

강인한 적응 퍼지 제어기를 이용한 도립 전자 제어

서삼준\*, 김동식\*\*

\*안양대 전기전자공학과, \*\*순천향대 정보기술공학부

Control of Inverted Pendulum using Robust Adaptive Fuzzy Controller

Sam-Jun Seo\*, Dong-Sik Kim\*\*

\*Anyang University, \*\*SoonChunHyang University

**Abstract** - This paper proposes an indirect adaptive fuzzy controller for general SISO nonlinear systems. No a priori information on bounding constants of uncertainties including reconstruction errors and optimal fuzzy parameters is needed. The control law and the update laws for fuzzy rule structure and estimates of fuzzy parameters and bounding constants are determined so that the Lyapunov stability of the whole closed loop system is guaranteed. The computer simulation results for an inverted pendulum system show the performance of the proposed robust adaptive fuzzy controller.

1. 서 론

퍼지 시스템은 제어대상의 정확한 수학적 모델이 필요치 않으며, 전문가의 지식을 반영할 수 있다는 장점으로 인하여 많은 제어 시스템에 성공적으로 적용되어 왔다. 특히 최근 신경 회로망과 같이 퍼지시스템이 임의의 함수를 원하는 정도로 근사화할 수 있다는 소위 범용 근사화기 이론(universal approximation theorem)이 증명된 바 있다. Wang은 [1],[2]에서 퍼지시스템은 범용 근사화기이며 퍼지시스템의 출력은 퍼지 기저 함수의(fuzzy basis function)의 선형 결합으로 표현됨을 보였다. 이러한 특성에 기초하여 전통적인 비선형 적응 제어 방식을 퍼지시스템과 접목시킨 퍼지 제어 방식이 널리 연구되고 있다.

그러나 퍼지시스템의 소속함수나 퍼지 규칙의 개수가 무한히 크지 않는 이상 근사화 오차(approximation error)가 발생하기 마련이고 이 오차가 폐루프 계통에 개입되어 계통의 안정도 보장을 어렵게 한다.

이러한 문제점을 보완하기 위해 본 논문에서는 불확실한 비선형 계통에 대해 수학적 모델이 필요없고 Lyapunov 관점의 안정도가 보장되도록 제어규칙과 파라미터 갱신되며 불확실성항의 유계 상수를 추정할 수 있는 강인한 적응 퍼지 제어기를 제안한다.

2. 간접 적응 퍼지 제어

다음과 같이 주어지는  $n$ 차 비선형 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(n)} &= f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \quad (1) \\ y &= x \end{aligned}$$

여기서,  $x \in R^n$ 는 상태벡터,  $u \in R$ ,  $y \in R$ 는 각각 입력과 출력이며,  $f, g: R^+ \times R^n$ 는 연속 미분 가능한 비선형 함수(smooth nonlinear function)이다.

제어기 설계의 목적은 추종오차가 0이 되도록 퍼지시스템과 파라미터  $\theta$ 를 조정하기 위한 적응 규칙을 기반으로 상태 궤환 제어기를 설계하는 것이다.

2.1 퍼지 모델 식별

먼저 퍼지 모델의 형태는 if~ then~의 언어 규칙 형태로 가정하고 각 언어 규칙의 후건부는 퍼지 기저 함수의 선형 결합으로 가정한다. 즉,  $f(x), g(x)$ 를  $j$ 번째 규칙이 다음과 같이 표현되는  $N$ 개의 퍼지 규칙들에 의해 표현된다고 가정한다.

$$R_{fj}: \text{If } x_1 = G_{1j} \text{ and } x_2 = G_{2j} \text{ and } \dots \text{ and } x_n = G_{nj} \text{ then } \hat{g}(x | \theta_g) = \theta_g^T \xi_f(x)$$

$$R_{gj}: \text{If } x_1 = F_{1j} \text{ and } x_2 = F_{2j} \text{ and } \dots \text{ and } x_n = F_{nj} \text{ then } \hat{f}(x | \theta_f) = \theta_f^T \xi_g(x)$$

여기서  $F_{ij}$  와  $G_{ij}$  는  $j$  번째 퍼지 규칙에서 퍼지 변수  $x_i$ 의 언어 값이고,  $\theta_f = (\theta_{f1}, \theta_{f2}, \dots, \theta_{fn})^T$ 와  $\theta_g = (\theta_{g1}, \theta_{g2}, \dots, \theta_{gn})^T$ 는 각각  $f, g$ 의 파라미터 벡터이고  $\xi_f$  와  $\xi_g$  는 퍼지 기저 함수 벡터로서 각 요소에 대한 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi_f(x) &= (\xi_{f1}(x), \xi_{f2}(x), \dots, \xi_{fn}(x))^T \\ \xi_g(x) &= (\xi_{g1}(x), \xi_{g2}(x), \dots, \xi_{gn}(x))^T \end{aligned} \quad (2)$$

$$\xi_{fj}(x) \triangleq \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_{ij}}(x_i)}{\sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n \mu_{F_{ij}}(x_i)} \quad (3)$$

$$\xi_{gj}(x) \triangleq \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{G_{ij}}(x_i)}{\sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^n \mu_{G_{ij}}(x_i)}$$

