

# 스퍼 기어 치면 사이의 탄성유체 윤활해석

김형자 · 김영대 · 구영필

부경대학교 기계공학부

## Elastohydrodynamic Lubrication Analysis on the Contacting Surfaces between Spur Gear Teeth

Hyung-Ja Kim, Young-Dae Kim, Young-Pil Koo

*School of Mechanical Engineering, Pukyong National University*

**Abstract** - Pressure and film thickness of contacting surfaces between teeth of the involute spur gear in lubricated condition were studied by a numerical method. Dynamics of the gear and pinion was considered to get an accurate initial clearance between gear teeth. The 3-dimensional non-steady elastohydrodynamic lubrication analysis on the gear teeth showed a slight higher pressure at the inlet region of the contacting face as well as pressure spike at the outlet region and a more thick film thickness than that of steady condition.

**Key words** - elastohydrodynamic lubrication, non-steady, spur gear

### 1. 서론

기어는 동력전달 핵심부품으로서 그 응용범위가 매우 넓기 때문에 대부분의 기계 장치에 기어가 사용되고 있다. 기어의 설계, 제작 및 검사 등에 대하여 오래 전부터 많은 연구가 이루어져 왔으며 이들에 대한 규격들이 현재는 다양하게 이용 가능하다[1][2]. 최근, 기계공업의 정밀화와 미세화에 따라 기어에 대하여도 수준 높은 정밀도와 신뢰성이 요구되고 있다. 그러므로 기존의 설계 규격이나 강도 측면에서의 연구 이외에 실제의 운전조건을 고려한 연구가 필요하다.

특히, 기어는 윤활상태로 운전되므로 기어 치면 사이의 윤활 현상에 관한 연구는 기어의 설계 개선에 크게 도움이 될 것으로 여겨진다. 기어 치면의 접촉형태는 선 접촉으로서 작용하중을 지지하기 위하여 높은 접촉압력이 형성되므로 기어는 탄성유체 윤활영역에서 운전되는 대표적인 기계요소이다[3].

기어의 탄성유체 윤활에 관한 연구는 그다지 활발하게 이루어지고 있지 않다. 최근의 연구로서 R. Larsson은 천이효과를 고려하여 작용선을 따라서 몇 개의 점들에 대하여 압력과 유막 두께를 계산하였다[4]. 유체 모델은 비뉴턴 모델을 적용하였으며 등은 완전 유막 윤활을 가정하여 2차원 탄성유체 윤활

해석을 수행하였다. 탄성유체 윤활영역의 최소 유막 두께를 연구한 Dowson과 Higginson은 그들의 유막 두께식을 기어 조건에 적용하여 기어 치면 사이의 최소유막 두께식을 제시하였다[5]. Cheng과 Wu는 스퍼 기어에서의 동적상태와 부분 탄성유체 윤활을 고려한 슬라이딩 마멸에 관하여 연구하였다[6]. 기어 치면에 관한 연구로서 Jiang은 반 스커핑 첨가제와 금속의 화학작용에 의하여 기어 치면에 생성된 반응막의 파괴 모델과 파괴 과정을 연구하였다[7]. Murakawa등은 무정질 탄소막을 PVD공정에 의하여 기어 치면에 증착하고 윤활유 공급 실패 조건에서 치면의 성능을 기어시험장치를 이용하여 실험하였다[8].

기어에 대하여 윤활 현상을 이해하기 위해서는 3차원 탄성유체 윤활해석이 필요하므로 본 연구에서는 기어의 회전 운동에 의한 치면 사이의 틈새 변화를 고려하고 기어 치폭 전체에 대하여 탄성유체 윤활해석을 수행하여 기어 치면의 윤활 현상을 면밀하게 분석하고자 한다.

## 2. 기어 치면의 틈새형상

기어에서 탄성유체 윤활해석을 수행하기 위해서는 두 기어 이가 접하고 있을 때 그들 사이의 틈새의 형상을 먼저 알아야 한다. 회전에 의하여 두 기어 이가 접하는 부분이 시시각각 변화하여 접촉 곡률반경이 달라지므로 회전을 고려한 틈새의 변화를 정밀하게 계산해야 한다. 다음은 기어 이 사이의 틈새를 계산하는 과정이다.

