

리프팅 기법을 이용한 리플 제거 멀티레이트 제어기 설계

강남훈, 정정주
한양대학교 전자통신전파 공학과

Ripple Free Multirate Controller Design Using Lifting Technique

Nam-Hoon Kang, Chung Choo Chung
Division of Computer and Electrical Engineering, Hanyang University

Abstract - 기존의 멀티레이트 입력 (MRIC) 제어기는 제어 입력신호에 채터링 현상이 발생하여 추종응답에 리플이 발생하는 문제점이 있다. 이러한 리플현상을 해결하기 위해 피드포워드 보상기를 이용하여 이런 리플현상을 제거하는 방법이 제시되기도 하였다. 본 논문에서는 상태 공간에서 현재 추종기를 기반으로 리프팅 기법을 이용한 멀티레이트 입력제어기 설계를 소개한다. 본 제어기를 사용함으로써 제어입력 신호가 채터링이 생기지 않음을 이산전달함수 관점에서 최종치 정리를 이용하여 증명한다.

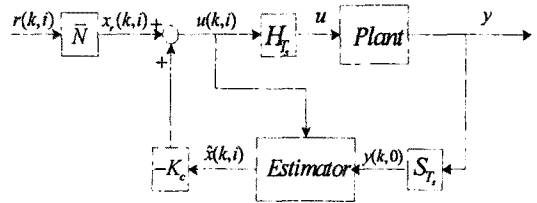


그림 1 기존 멀티레이트 제어기 구조

1. 서 론

멀티레이트 제어기는 싱글레이트 제어기보다 임의로 영점과 극점을 배치하는데 보다 자유롭다 [1]. 또한 출력 측정 샘플링 주기를 임의로 빠르게 하는데 한계가 있는 시스템의 경우에 제어 갱신 신호를 보다 빠른 주기로 생성시킴으로써 제어신호를 부드럽게 하여 고주파 영역의 플랜트공진 모드의 여기를 억제하여 제어함으로써 제어 성능을 개선시킬 수 있음을 보였다[5]. 그러나 제어입력 신호에서는 실제 측정 출력신호들 간격간에 내부샘플링(Intersampling)에 해당하는 부분에서 채터링 현상으로 출력에 리플을 발생시키는 문제점을 보이고 있다 [1][2]. 이런 문제점을 해결하기 위해서 제어입력 신호에 대한 최종치 정리를 적용하여 내부샘플링(intersampling)에 해당하는 각각의 제어신호들이 동일한 일정한 값으로 수렴하는 조건으로부터 피드포워드 보상기와 피드백 보상기를 설계하는 방법이 제시 되었다 [3][4].

본 논문에서는 상태공간에서 현재 추정기를 사용한 멀티레이트 상태 피드백 제어기 설계방법을 제시한다. 극점배치 방법으로 제어기를 설계함으로써 각각의 내부샘플링(intersampling)에 대해 주기적으로 변하는 제어이득이 결정되며 이로부터 정상상태 오차를 제거하는 피드포워드 게인 또한 주기적으로 변하는 게인을 리프팅 방법을 사용하여 연산하는 방법을 제시한다. 멀티레이트 입력 제어기 설계시 문제점으로 지적된 내부샘플링에 대한 채터링 현상이 없어지고 이에 따라 출력에 리플현상이 제거가 되는 제어기를 구현할 수 있음을 보인다.

2. 본 론

2.1 기존의 멀티레이트 입력 제어기 구조

다음과 같은 선형 연속 시불변 시스템이 주어졌을 때

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 x, y, u 는 각각 상태변수, 출력변수 그리고 입력이다.

