

비-스플라인 보간법을 이용한 영상 변환

이선영, 김성수
충북대학교 전기전자 및 컴퓨터 공학부

Image Transform Using B-spline Interpolation

Sun-Young Lee, Sung-Soo Kim
Chungbuk National University, School of Electrical and Computer Engineering

Abstract - 본 논문은 비-스플라인(B-spline) 보간법을 이용한 영상의 변환에 대하여 논한다. 국소적인 영상의 정보나 세분화된 영상의 정보를 얻기 위해 영상의 확대 변환이 필요하다. 본 논문에서는 영상의 확대 변환을 위해 선형(linear), 큐빅(cubic), 인근치(nearest neighbour)등의 보간법[2]과 비-스플라인(B-Spline) 보간법[1][3][4]을 적용하였다. 실험을 통하여 비-스플라인 보간법이 현재 많이 사용되고있는 인근치 보간법, 선형 보간법, 큐빅 보간법들 보다 상대적으로 우월한 영상의 질을 가져옴을 보였다. 결론적으로, 영상의 기하학적 변환에 있어 기존의 세 가지 보간법들 보다 비-스플라인 보간법을 사용한 경우에 더 좋은 결과를 가지며, 비-스플라인 함수의 차수가 고차로 갈수록 영상의 질이 향상됨을 알 수 있다. 렌즈 등에 의한 왜곡현상을 가지고 있는 위성 사진이나 의료 영상을 기하학적 변환을 통하여 보정하는데 비-스플라인 보간법을 적용할 수 있다.

1. 서 론

왜곡을 가지고 있는 영상을 정확한 영상으로 변환하거나 작은 영상을 확대하고, 또는 커다란 영상을 작게 하는 등의 과정을 영상의 기하학적 변환이라고 한다. 기하학적 변환은 영상처리 방법 중 하나로 원 영상의 좌표 변환을 통하여 새로운 좌표와 결과 영상을 얻는다. 유사 변환(affine transform)은 원 영상의 (x_1, y_1) 에 위치한 화소 값이 평행이동(translation), 회전(rotation), 크기변환(scaling), 전단(shearing)등의 선형 조합에 의해 결과 영상의 (x_2, y_2) 위치로 매핑(mapping)되는 2차 기하학적 변환의 중요한 부분이다. 유사변환의 일부 분인 영상의 확대는 국소적인 영상의 정보나 세분화된 영상의 정보를 얻기 위해 사용된다. 원 영상을 확대하는 것은 어려운 일이 아니지만, 원 영상에서 결과 영상으로 화소(pixel) 값을 매핑 할 때 화소 값을 할당받지 못하는 화소(홀)가 생기는 문제가 발생한다. 화소 값을 할당받지 못한 화소를 홀이라고 부르는데, 이 홀을 적당한 값으로 채워 영상의 질을 향상시키는 것이 관점이다. 이 문제를 해결하기 위해 사용되는 방법이 바로 보간법이다. 가장 쉬운 방법으로는 인근치 보간법(Nearest neighbor interpolation)이 있다. 이 방법은 홀의 값을 이 홀에 이웃하는 화소들의 값으로 채워주는 것이다. 그러나 결과 영상에 계단화 현상이 나타나며, 정확한 영상을 필요로 하는 경우에는 한계가 있다. 이 계단화 현상을 줄일 수 있는 다른 방법에는 선형 보간법(linear interpolation), 큐빅 보간법(cubic interpolation), 그리고 비-스플라인 보간법(B-spline interpolation) 등이 있으며, 더 정확한 영상을 얻을 수 있다. 빈 화소에 값을 할당하기 위하여 주변 화소들의 값의 가중치를 이용하게 되는데 최대한 많은 주변의 화소들을 참조하는 것이 영상의 질을 향상시키게 된다[2]. 이러한 보간법의 차이에 따라 확대 영상의 질이 결정되어 진다. 물론 원 영상 이상으로 질이 좋을 수는 없지만 보간법의 사용여부에 따라 확대 영상의 질을 최대한 원 영상과 비슷하게

만들어 준다. 본 논문에서 인근치, 선형, 큐빅 보간법들 보다 우월한 영상의 질을 가져오는 비-스플라인 보간법을 사용한다. 비-스플라인을 이용한 결과 영상이 다른 세 가지 방법들을 이용한 결과 영상보다 향상됨을 보이고, 비-스플라인 함수의 차수가 고차일수록 영상의 질이 향상되어짐을 보인다. 본 논문의 구성은 2장에서 비-스플라인 보간법에 대하여 설명하고, 3장에서는 비-스플라인을 이용한 영상의 크기 변환에 대하여 설명한다. 4장에서는 위의 세 가지 보간법과 비-스플라인 보간법을 이용하여 확대 변환한 결과 영상을 비교 분석하고, 끝으로 5장에서 총체적 결론을 맺는다.