최종적으로 퍼지 규칙들의 집합으로부터 비선형 함수의 추정치  $\hat{f}(x | \theta_f), \hat{g}(x | \theta_g)$ 는 다음과 같이 가중 평균 비퍼지화 식으로부터 구해진다.

$$\begin{aligned} \hat{f}(x | \theta_f) &= \frac{\sum_{j=1}^N \theta_{fj} \mu_{R_{fj}}(x)}{\sum_{j=1}^N \mu_{R_{fj}}(x)} \\ \hat{g}(x | \theta_g) &= \frac{\sum_{j=1}^N \theta_{gj} \mu_{R_{gj}}(x)}{\sum_{j=1}^N \mu_{R_{gj}}(x)} \end{aligned} \quad (4)$$

또한 비선형 함수  $f(x), g(x)$ 는 다음 식에 의해 계산된다.

$$\begin{aligned} \hat{f}(x | \theta_f) &= \theta_f^T \xi_f(x) \\ \hat{g}(x | \theta_g) &= \theta_g^T \xi_g(x) \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 파라미터 추정을 위한 적응 규칙

퍼지 시스템  $f(x), g(x)$ 의 파라미터 벡터  $\theta_f, \theta_g$ 에 대한 적응 규칙을 구하기 위하여 먼저 다음과 같은 최소 근사 오차(minimum approximation error)를 정의하자. 최소 근사 오차  $w$ 는 현재 추정하고자 하는  $\hat{f}$ 와  $\hat{g}$ 와 실제값의 오차들을 결합시킨 형태의 근사 오차이다.

$$w = (f(x) - \hat{f}(x|\theta_f)) + (g(x) - \hat{g}(x|\theta_g))u_{eq} \quad (6)$$

여기서  $\theta_f^*$ ,  $\theta_g^*$ 는 각각 다음 식을 만족시키는 값으로 정의한다.

$$\theta_f^* = \min_{\theta_f \in \Omega_f} [\max_{x \in U_x} |f(x) - \hat{f}(x|\theta_f)|]$$

$$\theta_g^* = \min_{\theta_g \in \Omega_g} [\max_{x \in U_x} |\hat{g}(x|\theta_g)|] \quad (7)$$

$\Omega_f$ ,  $\Omega_g$ 는 상수  $M_f$ ,  $M_g$ 에 대하여 설계자에 의하여 다음 식과 같이 정해지는 파라미터 집합이다.

$$\Omega_f = \{ \theta_f \mid |\theta_f| \leq M_f \}, \quad \Omega_g = \{ \theta_g \mid |\theta_g| \leq M_g \}$$

추종오차는  $e = y_d - y$ 로 정의하면

$$e = (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})^T \quad (8)$$

이고 제어입력은 다음과 같이 결정한다.

$$u_{eq} = \frac{1}{\hat{g}(x|\theta_g)} (-\hat{f}(x|\theta_f) + y_d^{(n)} + k^T e) \quad (9)$$

$u_{eq}$ 는 확정성 증가 제어입력으로 계통의 비선형성을 상쇄하고 페루프 계통을 안정화시킨다. 벡터  $k$ 는  $s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n = 0$ 의 근이 s평면의 좌반면에 있도록 선정한다.

식 (9)를 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{e} = A e + b_c \{ (\hat{f}(x) - f(x)) + (\hat{g}(x) - g(x))u_{eq} \} \quad (10)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & \dots & \dots & -k_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

이다.  $A$ 는 안정한 행렬이므로 임의의  $n \times n$  양정치 (positive definite) 행렬  $Q$ 에 대하여 다음 관계식이 만족되는 양정치 대칭행렬  $P$ 가 존재한다.

$$A^T P + P A = -Q \quad (11)$$

적용칙을 얻기 위하여 다음과 같은 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} \left\{ e^T P e + \frac{1}{\gamma_1} \phi_f^T \phi_f + \frac{1}{\gamma_2} \phi_g^T \phi_g \right\} \quad (12)$$

Lyapunov 함수의 도함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} e^T Q e - \frac{1}{\gamma_1} \phi_f^T \dot{\phi}_f - \frac{1}{\gamma_2} \phi_g^T \dot{\phi}_g \\ &= -\frac{1}{2} e^T Q e + \frac{1}{\gamma_1} \phi_f^T [-\dot{\theta}_f + \gamma_1 e^T P b \xi_f] \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_2} \phi_g^T [-\dot{\theta}_g + \gamma_2 e^T P b \xi_g u_{eq}] \end{aligned} \quad (13)$$

$\theta_f^*$ ,  $\theta_g^*$ 는 상수이므로  $\dot{\theta}_f = -\dot{\theta}_f$ ,  $\dot{\theta}_g = -\dot{\theta}_g$ 가 되므로 최종적으로 적용 법칙은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_f &= \gamma_1 e^T P b \xi_f(x) \\ \dot{\theta}_g &= \gamma_2 e^T P b \xi_g(x) u_{eq} \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)를 식(13)에 대입하면 Lyapunov 함수의 도함수는 다음과 같이 정리된다.