이 때 (1)의 멀티레이트 입력 이산시간 플랜트 모델은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(k, i+1) &= \Phi_c x(k, i) + \Gamma_c u(k, i) \\ y(k, i) &= C_c x(k, i), \quad i=0, 1, \dots, R_u - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

이때 Φ_c, Γ_c , 그리고 C_c 는 아래와 같이 정의된다.

$$\Phi_c = e^{AT_s}, \quad \Gamma_c = \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\eta)} B d\eta, \quad C_c = C.$$

그리고 (k, i) 는 $t = kT_s + iT_s$, 출력 측정 샘플링 주기는 T_s , 제어입력 갱신주기는 $T_c = T_s/R_u$, R_u 는 정수로서 제어입력신호가 빠른 주기이며 측정 샘플링은 보다 느린 주기에 해당한다. (2)의 현재 추정기 모델은 (3)과 (4)로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{x}(k, i+1) &= \Phi_c \bar{x}(k, i) + \Gamma_c u(k, i) \\ \hat{x}(k, i) &= \bar{x}(k, i) + L_c (y(k, 0) - \bar{y}(k, 0)) \\ \bar{y}(k, 0) &= C_c \bar{x}(k, 0), \quad i=0, 1, 2, \dots, R_u - 1 \end{aligned} \quad (3)$$

$$u(k, i) = -K_c \hat{x}(k, i) + \bar{N}r(k, i) \quad (4)$$

여기서 \bar{x} 는 예측 추정 상태변수, \hat{x} 는 현재추정 상태변수, L_c 는 현재 추정기 이득이며 제어입력 신호는 기준 입력신호를 고려한 (4)식으로 표현된다. 이때 K_c 는 제어 이득, \bar{N} 는 기준입력을 고려할 때 정상상태 오차를 줄이는데 이용되는 피드포워드 게인 이다.

2.2 리프트된 멀티레이트 입력 제어기 구조

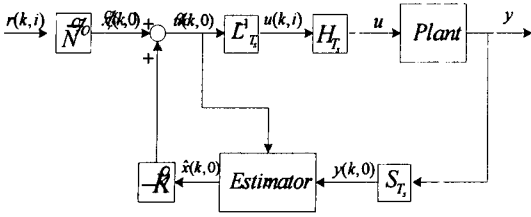


그림 2 리프트된 멀티레이트 입력 제어기 구조

기준샘플링 주기를 느린 주기(T_c)로 다시 플랜트 모델을 표현하면 (5)식과 같이 유도되며 리프팅 연산자 L_T 를 이용하여 느린 샘플링 주기에 맞게 전체 제어기 구조를 바꿀 수 있어 싱글레이트처럼 표현이 가능하다.[6]

$$x(k+1,0) = \Phi_c^{R_c} x(k,0) + [\Phi_c^{R_c-1} \Gamma_c : \Phi_c^{R_c-2} \Gamma_c : \dots \dots : \Gamma_c] \cdot \begin{bmatrix} u(k,0) \\ u(k,1) \\ \vdots \\ u(k, R_u-1) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$y(k,0) = C_c x(k,0)$$

따라서 리프트된 제어 입력은 다음과 같다.

$$\tilde{u}(k,0) = L_T u(k,i), \quad i=0,1,\dots,R_u-1 \quad (6)$$

여기서 역 리프트된 제어 입력은 (7)과 같이 구할 수 있으며 그림 2의 구조에서 실제 플랜트에 가해지는 제어 입력 신호이다.

$$u(k,i) = L_T^{-1} \tilde{u}(k,0) \quad (7)$$

결국 리프트된 플랜트 모델은 (8)과 같이 표현이 된다.

$$\begin{aligned} x(k+1,0) &= \mathcal{D}x(k,0) + \Gamma \tilde{u}(k,0) \\ y(k,0) &= \mathcal{C}x(k,0) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \Phi_c^{R_c} \\ \Gamma &= [\Phi_c^{R_c-1} \Gamma_c : \Phi_c^{R_c-2} \Gamma_c : \dots : \Gamma_c] \\ \mathcal{C} &= C_c \end{aligned}$$

$$\tilde{u}(k,0) = \begin{bmatrix} u(k,0) \\ u(k,1) \\ \vdots \\ u(k, R_u-1) \end{bmatrix} \quad (9)$$

