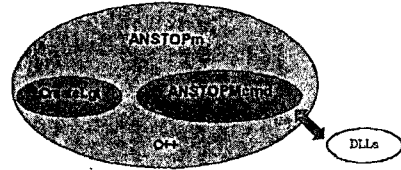


그림 2. 프로그램(ANSTOPM)의 구성

#### 5. 예 제

##### 5.1 전자기력 계산

가상변위에 의한 전자기력계산을 위하여 다음과 같은 C-코어 모델을 선택하였다.

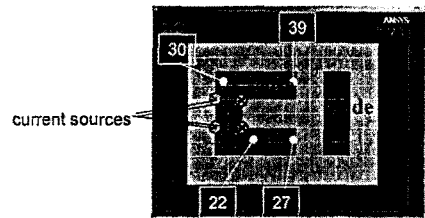


그림 3. 전자기력 계산 및 민감도 식 검증을 위한 모델

우선 가상변위를 계산하기 위하여 위 모델을 정적 구조 해석 모델로 바꾸고, 경계조건으로 C-코어 부분은 고정 시키고 blade 에는 x 방향의 단위 변위를 가하였다. 또 모델 전체의 외각 경계를 고정하였다. 구조 해석을 수행한 결과 <그림 4>와 같은 가상변위를 얻었다. 이 결과로부터 식 (6)을 이용하여 blade 에 작용하는 힘을 구한 결과  $-12.144$  (N)을 얻었다. 한편 ANSYS 내부적으로 계산하는 힘은  $-12.0$  이 나왔다. 이 모델에 대하여 요소를 잘게 나누어서 해석한 결과 전자기력이  $-12.9$  에 수렴함을 확인할 수 있었다. 따라서 본 연구에서 사용한 방법이 좀더 정확함을 알 수 있다.

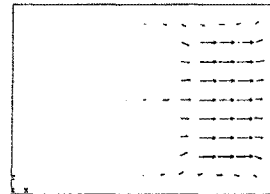


그림 4. 전자기력 계산을 위한 각 절점의 가상 변위

## 5.2 설계 민감도 검증

3장에서 유도된 민감도 식을 검증하기 위하여 이번에도 <그림 3>와 같은 간단한 C-코어를 이용하였다. 네모 안의 숫자는 요소 번호를 나타낸다. 총 4개의 요소에 대해 유한 차분법과 비교한 결과 <표 1>에서 보듯 두 방법이 거의 일치함을 알 수 있었다.

표 1. 요소별 민감도 비교 결과  
(FDM: 유한 차분법, AVM: 보조 변수법)

요소번호	FDM	AVM	AVM/FDM %
22	-6.740E-02	-6.747E-02	100.1
27	-1.490E-02	-1.493E-02	100.2
30	-7.000E-03	-7.054E-03	100.8
39	-1.560E-02	-1.568E-02	100.5

## 5.3 C-코어에 대한 위상최적 설계

위상 최적화에는 이전 절에 사용되었던 c-core에 요소 수를 4 배로 증가시킨 모델을 이용했다. 설계 변수 영역은 C-코어 부분으로 설정했으며 요소의 수를 4 배로 늘려 최적화를 위한 모델을 만들었다. 최적화 문제는 다음과 같이

Maximize : blade 에 작용하는 힘

s.t. : C-코어의 부피를 현재보다 70% 이하

설정 하였다.

최적 설계를 수행한 결과 <그림 5>와 같은 형상을 얻을 수 있었다. 이 때 blade에 작용하는 힘은 <표 2>에서 볼 수 있듯이 위상 최적화를 통하여 70%의 부피만 가지고도 100%의 부피를 다 사용했을 때와 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

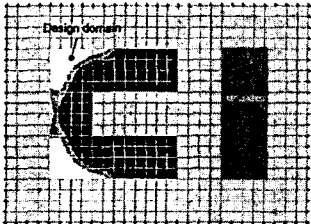


그림 5. C-코어에 대한 위상최적화 결과

표 2. 위상 최적화 결과 비교

	Fx
Original Material (Full Material)	-12.86
Optimum Distribution (70% volume)	-12.69

## 6. 결론 및 향후 계획

본 논문에서는 가상일 방법으로 구한 전자기력에 대한 보조 설계민감도를 계산하고 또 그 결과를 이용하여 위상 최적화를 수행하였다. 정적 구조 문제를 통하여 가상 변위를 구하였으며 이 방법으로 구한 힘이 ANSYS 내부적으로 계산하는 힘보다 정확함을 알 수 있었다. 유도된 민감도 식은 유한 차분법과의 비교를 통하여 검증되었다. 또 전자기용 위상 최적화 프로그램인 ANSTOPM을 개발하여 간단한 모델에 대한 최적화를 수행 하였다. 개발된 프로그램은 향후 보다 복잡하고 실제적인 문제에 대하여 적용할 예정이다.

## 6. 후기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

## [참고문헌]

- [1] Benhama, A., Williamson, A., and Reece, A., 1999, "Force and torque calculation from 2-D and 3-D finite element field solutions", *IEE Proc. -Electr. Power Appl.*, Vol. 146, No. 1, pp. 25-31.
- [2] Coulomb, J.L. and Meunier, G., 1984, "Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation", *IEEE Transaction on Magnetics.*, Vol. MAG-20, No. 5, pp. 1894-1896.
- [3] Wang, S. and Kang, J., 2002, "Topology Optimization of Nonlinear Magnetostatics," *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol. 38, No. 2, pp. 1029-1032.
- [4] Biedinger, J.M. and Lemoine, D., 1997 "Shape Sensitivity Analysis of Magnetic Forces", *IEEE Transaction on Magnetics.*, Vol.33, No.3, pp. 2309-2316.
- [5] Haug, E., Choi, K.K, and Komkov, V., 1986, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, Inc.,