

최소 자승법을 이용한 고차계 전달함수의 모델축소 방법에 관한 연구

최정내, 조준호, 이원혁, 박민정, 황형수
원광대학교, E-mail : cjn9828@wonkwang.ac.kr

Study of model reduction using least mean square method

Jcong-Nae Choi, Joon-Ho Cho, Won-Hyok Lee, Min-Jung Park, Hyung-Soo Hwang
Wonkwang Univ. E-mail : cjn9828@wonkwang.ac.kr

Abstract - 다양한 공정에 범용 적으로 적용할 수 있는 PID 제어기 동조 방법이 많이 연구되고 있다. 한 가지 방법으로 실제공정에 대한 축소모델을 구하고 축소 모델로부터 파라미터를 동조하는 방법이 사용되고 있다. 본 논문에서는 시간응답으로부터 최소 자승법을 이용하여 고차 시스템을 2차계로 축소하는 방법을 제안하였다. 2차계 시스템을 차분 방정식으로 표현하고, 시간응답의 입출력 데이터로부터 최소 자승법을 이용하여 차분 방정식의 계수를 구하였다. 차분 방정식을 이산시간상태 방정식으로 변환, 이산시간 상태방정식을 연속시간 상태방정식으로 변환하는 과정을 유도하여, 차분 방정식의 계수로부터 연속시간 상태방정식을 구하는 방법을 제시하였다. 시뮬레이션을 통하여 축소모델의 정확성 및 실제공정과의 특성을 비교하였다.

이산시간 상태방정식을 연속시간 상태 방정식으로 변환하여 2차 시스템을 얻었으며 시뮬레이션을 통하여 축소모델과 실제공정과의 특성을 비교하였다.

2. 본 론

시간응답이 주어지면 같은 응답을 가지는 2차계 시스템을 추정하는 과정을 전개하였다. 먼저 2차계 시스템을 차분 방정식으로 변환하고, 시간응답의 입출력 데이터로부터 최소 자승법을 이용하여 차분 방정식의 계수를 추정한다. 그리고 상태 방정식으로 변환하여 차분 방정식으로부터 2차 시스템을 유도하는 과정을 설명하였다.

2.1 2차 시스템과 차분 방정식의 관계
2차 시스템이 (1)처럼 정의된다.

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{as^2 + bs + c} \tag{1}$$

Tustin's 방법을 사용하여

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

로 치환하면 라플라스 변환을 Z변환으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{1}{a\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + b\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} + c} \\ &= \frac{\frac{T^2}{4a+2bT+cT^2} z^2 + \frac{2T^2}{4a+2bT+cT^2} z + \frac{T^2}{4a+2bT+cT^2}}{z^2 + \frac{(2cT^2-8a)}{(4a+2bT+cT^2)} z + \frac{4a-2bT+cT^2}{(4a+2bT+cT^2)}} \\ &= \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^2 + a_1 z + a_2} \tag{2} \\ &= \frac{b_1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \end{aligned}$$

$$Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) - a_2 z^{-2} Y(z) + b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + b_2 z^{-2} U(z)$$

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \tag{3}$$

식(1)에 대한 차분 방정식은 식(3)처럼 구해진다.

2.2 차분 방정식의 차수 추정

공정의 시간응답 곡선으로부터 입출력 데이터를 구할 수가 있다.

식(3)은 식(4)처럼 표현할 수 있다.

$$y_k = a_1 x_{k1} + a_2 x_{k2} + a_3 x_{k3} + a_4 x_{k4} + a_5 x_{k5} \tag{4}$$

$$= \sum_{j=1}^5 a_j x_{kj}$$

여기서

$$\begin{aligned} x_{k1} &= u(k), \quad x_{k2} = u(k-1), \quad x_{k3} = u(k-2) \\ x_{k4} &= y(k-1), \quad x_{k5} = y(k-2) \end{aligned}$$

식(5)의 Error가 최소가 되는 a_j 값을 구하는 방법이 최소 자승법이다.