(8)로 표현된 플랜트 모델로부터 리프트된 현재 추정기의 모델 (10)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1,0) &= \mathcal{D} \hat{x}(k,0) + \Gamma \tilde{u}(k,0) \\ \hat{x}(k,0) &= \bar{x}(k,0) + \mathcal{L}(y(k,0) - \bar{y}(k,0)) \end{aligned} \quad (10)$$

리프트된 제어 입력 신호는 다음과 같이 기준 입력 신호를 포함시켜 표현할 수 있다.

$$\tilde{u}(k,0) = -\hat{K} \hat{x}(k,0) + \tilde{N} r(k,0) \quad (11)$$

2.3 제어기 설계

빠른 샘플링 주기 모델 (Φ_c, Γ_c, C_c)로부터 제어 게인 K_c 를 극점 배치 방법으로 먼저 구하고 나서 \hat{K} 을 구한다.[6]

$$\begin{aligned} u(k,i) &= -K_c \hat{x}(k,i) = -K_c (x(k,i) - \hat{e}(k,i)) \\ x(k,i+1) &= (\Phi_c - \Gamma_c K_c) x(k,i) - \Gamma_c K_c \hat{e}(k,i) \\ i &= 0,1,\dots,R_u-1 \end{aligned}$$

여기서 $\hat{e}(k,i) = x(k,i) - \hat{x}(k,i)$ 로 실제 상태변수와 현재 추정기의 상태 변수 차로 추정기 이득 L_c 를 결정함으로써 이 값이 영으로 된다. 결국 느린 샘플링 주기에 해당하는 부분에서는 다음과 같이 표현된다.

$$x(k+1,0) = (\Phi_c - \Gamma_c K_c)^{R_c} x(k,0) \quad (12)$$

리프트된 모델과 제어입력 신호로부터

$$\begin{aligned} \tilde{u}(k,0) &= -\hat{K} \hat{x}(k,0) \\ &= -\hat{K}(x(k,0) - \tilde{e}(k,0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(k+1,0) &= (\mathcal{D} - \Gamma \hat{K}) x(k,0) - \Gamma \hat{K} \tilde{e}(k,0) \\ &= (\mathcal{D} - \Gamma \hat{K}) x(k,0) \end{aligned} \quad (13)$$

(12),(13)으로 부터 주기적인 제어이득 \hat{K} 를 결정할 수 있다.

$$\hat{K} = (\Gamma)^+ (\mathcal{D} - (\Phi_c - \Gamma_c K_c)^{R_c}) \quad (14)$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{R_c-1} \end{bmatrix}, \quad (\Gamma)^+ : \text{pseudo inverse}$$

기준입력을 고려했을 때 추종 응답의 정상상태에서 오차를 소거시키는 피드포워드 이득을 빠른 샘플링주기의 플랜트 (Φ_c, Γ_c, C_c)로부터 N_x, N_u 를 구한 다음 \tilde{N} 을 결정한다.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(k,0) &= -\hat{K}(\hat{x}(k,0) - x_r(k,0)) + N_u r(k,0) \\ &= -\hat{K}(\hat{x}(k,0) - N_x r(k,0)) + N_u r(k,0) \\ &= -\hat{K} \hat{x}(k,0) + \tilde{N} r(k,0) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_c - I & \Gamma_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{N} = \hat{K} N_x + N_u = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \vdots \\ K_{R_c-1} \end{bmatrix} \cdot N_x + N_u \quad (15)$$

결국 \tilde{N} 역시 주기적으로 변하는 피드포워드 게인을 구할 수 있다.

2.3 현재 추정기 이득 설계

(3)으로부터 예측 추정 상태변수로 표현하면 다음과 같다.

$$\bar{x}(k,i+1) = \Phi_c \bar{x}(k,i) + \Gamma_c u(k,i) + \Phi_c \Gamma_c (y(k,0) - \bar{y}(k,0))$$

느린 샘플링 주기 (T_c)로 표현하면 (16)으로 표현 된다.