1. 먼저 기어와 피니언 이에 대한 프로파일을 생성시킨다. 스퍼 기어 인벌류터 치형인 경우에 프로파일은 각각의 회전 중심을 원점으로하는 직교좌표계에 대하여 다음과 같이 표현된다.

$$x = R_b(\theta \cos \theta - \sin \theta)$$

$$y = R_b(\cos \theta + \theta \sin \theta) \quad (1)$$

이 때 기어 이 한 개의 프로파일에 대한 최대 각도는;

$$\theta_{\max} = \frac{\sqrt{R_o^2 - R_b^2}}{R_b} \quad (2)$$

2. 기어 이와 피니언 이의 최초의 접촉 위치를 구하기 위하여 먼저 기어 이 프로파일의 끝점을 이끝원과 작용선의 교점에 일치하도록 치형 프로파일을 회전 이동시킨다.

여기서 교점 P의 좌표는;

$$\begin{aligned} x_{o1} &= \frac{1}{2(1 + \tan^2 \alpha)} \times \{-2R_{\mu1} \tan \alpha + \\ &\sqrt{4R_{\mu1}^2 \tan^2 \alpha - 4(1 + \tan^2 \alpha)(R_{\mu1}^2 - R_{o1}^2)}\} \\ y_{o1} &= (\tan \alpha)x_{o1} + R_{\mu1} \end{aligned} \quad (3)$$

3. 피니언 이의 프로파일 상의 한 점이 교점 P와 일치하도록 피니언을 회전시킨다. 즉, 피니언의 원점에서 P점까지의 거리와 피니언의 원점에서 피니언 이의 프로파일 상의 한 점까지의 거리가 같은 지점이 피니언 이 프로파일에서의 최초 접촉점이 된다.

4. 회전에 의한 두 프로파일의 변화를 알기 위하여 식(4)에 의하여 기어와 피니언의 직교좌표계를 각각의 회전 중심을 원점으로 하는 극좌표계로 변환시킨다. 작용선을 따라 해석하고자 하는 위치에 해당되는 몇 단계의 각도를 선정한다.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \pi/2 + \tan^{-1}(-x/y) \quad \forall x \leq 0, y > 0$$

$$\theta = \tan^{-1}(y/x) \quad \forall x > 0, y > 0 \quad (4)$$

다음은 피니언을 구동측으로 가정하여 기어와 피니언을 작용선의 위치에 해당되는 각도만큼 서로 회전시킨다. 각 회전단계마다 기어 이와 피니언 이의 프로파일을 식(4)에 의하여 계산하고 극좌표계를 전역 직교좌표계로 변환시켜서 프로파일 데이터를 저장해둔다.

5. 다음은 두 개의 이가 서로 회전한 상태에서 접촉점 주위를 윤활해석 영역으로 정한

다. 접촉점은 두 프로파일에서 상대방의 각 격자점까지의 거리를 구하여 가장 가까운 점을 접촉점으로 한다. 이론적으로 접촉점에서 거리는 0이지만 수치해석에서 각 격자점들의 위치는 이산적으로 표현되므로 접촉점의 거리는 0에 근접한 값이 된다.

6. 접촉점이 구해지면 접촉점 전, 후로 두 프로파일에서 각각 동일한 거리를 탄성유체 윤활 계산영역으로 선정한다. 기어 이 프로파일의 좌표는 극좌표계를 직교좌표계로 변환한 것이므로 격자 간격이 균일하지 않고 두 이의 격자점들이 서로 짝을 이루지 못하므로 프로파일을 따라서 등간격으로 격자점들을 재배열해야 한다.

7. 최종적으로 식(5)에 의하여 두 프로파일에서 짝을 이루는 격자점 사이의 거리를 계산하여 초기의 기하학적 틈새를 구한다.

$$h_g = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (5)$$

### 3. 수치 해석

#### 3.1 지배방정식

3차원 탄성유체윤활 해석에 이용되는 지배방정식은 Reynolds에 의하여 다음과 같이 주어진다[9].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12\tilde{u} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (6)$$

여기에서 각각  $\rho$ 는 밀도,  $\eta$ 는 점도,  $h$ 는 유막 두께,  $x$ 는 접촉영역에서 공통 접선을 따른 좌표,  $y$ 는 치폭 방향의 좌표,  $t$ 는 시간이다. 식(6)의 우변에서 두 번째 항은 시간의 경과에 따른 유막 두께와 점도의 변화로서 인접 단계로의 접촉점 이동에 의한 효과로서 고려되어진다. 치면의 평균 속도는;

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u_1 + u_2}{2} \\ u_1 &= \omega_1(R_{p1} \sin \alpha + x) \\ u_2 &= \omega_2(R_{p2} \sin \alpha - x) \end{aligned} \quad (7)$$