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b w \quad (15)$$

식(15)로부터 시스템이 점근적으로 안정함을 알 수 있다.

### 3. 제안한 강인한 적응 퍼지 제어

Wang이 제안한 간접 적응 퍼지 제어기법은 식

(15)에 나타난 것과 같이 최소 근사 오차  $w$ 의 영향을 받는다. 즉, 퍼지시스템은 일종의 범용 근사화기이므로 퍼지시스템의 규칙의 수를 아주 많이 선정한다면 최소 근사 오차  $w$ 의 값을 아주 작게 할 수 있을 것이다. 그러나 이러한 적응 퍼지 제어 기법은 제어기 설계 시  $f^U(x)$ 와  $g^U(x)$ ,  $g^L(x)$  같은 유계 상수를 알아야하지만 실제 적용 시 이러한 유계 상수를 정확히 알기는 매우 어렵다.

이러한 문제점을 보완하기 위해 본 논문에서는 불확실한 비선형 계통에 대해 수학적 모델이 필요없고 Lyapunov 관점의 안정도가 보장되도록 제어규칙과 파라미터 갱신되며 불확실성항의 유계상수를 추정할 수 있는 강인한 적응 퍼지 제어기를 제안한다.

다음과 같이 주어지는  $n$ 차 비선형 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(n)} &= f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \\ y &= x \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,

$$\begin{aligned} f(x) &= \hat{f}(x|\theta_f) + \delta_f(x) \\ g(x) &= \hat{g}(x|\theta_g) + \delta_g(x) \end{aligned} \quad (17)$$

이고 제안한 제어기의 제어입력을 다음과 같이 선정한다.

$$u = u_{eq} + u_r \quad (18)$$

$$u_{eq} = \frac{1}{\hat{g}(x|\theta_g)} (-\hat{f}(x|\theta_f) + y_d^{(n)} + k^T e) \quad (19)$$

$$u_r = \frac{\beta}{\hat{g}(x|\theta_g)} \quad (20)$$

여기서

$$\beta = \frac{\psi(t)^T s}{1 - \psi^T s_g / |g|} \quad (21)$$

$$s = \begin{bmatrix} s_f \text{sgn}(z) \\ s_g |u_{eq}| \text{sgn}(z) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$z = e^T P b \quad (23)$$

이다.

제안한 제어기의 적용 법칙을 유도하기 위하여 다음과 같이 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} \left\{ e^T P e + \frac{1}{\gamma_f} \phi_f^T \phi_f + \frac{1}{\gamma_g} \phi_g^T \phi_g + \frac{1}{\gamma_\psi} \psi^T \psi \right\} \quad (24)$$

Lyapunov 함수의 도함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} e^T Q e - \frac{1}{\gamma_f} \phi_f^T \dot{\phi}_f - \frac{1}{\gamma_g} \phi_g^T \dot{\phi}_g + \frac{1}{\gamma_\psi} \psi^T \dot{\psi} \\ &= -\frac{1}{2} e^T Q e + \frac{1}{\gamma_f} \phi_f^T [-\dot{\theta}_f + \gamma_f e^T P b \xi_f] \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_g} \phi_g^T [-\dot{\theta}_g + \gamma_g e^T P b \xi_g u_{eq}] \\ &\quad + e^T P b \delta_f + e^T P b \delta_g u - e^T P b \beta + \frac{1}{\gamma_\psi} \psi^T \dot{\psi} \end{aligned} \quad (25)$$

$\theta_f$ 와  $\theta_g$ 에 대한 적용 법칙을 식 (14)와 같이 선정하면 식(25)은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T Q e + \Lambda \quad (26)$$

여기서,

$$\Lambda = e^T P b \delta_f + e^T P b \delta_g u - e^T P b \beta + \frac{1}{\gamma_\psi} \psi^T \dot{\psi} \quad (27)$$

이다.

식 (27)은 식(22)와 식(23)을 이용하면 0이 됨을 알 수 있다. [참고문헌5 참조] 따라서,

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} e^T Q e < 0 \quad (28)$$

이 되어 점근적 안정도를 보장하게 된다.