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1,0) &= \Phi_c^{R_c} \bar{x}(k,0) + [\Phi_c^{R_c-1} \Gamma_c : \Phi_c^{R_c-2} \Gamma_c \\ &\quad \vdots : \Gamma_c] \begin{bmatrix} u(k,0) \\ u(k,1) \\ \vdots \\ u(k, R_u-1) \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{R_u} (\Phi_c^j L_c) (y(k,0) - \bar{y}(k,0)) \end{aligned} \quad (16)$$

이때 (10)과 등가인 현재 추정기 이므로 결국 다음과 같이 리프트된 현재 추종기의 이득 (\tilde{L}) 을 구할 수 있다.

$$\tilde{L} = (\mathcal{D})^{-1} \sum_{j=1}^{R_u} (\Phi_c^j L_c) \quad (17)$$

2.4 리플 제거 멀티레이드 제어기

리프팅기법을 이용한 제어기 설계가 리플이 제거가 됨을 보이기 위해서 이산전달함수로부터 피드포워드 제어기와 피드백 제어기 구조로 살펴볼 수 있다.

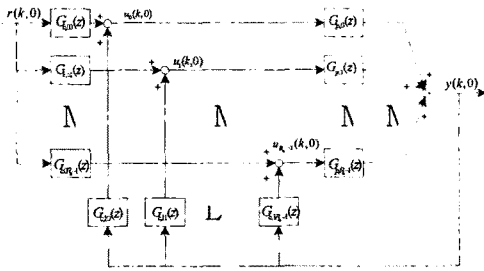


그림 3 리프트된 멀티레이드 입력 이산전달함수 구조

리프트된 모델로부터 Z-변환시키면 (16)과 같이 플랜트에 대한 이산 전달함수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Y(z) &= [\tilde{C}(zI - \mathcal{D})\Gamma]^{-1} \cdot \tilde{u}(z) \\ &= \tilde{G}_p(z) \cdot \tilde{u}(z) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tilde{G}_p(z) = [G_{p,0}(z) \ G_{p,1}(z) \ \dots \ G_{p,R_u-1}(z)]$$

여기서 제어입력 신호를 구하면 아래와 같고

$$\begin{aligned} \tilde{u}(z) &= (C_{c,1}[zI - A_{c,1}]^{-1} B_{c,1} + D_{c,1}) Y(z) \\ &\quad + (C_{c,0}[zI - A_{c,0}]^{-1} B_{c,0} + D_{c,0}) R(z) \\ &= \tilde{G}_{c,0} R(z) + \tilde{G}_{c,1} Y(z) \end{aligned} \quad (19)$$

단, 여기서

$$A_{c,0} = A_{c,1} = (\mathcal{D} - \Gamma \tilde{K})(I - \tilde{L} \tilde{C})$$

$$B_{c,1} = \mathcal{D} - \Gamma \tilde{K}, \quad B_{c,0} = \Gamma \tilde{N}$$

$$C_{c,0} = C_{c,1} = -\tilde{K}(I - \tilde{L} \tilde{C})$$

$$D_{c,1} = -\tilde{K} \tilde{L}, \quad D_{c,0} = \tilde{N}$$

$$\tilde{G}_{c,0}(z) = \begin{bmatrix} G_{c,00}(z) \\ G_{c,01}(z) \\ \vdots \\ G_{c,0R_u-1}(z) \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{c,1}(z) = \begin{bmatrix} G_{c,10}(z) \\ G_{c,11}(z) \\ \vdots \\ G_{c,1R_u-1}(z) \end{bmatrix}$$

제어입력 신호가 정상상태에서 영으로 수렴하게 되면 응답에 리플이 제거가 된다 즉, 다음과 같은 조건을 만족하면 된다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\tilde{u}(k,0)] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) [\tilde{u}(z)] = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) [\tilde{G}_{c,0}(z) R(z) + \tilde{G}_{c,1}(z) Y(z)] = 0 \quad (20)$$