탄성유체 윤활영역에서 점도와 밀도는 다음과 같이 압력의 함수로 표현된다[10][5].

$$\eta = \eta_0 \left( \frac{6.31 \times 10^{-5}}{\eta_0} \right)^{1 - (1 + 1/1.96 \times 10^9)^2} \quad (8)$$

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{0.6 \times 10^{-9} p}{1 + 1.7 \times 10^{-9} p} \right) \quad (9)$$

무차원화된 Reynolds 방정식은

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12U \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial X} + 6 \frac{\omega_1 \eta_0}{\pi E} \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial T} \quad (10)$$

$$X = \frac{x}{R}, \quad Y = \frac{y}{R}, \quad H = \frac{h}{R}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad P = \frac{p}{E}, \quad U = -\frac{\eta_0 \tilde{u}}{ER}, \quad T = \frac{\omega_1 t}{2\pi}$$

여기에서 비정상상태에서 인접단계의 유막 두께는 서로 영향을 받기 때문에 무차원화의 기준 길이가 같아야하므로  $R$ 은 최초 회전각도 단계에서 접촉 영역의 평균 곡률 반경을 채택하였다.

$$R = (1/R_1 + 1/R_2)^{-1} \quad (11)$$

#### 3.2 해석 절차

식(6) - 식(9)는 비선형성이 매우 강하므로 비정상 상태의 탄성유체 윤활해석에서 수렴된 해를 얻기 위해서는 주의를 기울여야 한다. 본 연구에서는 이러한 경우에 비교적 수렴이 잘 된다고 알려진 Newton-Rapson법을 사용하였다. 그러나 Newton-Rapson법은 초기치에 따라 그 안정성이 민감하게 변하므로 본 연구에서는 윤활해석 이전에 3차원 탄성 접촉해석을 수행하여 하중조건을 만족하는 접촉압력분포를 윤활해석의 압력 초기치로 적용하였다. 접촉압력으로서 정상상태를 가정하여 윤활해석을 수행하여 3차원 압력분포를 구한 다음, 다시 정상상태의 압력을 초기치로 적용하여 비정상상태의 탄성유체 윤활해석을 수행함으로써 정밀하게 수렴된 해를 구하고자 하였다. 즉, 본 연구의 해석 절차는 ①접촉해석, ②정상상태의 탄성유체 윤활해석, ③비정상상태의 탄성유체 윤활해석의 순

으로 이어졌다.

### 3.3 해석 조건

Table 1에 탄성유체 윤활해석에 선정된 스퍼 기어의 데이터를 Table 2에 윤활유의 물성치를 각각 나타내었다.

Table 1 Specification of the gear and pinion

	Gear	Pinion
Number of teeth	24	16
Pressure angle	20°	
Module	4.5 mm	
Face width	20.0 mm	
Angular speed	1460 rpm	2190 rpm
Power transmitted	12 kW	
Effective Young's modulus	220 GPa	

Table 2 Property of the Lubricant

Grade	SAE30
Absolute viscosity	0.07 Ns/m <sup>2</sup> @80°C
Pressure-viscosity coefficient	1.51 × 10 <sup>-8</sup> m <sup>2</sup> /N
Roelands coefficient	0.4223

작용선을 따라 13개의 단계에서 윤활해석을 수행하였다. Fig. 1에 작용선을 따른 각 단계별 치면의 평균 속도와 작용하중을 나타내었다.

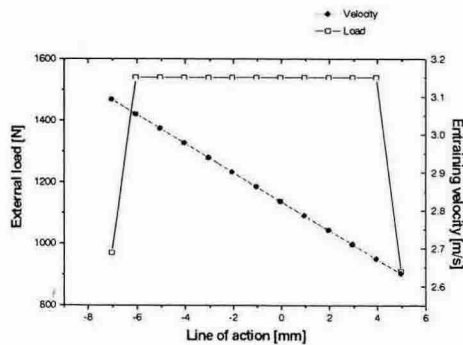


Fig. 1 External load and Entraining velocity

하중에 의한 기어 이의 거시적 변형은 두 이가 모두 같은 방향으로 변형될 것이므로 유

막 두께에 영향을 미치지 않는다고 가정하였다. 기어의 무차원화 유막 두께는;

$$H = H_g + H_d + H_o \quad (12)$$

식(12)에서  $H_g$ 는 식(5)에서 구한 기하학적 형상,  $H_d$ 는 탄성 변형량,  $H_o$ 는 유막 상수이다. 유막상수의 초기치로서 Dowson과 Higginson이 제시한 다음의 최소 유막 두께식을 적용하였다[5].

$$H_o = H_m = 2.65 U^{0.7} G^{0.54} W^{-0.13} \quad (13)$$

그리고 치꼭 가장자리의 피크 압력을 완화시키기 위하여 가장자리를 프로파일링한 치면 형상을 도입하였으며 문제의 단순화를 위하여 표면거칠기의 영향은 고려하지 않았다.