2. 비-스플라인 보간법

영상 처리에서 보간 과정은 이차 이산 신호 $s(k, l)$, $k, l \in Z$ 로부터 이차원 연속 신호 $s(x, y)$, $s, x, y \in R$ 을 재구성하는 과정이라고 볼 수 있다. 연속 신호의 점 (x, y) 에서의 크기는 그 점에 이웃에 있는 이산 점들로부터 추정해야 한다. 이러한 과정은 식(1)이 나타내는 것과 같이 연속 2차 임펄스 응답 ${}_{2D}\beta(x, y)$ 과 이산 영상의 컨볼루션(convolution)의 형태로 나타낼 수 있다[1].

$$s(x, y) = \sum_k \sum_l s(k, l) \cdot {}_{2D}\beta(x - k, y - l) \quad (1)$$

일반적으로, 대칭이며 분리 가능한 보간 커널(kernel)들은 다음과 같이 사용된다.

$${}_{2D}\beta(x, y) = \beta(x) \cdot \beta(y) \quad (2)$$

Schoenberg[7]의 논문의 결과를 참고로 스플라인의 특성은 다음과 같은 비-스플라인 전개식으로 정의되어진 다[3].

$$s(x) = \sum_{k=0}^n c(k) \beta^n(x - k) \quad (3)$$

식(3)에서 정의된 식은 $\beta^n(x)$ 에 의해 정의되어진 n차 비-스플라인의 중심을 정수 배 이동시킨 것을 나타내며, $\beta^n(x)$ 는 식(4)와 같이 쓸 수 있다. 그리고 비-스플라인 계수 $c(k)$ 는 모델의 파라미터를 나타낸다.

$$\beta^n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k \left(x - k + \frac{n-1}{2}\right)_+^n \quad (4)$$

위 식(4)는 $\beta^n(x)$ 이 n차의 piecewise 다항식임을 보여준다.

스플라인 함수들 중에서 작은 굴곡 특성 때문에 많이 사용되는 큐빅 비-스플라인(Cubic B-spline, 3차 비-스플라인)함수를 식(4)를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\beta^3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - |x|^2 + \frac{|x|^3}{2}, & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{(2-|x|)^3}{6}, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

큐빅 비-스플라인(5)의 적분에서 아래의 식을 구할 수 있다.

$$B_1^3(z) = (z + 4 + z^{-1})/6$$

여기서 필터는

$$(b_1^3)^{-1}(k) \leftrightarrow \frac{6}{z + 4 + z^{-1}} = 6 \left(\frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} \right) \left(\frac{-z_1}{1 - z_1 z} \right) \quad (6)$$

이며, $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ 이다.

입력 $\{s(k)\}_{k=0, \dots, N-1}$ 와 $c^-(k) = c(k)/6$ 를 이용하여, 위 식(6)의 오른쪽은 다음과 같은 반복 알고리즘을 유도한다.

$$c^+(k) = s(k) + z_1 c^+(k-1), \quad (k=1, \dots, N-1) \quad (7)$$

$$c^-(k) = z_1 (c^-(k-1) - c^+(k)), \quad (k=N-2, \dots, 0)$$

첫 번째 필터는 인과(causal)이며 왼쪽에서 오른쪽으로 진행하고, 두 번째 필터는 비 인과(anti-causal)이며 오른쪽에서 왼쪽으로 진행한다. 두 반복 알고리즘의 근사 초기 값($c^+(0)$, $c^-(N-1)$)을 다음과 같이 정한다 [3].

$$c^+(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(k) z_1^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (z_1^{2N-2})^k \sum_{k=0}^{2N-3} s(k) z_1^k \quad (8)$$

$$= \frac{1}{1 - z_1^{2N-2}} \sum_{k=0}^{2N-3} s(k) z_1^k$$

$$c^-(N-1) = \frac{z_1}{(1 - z_1^2)} (c^-(N-1) + z_1 c^+(N-2)) \quad (9)$$

3. 영상의 크기 변환

크기 변환은 영상의 일부분이나 크기의 축소 또는 확대에 유용하게 사용할 수 있는 기하학적 변환을 수행하며, 좌표방향을 따라서 영상을 압축하거나 또는 확장한다. 크기 변환은 영상의 시각적 형상의 변화, 장면(scene) 묘사에서 저장된 정보의 질의 변화 또는 특별한 크기 변환의 특성을 수행하는 다중 영상 처리 과정에서 사전 처리 과정에 주로 사용된다.