여기서 기준입력 신호는 스텝 입력신호 $R(z) = \frac{z}{z-1}$

로 입력신호를 잘 추종한다면 $Y(z) = R(z)$ 가 가정 할 수 있다. 이때 정상상태에서의 내부 샘플에 대한 제어 입력신호들이 (20) 조건을 만족한다면 다음과 같은 식이 성립하게 되며

$$G_{c,00}(1) + G_{c,10}(1) = \dots = G_{c,0R_u-1}(1) + G_{c,1R_u-1}(1)$$

과 같이 정상상태에서의 내부샘플 각각에 대한 제어 입력신호들이 동일한 일정한 값으로 수렴하게 되어 채터링 현상이 없어지며 출력에는 리플이 사라진다.

3. 시뮬레이션 및 결과

실제 HDD의 VCM 액추에이터 모델에 적용하여 리프팅 기법을 이용한 멀티레이드 제어기 설계시 제어 입력 신호가 (20)조건을 만족하여 리플이 제거가 됨을 시뮬레이션과 수치적으로부터 확인하고자 한다 연속시간 플랜트모델은 다음과 같다 이 모델에서는 액추에이터의 공진모드를 포함하고 있지 않다.

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.758582299021134e+004 \end{bmatrix}$$

$$C_p = [1 \ 0], \quad D_p = 0$$

$R_u=4$, 출력 측정 샘플링주기 (T_s)는 4Khz, 제어 갱신 주기 (T_c)는 16Khz인 조건에서 (2)식으로부터 기존 멀티레이드 플랜트 모델 ($\Phi_c, \Gamma_c, C_c, D_c$)로부터 빠른 주기에 해당하는 제어 이득 K_c 를 극점배치 방법으로 구한다 (8)으로부터 리프트된 멀티레이드 플랜트 모델 ($\mathcal{D}, \Gamma, \tilde{C}, \tilde{D}$)을 구하고, 제어이득 \tilde{K} , 현재 추정기 이득 \tilde{L} 과 피드포워드 이득 \tilde{N} 는 각각 (14),(17),(15)를 이용하여 구한다.(18),(19)를 이용하여 각각의 이산 전달함수를 구하면 다음과 같다.

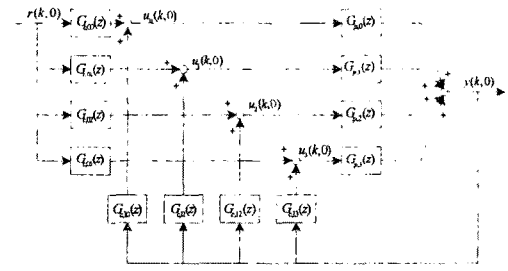


그림 4 $R_u=4$ 일 때 멀티레이드 이산전달함수 구조

$$\tilde{G}_p = \begin{bmatrix} \frac{6.506 \times 10^{-4} z + 9.294 \times 10^{-5}}{z^2 - 2z + 1} \\ \frac{4.647 \times 10^{-4} z + 2.788 \times 10^{-4}}{z^2 - 2z + 1} \\ \frac{2.788 \times 10^{-4} z + 4.647 \times 10^{-4}}{z^2 - 2z + 1} \\ \frac{9.294 \times 10^{-5} z + 6.506 \times 10^{-4}}{z^2 - 2z + 1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_{c,0}(z) = \left[\begin{array}{c} \frac{289.2z^2 + 77.55z + 4.092}{z^2 + 0.4353z + 0.003006} \\ \frac{195.2z^2 + 47.47z + 3.174}{z^2 + 0.4353z + 0.003006} \\ \frac{100.5z^2 + 17.4z + 2.256}{z^2 + 0.4353z + 0.003006} \\ \frac{5.847z^2 - 12.67z + 1.338}{z^2 + 0.4353z + 0.003006} \end{array} \right]$$

$$\tilde{G}_{c,1}(z) = \left[\begin{array}{c} \frac{-864.9z^2 + 493.4z - 6.723 \times 10^{-14}}{z^2 + 0.4353z + 0.003006} \\ \frac{-641z^2 + 395.2z + 7.739 \times 10^{-15}}{z^2 + 0.4353z + 0.003006} \\ \frac{-417.2z^2 + 297z - 1.151 \times 10^{-14}}{z^2 + 0.4353z + 0.003006} \\ \frac{-193.3z^2 + 198.8z}{z^2 + 0.4353z + 0.003006} \end{array} \right]$$