1. 서 론

현재까지 선형 제어에서부터 비선형 제어에 이르기까지 수많은 제어 이론들이 제시되어져왔고, 산업현장에 많이 적용되고 있다. 그 중에서도 PID 제어기는 고전적인 제어 알고리즘임에도 불구하고 저렴하고, 간단하며, 비교적 좋은 성능을 가지기 때문에 많이 사용되어지고 있다. PID 제어기의 가장 중요한 점은 최적의 PID 파라미터를 동조하는 방법이다. 초기에는 단지 특정 공정에 대하여 좋은 성능을 가지는 동조 알고리즘이 많이 제시되었다. 그 중에서도 Ziegler-Nichols, Cohen-Coon, Astrom-Hugglund의 릴레이 동조방법 등이 보편적으로 사용되지만, 시지연이 크거나, 고차계 시스템에 대하여 좋은 성능을 얻을 수 없는 단점을 가지고 있다. 퍼지, 뉴럴네트웍, 유전자 알고리즘 등을 이용하여 다양한 공정에 적용할 수 있는 파라미터 동조 알고리즘도 많이 제시되어져 있지만, 지능형 알고리즘은 비선형 시스템 제어에 유용하며, 선형 시스템에 비효율적이다. 또한 초기값 설정 및, 동조시간에 대한 문제점들이 나타나고 있다. 또 다른 방법으로서 고차계의 전달함수의 축소 모델을 구하여 축소 모델로부터 PID 파라미터를 동조하는 방법이 있다. 축소 모델을 구하는 방법에는 Pade근사, Routh안정도 판별법에 의한 방법, 시간응답 곡선으로부터 구하는 방법, 주파수 응답으로부터 구하는 방법등 많은 연구가 진행되어져 왔으며 나름대로 장단점을 가지고 있다. 시간 응답으로부터 구하는 방법은 응답곡선으로부터 도시적으로 구하는 방법이 보편적이다.

본 논문에서는 시간응답으로부터 최소 자승법을 이용하여 고차계의 모델을 2차계로 축소하는 방법을 제안하였다. 2차 전달함수를 차분 방정식으로 변환하고, 시간응답의 입출력 데이터로부터 최소 자승법을 이용하여 차분 방정식의 계수를 구하였다. 차분 방정식을 이산시간상태 방정식으로 유도하고

$$E = \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^N y_k^2 - 2 \sum_{k=1}^N y_k \hat{y}_k + \sum_{k=1}^N \hat{y}_k^2$$

$$= \sum_{k=1}^N y_k^2 - 2 \sum_{k=1}^N a_i \left(\sum_{j=1}^N y_j x_{kj} \right) + \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_j x_{kj} \right)^2$$

E 가 최소가 되기 위하여 $\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0$ 이어야 하므로

이것을 계산하여 정리하면 차분 방정식의 계수는 식(6)처럼 구할 수 있다.

$$A = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (6)$$

여기서

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{25} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m5} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

2.3 차분 방정식의 이산시간 상태방정식 변환

먼저 차분 방정식을 이산 시간 상태 방정식으로 변환한 다음 이것을 연속시간 상태 방정식으로 변환한다. 식(2)로부터

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$\tilde{Y}(z) = \frac{(b_1 - a_1 b_0)z^{-1} + (b_2 - a_2 b_0)z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \text{라 놓으면}$$

$$Y(z) = b_0 U(z) + \tilde{Y}(z) \quad (7)$$

$$\frac{\tilde{Y}(z)}{(b_1 - a_1 b_0)z^{-1} + (b_2 - a_2 b_0)z^{-2}} = \frac{U(z)}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = Q(z)$$

$X_1(z) = z^{-2}Q(z)$, $X_2(z) = z^{-1}Q(z)$ 이라 정의하면

$$\frac{U(z)}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = Q(z) \text{로부터 식(8)이 얻어진다.}$$

$$x_2(k+1) = u(k) - a_1 x_2(k) - a_2 x_1(k) \quad (8)$$

$\frac{\tilde{Y}(z)}{(b_1 - a_1 b_0)z^{-1} + (b_2 - a_2 b_0)z^{-2}} = Q(z)$ 로부터 식(9)이 얻어진다.

$$\tilde{y}(k) = (b_1 - a_1 b_0)x_2(k) + (b_2 - a_2 b_0)x_1(k) \quad (9)$$

식(7), (8) 및 (9)로부터 이산시간 상태방정식 (10)이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (10)$$

$$y(k) = [b_2 - a_2 b_0 \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

다음엔 연속시간 상태방정식과 이산시간 상태 방정식의 변환 관계를 유도한다.

2.4 이산시간 상태방정식의 연속시간 변환

연속시간 상태 방정식이 식(11)처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)에 대한 해는 식(12)처럼 주어진다.

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (12)$$

샘플링 시간을 T 라고 하면 상태는

$$x(kT) = e^{A^k T} x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$k+1$ 번째 상태는 식(13)처럼 k 번째 상태로 표현할 수 있다

$$\begin{aligned} x(kT+T) &= e^{A(kT+T)} x(0) + \int_0^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\ &= e^{AT} \left[e^{A^k T} x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)} Bu(\tau) d\tau \right] + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\ &= e^{AT} x(kT) + (\text{input term}) \\ &= \tilde{A} x(kT) + (\text{input term}) \end{aligned} \quad (13)$$

샘플링 간격동안 $u(t)$ 는 일정하게 되므로 식(13)에서 input term은 식(14)처럼 표현할 수 있다.

$$\int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \left[\int_{kT}^{kT+T} e^{A(k+T-\tau)} Bu(kT) d\tau \right] \quad (14)$$

이산 시간 입력행렬은 식(15)처럼 정의된다.