그림 1은 크기 변환에 대하여 두 가지 방법을 보여주고 있다. 하나는 확대된 화소의 그룹에 원 영상의 화소 값을 대체시키는 것을 보여주며, 다른 방법은 원 영상에서 이웃한 화소 값들의 보간을 이용하여 확대된 화소들에 대체하는 것을 보여준다.

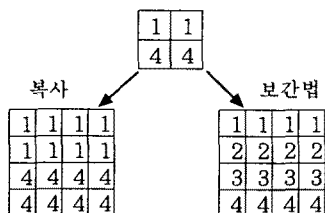


그림 1. 크기 확대 방법
비-스플라인을 이용하여 영상의 특정한 위치 (x, y) 에서

의 값은 다음과 같이 주어진다[3].

$$f(x, y) = \sum_{k_1=0}^{(k_1+K-1)} \sum_{l_1=0}^{(l_1+K-1)} c(k, l) \beta^n(x-k) \beta^n(y-l) \quad (10)$$

여기서 $k_1 = k_1(x) = \lceil x - \frac{n+1}{2} \rceil$, $l_1 = l_1(y) = \lceil y - \frac{n+1}{2} \rceil$ 이고 $K = n+1$ 이다. 여기서 덧셈의 범위를 특정한 위치 (x, y) 이 0이 아닌 가중치를 갖게 하기 위해 제한한다. 영상의 기하학적 변환은 다음과 같은 사상함수(mapping) $(x, y) = G(u, v)$ 에 따라 변환한다. 여기서 (u, v) 는 새로운 영상의 좌표이다. 예를 들어 사상함수 G 가 2×2 직각(orthogonal)행렬에 의해 정의되고 크기 변환을 행한다고 하자. 비-스플라인 변환 알고리즘은 다음과 같다. 먼저 화소 값 $f(k, l)$ 을 필터링 과정을 통해 비-스플라인 계수 $c(k, l)$ 를 계산한다. 즉, 앞에서 구한 1차원의 필터링 알고리즘을 행과 열을 따라 구한다.

다음으로 영상의 점 (x, y) 을 사상 함수를 이용해 변환하고, 결과의 각 위치 (u, v) 에서 원 영상 (x, y) 에 대응하는 계수 값을 정한다. 그리고 실제 영상 값을 식(10)에 따라 계산한다. 이 과정을 통하여 영상의 크기 변환이 이루어진다[6].

4. 실험 및 고찰

이 장에서는 원 영상을 y 축으로 1.5배 증가시켜 영상을 확대 변환하였다. 기존에 사용되어진 인근치 보간법, 선형 보간법, 큐빅 보간법과 본 논문에서 논한 비-스플라인 보간법을 이용하여 결과 영상을 구했다. 결과 영상은 그림 2에서 보여주고 있다. 그림2(a)는 원 영상이며 (b)는 큐빅 보간법을 이용한 결과 영상이고, (c)는 큐빅 비-스플라인 보간법이라고 불리는 3차 비-스플라인 함수를 이용한 영상이다. 본 논문에서는 기존의 논문[1]에서 논하지 않은 교차의 비-스플라인도 고려 해보았다. 그림2(d)는 10차 비-스플라인 함수를 사용한 결과 영상이다.



(a) lena 256x256 원 영상 (b) 큐빅 보간법 사용



(c) 3차 비-스플라인 사용 (d) 10차 비-스플라인 사용

그림 2 영상의 확대 크기 변환

결과 영상의 질을 비교하기 위해 큐빅 보간법을 이용한 결과 영상을 기준으로 하여 인근치 보간법, 선형 보간법, 비-스플라인 보간법을 이용한 영상들의 오차를 계산하였다. 그림 3은 영상의 화소 값의 차가 "1" 이상인 점을 검출하여 영상들의 오차를 보여주고 있다.