#### 4. 컴퓨터 모의실험

제안된 강인한 적응 퍼지 제어기의 유용성을 보이기 위하여 다음과 같은 도립 진자(cart-pole) 계통을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m}\right)} + \frac{\cos x_1}{\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m}\right)} u \end{aligned} \quad (28)$$

여기서, 상태  $x_1$ 과  $x_2$ 는 그림 1에서와 같이  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ 를 나타낸다. 또한 도립 진자의 각 파라미터는 표 1과 같다.

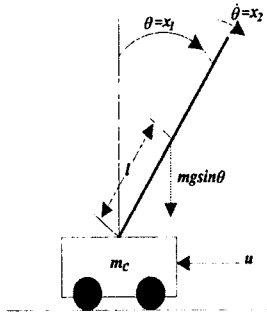


그림 1 도립진자 시스템

표 1 도립진자 시스템의 파라미터

	Symbol	Value
acceleration of gravity	$g$	9.8 m/s <sup>2</sup>
mass of cart	$m_c$	1 kg
mass of pole	$m$	0.1 kg
length of pole	$l$	0.5 m

퍼지 기저 함수를 구성하는 소속 함수는 식 (29), 그림 2와 같이 5개의 Gaussian 소속 함수를 사용하고 계통 (28)은 2차 계통이므로  $m_1 = m_2 = 5$ 로 선정하였다.

$$\begin{aligned} \mu_{F_1^1}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right] \\ \mu_{F_2^1}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i + \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right] \\ \mu_{F_3^1}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i}{\pi/24}\right)^2\right] \\ \mu_{F_4^1}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/12}{\pi/24}\right)^2\right] \\ \mu_{F_5^1}(x_i) &= \exp\left[-\left(\frac{x_i - \pi/6}{\pi/24}\right)^2\right] \quad i=1,2 \end{aligned} \quad (29)$$

제어 목적은 기준 신호  $y_m(t) = (\pi/30) \sin(t)$ 를 추종하도록 하였고 초기치는  $x(0) = (-0.05, 0)^T$ 로 선정하였다.

$k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$ 로 선정하였고,  $Q = 5I_{2 \times 2}$ 로 하였다.

그림 2에 제안한 강인한 적응 퍼지 제어기의 응답을 나타내었다. 이 그림에서 계통의 출력은 정상 상태 오차 없이 기준 출력을 잘 추종함을 알 수 있다.

#### 5. 결 론

불확실한 비선형 계통에 대해 수학적 모델이 필요없고 Lyapunov 관점의 안정도가 보장되도록 제어규칙과 파라미터 갱신되며 불확실성항의 유계 상수를 추정할 수 있는 강인한 적응 퍼지 제어기를 제안하였다. 제안한 강인한 적응 퍼지 제어기를 도립 진자 시스템에 적용한 결과 계통의 출력이 정상 상태 오차없이 기준 출력을 잘 추종함을 알 수 있다.

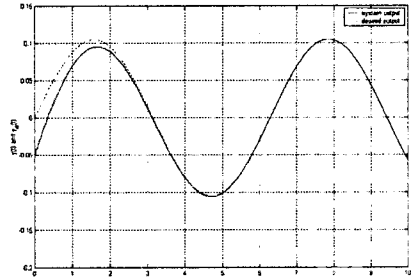


그림 2 제안한 제어기의 응답

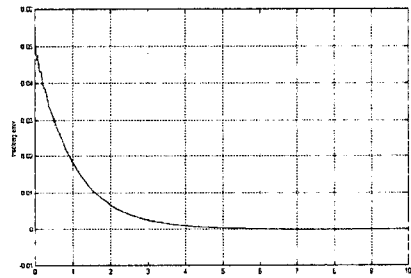


그림 3 추종 오차 응답

#### [참 고 문 헌]

- [1] L. X. Wang, J. M. Mendel, "Fuzzy basis Functions Universal Approximation and Orthogonal Least-Squares Learning", IEEE Trans. Neural Network, vol. 3, no. 5, pp. 807-814, 1992
- [2] Lin-Xing Wang, "A Course In Fuzzy Systems & Control", Prentice-Hall, 1997
- [3] M. U. Polycarpou, M. J. Mears, "Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parameterized on-line approximators", Int. J. Control, vol. 70, no. 3, pp.363-384, 1998
- [4] Y. G. Leu, W. Y. Wang, T. T. Lee, "Robust Adaptive Fuzzy-Neural Controllers for Uncertain Nonlinear Systems", IEEE trans. Robotics and Automation, vol. 15, no. 5, pp. 805-817, 1999
- [5] Jang-Hyun Park, Sam-Jun Seo, Gwi-Tae Park, "Robust Adaptive Fuzzy Controllers for Nonlinear System using Estimation of Bounds for Approximation Errors", Fuzzy Sets and Systems, vol. 133, pp. 19-36, 2003