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \left[\int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} d\tau \right] B \\ &= \left[\int_0^T e^{A\tau} d\tau \right] B \end{aligned} \quad (15)$$

먹급수 전개를 이용하여 정리하면 식(16)이 된다.

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \left[IT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \dots + \frac{A^i T^{i+1}}{(i+1)!} + \dots \right] B \\ A\tilde{B} &= \left[\frac{AT}{1!} + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \dots + \frac{A^{i+1} T^{i+1}}{(i+1)!} + \dots \right] B \\ &= (e^{AT} - I)B \end{aligned} \quad (16)$$

만약 A 가 비정칙이라 하면 식(17)이 얻어진다.

$$\tilde{B} = A^{-1}(e^{AT} - I)B = (e^{AT} - I)A^{-1}B \quad (17)$$

즉 식(11)의 연속시간 상태방정식에서 행렬 A 가 비정칙이라면 식(13)과 식(17)로부터 이산시간 상태방정식(18)을 구할 수 있다.

$$X(k+1) = \tilde{A} X(k) + \tilde{B} u(k) \quad (18)$$

$$y(k) = CX(k) + Du(k)$$

역으로 이산시간 상태 방정식이 주어진다면 식(19)로부터 연속시간 상태방정식의 행렬을 구할 수 있다.

$$A = \frac{1}{T} \log \tilde{A}$$

$$B = A(\tilde{A} - I)^{-1} \tilde{B} \quad (19)$$

제안된 알고리즘을 정리하면 다음과 같다.

- ① 시간응답으로 입출력데이터 구한다.
- ② 입출력 데이터로부터 식(6)을 이용하여 차분 방정식의 계수를 구한다.
- ③ 식(10)을 이용하여 차분 방정식을 이산시간 상태방정식을 구한다.
- ④ 식(19)를 이용하여 연속시간 상태 방정식을 구한다.

3. 시뮬레이션.

ex1) 그림1.(a)처럼 시간응답이 구해졌고 샘플링 시간 $T=0.1$ 이다. 시간의 입출력 데이터 $u(k)$, $y(k)$ 를 이용하여 식(6)의 X , Y 를 재구성하고, 식(6)을 이용하여 계수행렬 A 가 구해진다.

$$A = [-0.0000 \quad 0.0077 \quad 0.0059 \quad 1.3473 \quad -0.4493] \quad (20)$$

위의 계수 행렬로부터 차분 방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} y(k) &= -0.0000u(k) + 0.0077u(k-1) + 0.0059u(k-2) \\ &\quad - 1.3473y(k-1) + 0.4493y(k-2) \end{aligned} \quad (21)$$

추론된 공정의 출력을 그림1.(a)에 보였다, 실제 시간응

답과 거의 일치함을 볼 수 있다.

식(10)을 이용하여 식(21)을 식(22)처럼 이산시간 상태 방정식으로 표현한다.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4493 & 1.3473 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (22)$$

$$y(k) = [0.0059 \ 0.0077] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} - 1.8551 \times 10^{-15} u(k)$$

식(19)를 이용하여 식(22)를 연속시간 상태방정식으로 변환한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.0333 & 14.8934 \\ -6.6920 & 6.0333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (23)$$

$$y(t) = [-8.4340 \ 6.4594] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - 1.8551 \times 10^{-15} u(t)$$

그림 1. (a)의 시간응답으로부터 식(23)의 연속시간 상태 방정식이 수식적으로 매우 빠르게 계산되어질 수 있다. 실제로 그림 1 (a)의 시간 응답을 식(24)의 3차계 시스템에 대한 응답이다.

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+5)(0.5s+1)} \quad (24)$$

구해진 축소모델과 실제 공정에 대한 주파수 응답과 스텝응답을 각각 그림 1 (b),(c)에 보인다. 주파수 응답과 스텝응답이 거의 일치함을 알 수 있다.