## 4. 해석 결과 및 검토

스퍼 기어의 회전운동에 의하여 시시각각 변화하는 치면의 접촉영역에 대하여 탄성유체 윤활해석을 수행하였다. Fig. 2에 피치점 부근 회전 각도에서의 두 기어 이의 초기 프로파일을 나타내었다. Fig. 3은 이 경우에 대한 치면 사이의 틈새를 보인 것이다.

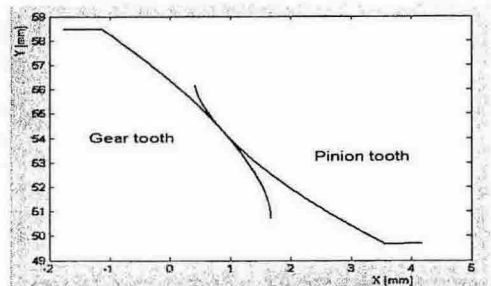


Fig. 2 Profiles of the contacting gear teeth

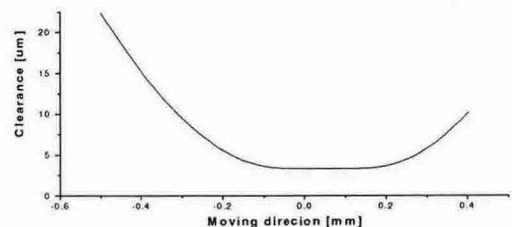


Fig. 3 Initial clearance between the contacting gear teeth

Fig. 4는 하중은 크고 속도가 느린 단계인 작용선 3mm에 대한 치면 접촉영역의 3차원 압력분포이다. 출구 영역에 뚜렷한 압력 스파이크가 나타나고 있으며 입구 영역에도 접촉압력의 영향으로 완만한 압력 봉우리가 나타나고 있다. 이것은 기어 치면의 접촉은 완전한 선 접촉이 아니라 면 접촉에 가깝다는 것을 의미한다. Fig. 5는 상대적으로 하중은 작고 속도가 빠른 단계인 작용선 -7mm에 대한 치면 접촉영역의 3차원 압력분포이다. Fig. 4와 유사한 경향이며 전체적으로 낮은 압력을 보이고 있다.

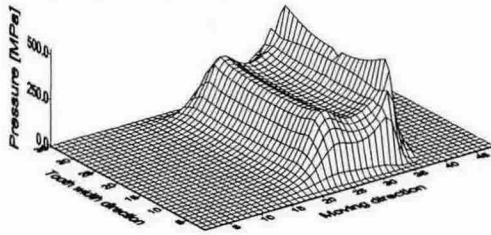


Fig. 4 Pressure distribution at line of action; 3mm

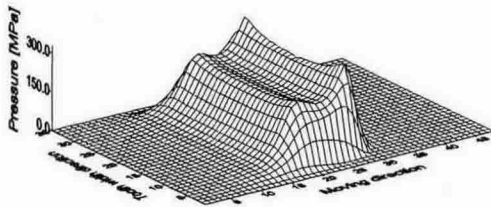


Fig. 5 Pressure distribution at line of action; -7mm

Fig. 6은 중앙에서 각 단계별 압력의 단면 형상을, Fig. 7은 유막 프로파일을 각각 비교하여 나타낸 것이다. 전반적으로 압력 프로파일은 서로 유사한 경향을 보이고 있으며 하중의 크기 1540N으로 동일한 구간인, 작용선 -5 ~ 3mm 구간에서 접촉 영역이 좁아지면 최고 압력의 크기가 증가함을 알 수 있다. 최고 압력은 작용선 -1mm 단계의 가장 자리에서 약 670MPa이다. Fig. 8은 작용선 1mm 단계에서 치폭 중앙에서의 유막 프로파일과 압력 프로파일을 나타낸 것이다. 출구 영역에 탄성 변형에 의한 유막 수축현상