(a) 인근치 보간법 사용



(b) 선형 보간법 사용



(c) 3차 비-스플라인 사용



(d) 5차 비-스플라인 사용



(e) 7차 비-스플라인 사용



(f) 10차 비-스플라인 사용

그림 3. 여러 보간법들을 사용한 경우의 영상의 오차

그림3에서 인근치 보간법은 큐빅 보간법을 기준으로 하여 비교하였을 때, 가장 낮은 영상의 질을 가지는 결과를 보여주고 있다. 그리고 3차 비-스플라인의 경우 인근치 보간법이나, 선형 보간법 보다 더 좋은 결과를 가지며 5차, 7차, 10차 즉, 고차로 갈수록 더 좋은 결과 영상을 가짐을 보여준다.

표 1. 각 보간법을 사용한 영상의 최소자승오차(MSE)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13.77	1.24	3.30	3.42	3.64	3.77	3.86	3.94	4.01	4.06

위의 표 1은 큐빅 보간법을 기준으로 각 영상들의 결과의 최소 자승 오차를 구한 것이다. 1은 인근치 보간법, 2는 선형 보간법, 3부터 10은 비-스플라인 함수의 3차부터 10차를 나타낸다. 이 값을 통해서도 인근치 보

간법이 가장 낮은 영상의 질을 가지며 비-스플라인은 고차로 갈수록 더 좋은 영상을 가짐을 다시 한번 확인할 수 있었다.

5. 결 론

본 논문에서는 영상의 기하학적 변환 중 비-스플라인을 이용한 영상의 확대에 대하여 논하였다. 국소적인 영상의 정보나 세분화된 영상의 정보를 보기 위해 영상의 확대를 사용하는데, 영상의 질을 원 영상에 가깝게 만드는 것은 중요한 문제이다. 본 논문에서는 원 영상을 y 축으로 1.5배 증가시키며 기존에 주로 사용되어 왔던 선형 보간법, 인근치 보간법, 큐빅 보간법, 그리고 본 논문에서 논한 B-스플라인을 사용하였다. 실험 결과 다른 세 가지 보간법들 보다 본 논문에서 논한 비-스플라인 보간법이 더 좋은 영상의 결과를 가짐을 볼 수 있었다. 또한 비-스플라인 함수의 차수가 증가함에 따라 영상의 질 또한 증가함을 볼 수 있었다. 결론적으로 영상의 확대 변환에서 가장 중요한 문제인 영상의 질에 대해 비-스플라인 보간법을 사용함으로써 좀 더 향상된 영상의 질을 얻을 수 있음을 알 수 있었다.

(참 고 문 헌)

- [1] Thomas M. Lehmann, Claudia Gnner, and Kaus Spitzer "Addendum : B-Spline Interpolation in Medical Image Processing", IEEE Trans. Medical Imaging, vol. 20, no. 7, pp. 660-665, 2001.
- [2] Thomas M. Lehmann, Claudia Gnner, and Kaus Spitzer, "Survey : Interpolation Methods in Medical Image Processing", IEEE Trans. Medical Imaging, vol. 18, no. 11, pp. 1049-1072, 1999.
- [3] Michael Unser, "Splines - A Perfect Fit for Signal and Image Processing", IEEE Signal Processing Magazine, pp. 22-38, November 1999.
- [4] Michael Unser, Akram Aldroubi, and Murray Eden, "B-Spline Signal Processing: Part I - Theory", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, no. 2, pp. 821-833, 1993.
- [5] Michael Unser, Akram Aldroubi, and Murray Eden, "B-Spline Signal Processing: Part II - Efficient Design and Applications," IEEE Trans. Signal Processing, vol.41, no.2, pp.834-848, 1993.
- [6] P. Thvenaz. (2000, Mar.) Spline Interpolation [Online]. Available: <http://bigwww.epfl.ch/thevenaz/interpolation>.
- [7] I. J. Schoenberg. "Continuous to the problem of approximation of equidistant data by analytic function". Quant.Appl.Math., vol. 4, pp. 45-99, 112-141, 1946.
- [8] Michael. Unser, Akram Aldroubi, and Murray Eden, "Polynomial Spline Signal Approximation: Filter Design and Asymptotic Equivalence with Shannon's Sampling Theorem," IEEE Trans. Information Theory, vol.38, no.1, pp.95-103, 1992.