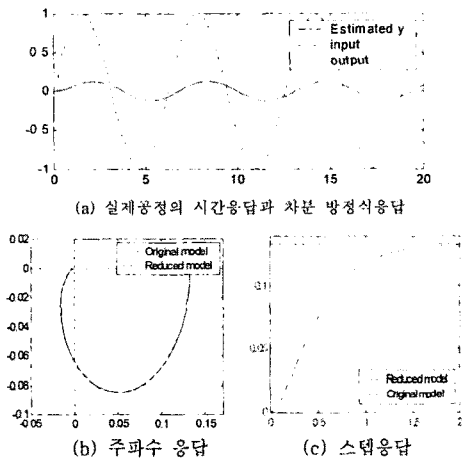


그림 1. 실제공정과 축소모델과의 특성 비교

3. 결 론

시간응답으로부터 시스템을 모델링하는 방법에는 시간 응답으로부터 도시적으로 구하거나 유전자알고리즘이나, 뉴럴 네트워크 등의 지능형 알고리즘을 사용하는 방법 등이 사용되고 있다. 그러나 도시적으로 구하는 방법은 오차가 크고, 지능형 알고리즘은 시간이 많이 소비되고, 비선형 시스템의 모델링 방법이므로 비효율적이다. 본 논문에서는 최소 자승법을 이용하여 시간응답으로부터 2차 시스템을 추론하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 먼저 2차 시스템을 차분 방정식으로 변환하고 시간응답의 입출력 데이터를 이용하여 차분 방정식의 계수를 최소 자승법을 이용하여 구하였다. 또한 차분 방정식을 이산시간 상태방정식으로 변환한 뒤, 연속시간 상태방정식

으로 변환하는 과정을 수식적으로 유도함으로서 과정을 간단하게 하였다. 시뮬레이션을 통하여 실제공정과 추정된 축소모델의 특성을 비교하였다.

또한 본 논문에서 제안한 모델추정방법을 사용하여 PID 제어기의 파라미터를 추정 모델로부터 쉽게 구할 수 있다. [13]-[15]

[참 고 문 헌]

- [1] K.J.Astrom and T.Hagglund, "Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins", Automatica, vol. 20, no. 5, pp. 645-651, 1984.
- [2] W.K.Ho, C.C.Hang, W.Wojciszyn, and Q.H.Tao, Frequency domain approach to self tuning PID control", Contr.Eng. Practice, vol. 4, no.6, pp.807-813, 1996
- [3] W.K.Ho, O.P.Gan, E.B.Tay, and E.L.Ang, "Performance and gain and phase margins of well-known PID tuning formulas", IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 4, pp. 473-477, 1996
- [4] M.Zhuang and D.P.Atherton, "Automatic tuning of optimum PID controllers", Proc. Inst. Elect. Eng., vol. 140, pt. D, no. 3, pp. 216-224, May 1993.
- [5] K.J.Astrom, "Automatic tuning of PID regulators", Instrument Soc. Amer., 1998
- [6] W.K.Ho, C.C.Hang, and L.S.Cao, "Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications", Automatica, vol. 31, no. 3, pp. 497-502, 1995.
- [7] K.Y.Kong, S.C.Goh, C.Y.Ng, H.K.Loo, K.L.Ng, W.L.Cheong, and S.E.Ng, "Feasibility report on frequency domain adaptive controller", Dept. Elect. Eng., Nat. Univ. Singapore, Internal Rep., 1995.
- [8] Q.G.Wang, T.H.Lee, H.W.Fung, Q.Bi and Y. Zhang, "PID tuning for improved performance", IEEE Trans. Control. Syst. Technol., vol. 7, no.4, pp. 457-465, July 1999.
- [9] Y.Shamash, "Model reduction using the Routh stability criterion and the Pade approximation technique", Int. J. Control, vol. 21, No. 3, pp. 475-484, 1975
- [10] David E. Goldberg, "Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning", Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1989
- [11] W.K.Ho, T.H.Lee, H.P.Han, and Y.Hong, "Self-Tuning IMC-PID Control with Interval Gain and Phase Margins Assignment", IEEE Trans. Control. Syst. Technol., vol. 9, no.3, May 2001, pp.535-541
- [12] 오성권, "퍼지모델 및 제어이론과 프로그램", 기다리출판사, 1999
- [13] Qing-Guo Wang, Chang-Chi Han, and Qiang Bi, "A Technique for Frequency Response Identification from Relay Feedback", IEEE Trans. Control. Syst. Technol., vol.7, no.1, January 1999, pp.122-128
- [14] 조준호, 김정철, 김진권, 최정내, 황형수, "Model Reduction Algorithm Using Nyquist Curve in Frequency Domain", Journal of Control, Automation and System Engineering, Vol. 8, No.6, June, 2002, pp. 439-444
- [15] 최정내, 조준호, 황형수, "Smith-Predictor Controller Design Using New Reduction Model", Trans. KIEE, Vol. 52D, No. 1, JAN. 2003 pp. 9-15