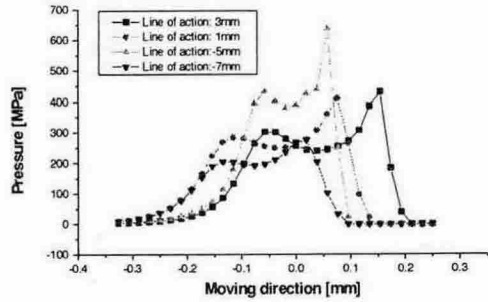


Fig. 6 Pressure profiles at center of tooth width

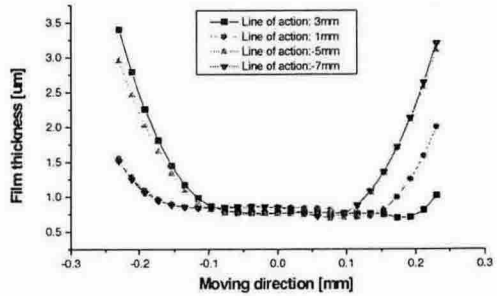


Fig. 7 Film profiles at center of tooth width

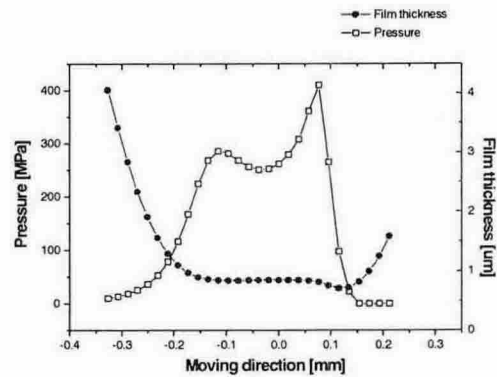


Fig. 8 Pressure and Film profiles at line of action; 1mm

을 볼 수 있으며 최고 압력은 최소 유막 두께 직전에 나타나고 있다. Fig. 9는 접촉선을 따라 치폭 방향으로의 유막 프로파일과 압력 프로파일을 도시한 것이다. 가장자리에 미미하지만 돌출부가 형성되어 있는 것을 볼 수 있는데 이는 윤활제의 측면유출 방지에 도움이 될 것으로 예상된다. 정상상태로 가정해 해석결과와 비정상상태의 해석결과를 비교하기 위하여 Fig. 10과 Fig. 11에 작용선 1mm

단계에서 치폭 중앙에서의 압력 프로파일과 유막 프로파일을 각각 나타내었다. 정상상태의 해석은 식(6) 우변 둘째 항의 영향을 무시하고 계산한 것이다. 두 결과에서 압력은 그다지 변화하지 않았지만 유막 두께는 비정상 상태의 해석결과가 약 20% 정도 증가하였다.

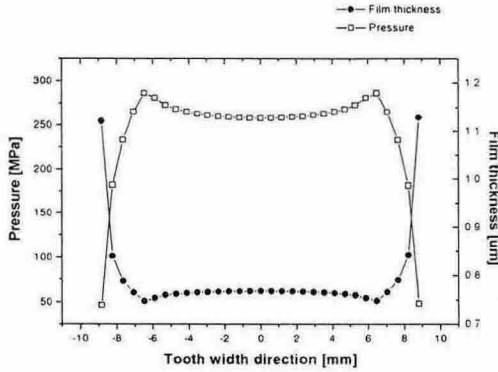


Fig. 9 Pressure and Film profiles at line of action; 3mm in tooth width direction

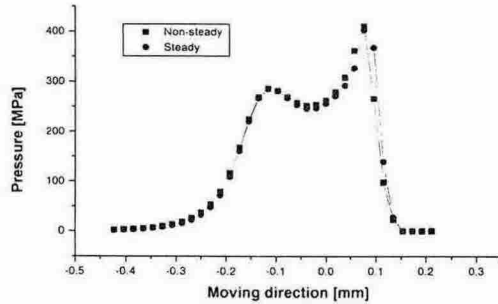


Fig. 10 Comparison of pressure profiles (Nonsteady : Steady)

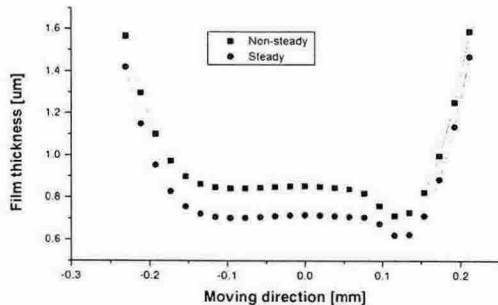


Fig. 11 Comparison of film profiles (Nonsteady : Steady)

## 5. 결론

인벌류터 스퍼 기어에 대하여 운전 중 치면의 접촉영역에서 탄성유체 윤활상태의 윤활 압력과 유막 두께의 분포에 관하여 해석적으로 연구하였다. 기어의 회전 운동에 의하여 변화하는 치면의 틈새를 정밀하게 계산하였으며 치폭 전체에 대한 윤활 현상을 분석하기 위하여 3차원 탄성유체 윤활해석을 수행하였다.