조건 (20)을 만족하여 결국 내부샘플에 해당하는 각각의 제어 입력 신호들은 동일한 특징값으로 수렴하게 된다. 따라서 정상상태에서 리플이 사라지게 된다. 시뮬레이션을 통하여 위의 결과를 살펴 보면

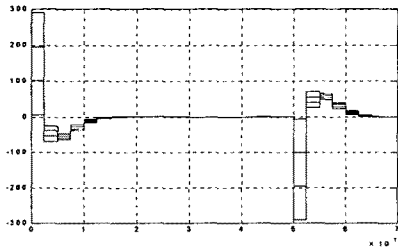


그림 5 리프트된 제어입력 신호

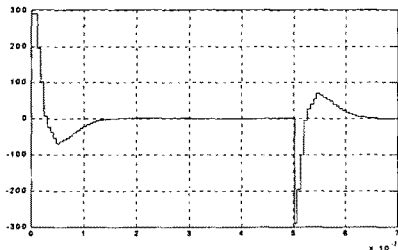


그림 6 역리프트된 제어입력 신호

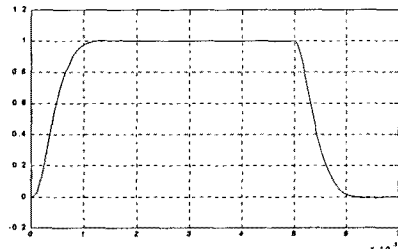


그림 7 기준 입력 신호에 대한 추종 응답

결국, 리프팅 기법을 사용한 제어기 설계시 제어 입력신호에서 채터링이 없어지고, 응답에 리플이 발생하지 않음을 볼수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 상태 공간에서 현재 추종기를 기반으로 리프팅 기법을 이용한 멀티레이트 입력제어기 설계를 소개했다. 제안된 제어기를 사용함으로써 리프팅 기법을 이용하여 제어입력 신호가 채터링이 생기지 않음을 이산전달함수 관점에서 최종치 정리를 이용하여 증명하였다. 멀티레이트 제어기설계시 출력에 리플이 제거됨을 시뮬레이션 및 수치적으로 확인하였다.

(참 고 문 헌)

- (1) K.L.Moore, S.P.Bhattacharyya and M.Dahelh, "Capabilites and Limitations of Multirate Control Schemes", *Automatica*, Vol.29, No.4, pp941-951, 1993
- (2) J.Tornero, Y.Gu, and M.Tomizuka, "Analysis of Multirate Discrete Equivalent of Continuous Controller", in *Pro. Amer. Control Conf.*, pp.2759-2763, June 1999
- (3) R.Chen, G.Guo, and T.S. Low, "An Intersample Ripple Free Multirate Servo Controller for Disk Drive Actuators", *Pro. 25th Annu. Conf. IECON*, vol. 3, San Jose, CA, 1999, pp.1171-1176
- (4) Q.W.Jia, K.K. Ooi, and D.W. Wu, "Multirate Control of an HDD Servo System With Intersample Ripple Free", *IEEE. Trans. Magnetics*, Vol.38 No.5, September 2002
- (5) T. Hara, M. Tomizuka, "Multirate Controller for Hard Disk Drive with Redesign of State Estimator", in *Proc. Amer. Control Conf.*, pp.3033-3037, 1998
- (6) S.H. Lee, C. C. Chung, and S.M. Suh, "Multirate Digital Control for High Track Density Magnetic Disk Drives", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol.39 Issue:2, March 2003
- (7) G.F.Franklin, J.D.Powell, and M.L.Workman, "Digital Control of Dynamic Systems", Reading,MA, Addison Wesley, 1990