본 연구의 결과, 기어 치면의 접촉은 빈 접촉 형태로서 입구 영역에도 낮은 압력 항우리가 나타났으며 기어의 회전에 의한 접촉폭의 변화에 따라 동일하중에서도 압력분포는 다른 형상을 보였다. 또한 운전 중 기어 치면의 유막 두께는 동적 효과에 의하여 정상상태보다 두꺼워진다는 것을 알 수 있었다. 기어 치면 사이의 윤활 현상에 관한 본 연구는 치형 수정, 프로파일링 등 기어의 설계 개선에 활용될 수 있다고 기대된다.

## 기호설명

- $E$  : the equivalent Young's modulus [ $N/m^2$ ]
- $H$  : dimensionless film thickness
- $h$  : film thickness [m]
- $P$  : dimensionless pressure
- $p$  : pressure [ $N/m^2$ ]
- $R$  : equivalent radius [m]
- $R_b$  : base circle radius of gear / pinion [m]
- $R_{p1}$  : pitch circle radius of the gear [m]
- $R_{p2}$  : pitch circle radius of the pinion [m]
- $R_{o1}$  : addendum circle radius of the gear [m]
- $r$  : radius in polar coordinates
- $T$  : dimensionless time
- $t$  : time [s]
- $U$  : dimensionless velocity parameter
- $\bar{u}$  : mean surface velocity [m/s]
- $u_1$  : surface velocity of the gear tooth [m/s]
- $u_2$  : surface velocity of the pinion tooth [m/s]
- $X, Y$  : dimensionless Cartesian coordinates
- $x, y$  : Cartesian coordinates

$Z$  : dimensionless viscosity-pressure index  
 $\alpha$  : pressure angle [rad]  
 $\eta$  : viscosity [Ns/m<sup>2</sup>]  
 $\eta_0$  : viscosity at  $p=0$  [Ns/m<sup>2</sup>]  
 $\bar{\eta}$  : dimensionless absolute viscosity  
 $\theta$  : rotation angle of the gear / pinion [rad]  
 $\rho$  : density [Ns<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>]  
 $\rho_0$  : density at  $p=0$  [Ns<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>]  
 $\bar{\rho}$  : dimensionless density  
 $\omega_1$  : angular velocity of the gear [rad/s]

### 참고문헌

1. AGMA Standard, American Gear Manufacturers Association, Alexandria, Virginia, 1977
2. Dudley, D. W., Gear Handbook, McGRAW-HILL, 1967.
3. Dowson, D., "Elastohydrodynamic and micro-elastohydrodynamic lubrication," *Wear* 190, pp.125-138, 1995.
4. Larsson, R. "Transient non-Newtonian elastohydrodynamic lubrication analysis of an involute spur gear," *Wear* 207 pp.67-73, 1997.
5. Dowson, D. and Higginson, G. R., "Elastohydrodynamic lubrication, the Fundamentals of Roller and Gear Lubrication," Pergamon, Oxford, 1966.
6. Wu, S. and Cheng, H. S., "Sliding Wear Calculation in Spur Gears," *Journal of Tribology*, Vol. 115, pp.493-500, 1993.
7. Jiang, Q. Y. and Barber, G. C., "Modeling of reaction film failure in gear lubrication," *Wear* 231, pp.71-76, 1999.
8. Murakawa, M., Komori, T., Takeuchi, S., and Miyoshi, K., "Performance of a rotating gear pair coated with an amorphous carbon film under a loss-of-lubrication condition." *Surface and Coatings Technology* 120-121 pp. 646-652 1999.
9. Hamrock, B. J. "Fundamentals of Fluid Film Lubrication," McGRAW-HILL, pp.141-165 1994.
10. Roelands, C. J. A, Correlational Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils, Doctoral thesis, Technische Hogeschool te Delft, Netherlands, 1966.