

원 집합의 보로노이 다이어그램을 구하는 모서리 플립 알고리즘 Edge-flipping algorithm for computing the circle set Voronoi diagram

김동욱¹⁾, 김덕수²⁾, Kokichi Sugihara³⁾
Donguk Kim, Deok-Soo Kim and Kokichi Sugihara

Abstract

Presented in this paper is an algorithm to compute the Voronoi diagram of a circle set from the Voronoi diagram of a point set. The circles are located in Euclidean plane, the radii of the circles are non-negative and not necessarily equal, and the circles are allowed to intersect each other. The idea of the algorithm is to use the topology of the point set Voronoi diagram as a seed so that the correct topology of the circle set Voronoi diagram can be obtained through a number of edge flipping operations. Then, the geometries of the Voronoi edges of the circle set Voronoi diagram are computed. The main advantages of the proposed algorithm are in its robustness, speed, and the simplicity in its concept as well as implementation.

1. 서론

유클리드 평면에 서로 다른 반지름의 원들이 있다. 한 원이 다른 원을 완전히 포함하지 않는 한 원들의 교차는 허용한다. 이러한 원 집합이 주어졌을 때, 평면상의 모든 영역을 원 집합의 가장 거리가 가까운 원소에 할당한다. 이러한 영역은 평면의 tessellation을 이루며, 이를 원 집합의 보로노이 다이어그램이라 한다. 보로노이 다이어그램은 기하 요소의 근접성 문제와 (proximity problems) 직접적인 관련이 있으며, CAD/CAM 분야에서는 NC 공작기계의 공구 경로를 구하는 문제 등에 이용된다 [5].

원 집합의 보로노이 다이어그램을 구하는 문제와 관련한 다음의 연구가 진행되어왔다. Lee 와 Drysdale은, n 을 원들의 개수라 할 때, 계산량이 $O(n \log^2 n)$ 인 교차하지 않는 원들의 보로노이 다이어그램 계산 알고리즘을 제시하였다 [7]. Sharir는 서로 교차하는 원들도 허용하는 알고리즘을 제시하였다 [9]. Gavrilova와 Rokne는 원들이 움직이는 경우에 올바른 자료 구조를 유지하도록 하는 알고리즘을 제시하였다 [3].

본 논문에서는 원 집합의 보로노이 다이어그램을 빠르고, 효율적이고 안정성이 높게 생성하는 알고리즘을 제시하였다. 제시한 알고리즘의 기본 개념은 다음과 같다.

1) 한양대학교 산업공학과, E-mail: donguk@ihanyang.ac.kr

2) 한양대학교 산업공학과, E-mail: dskim@hanyang.ac.kr

3) Department of Mathematical Informatics, Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo, E-mail: sugihara@simplex.t.u-tokyo.ac.jp

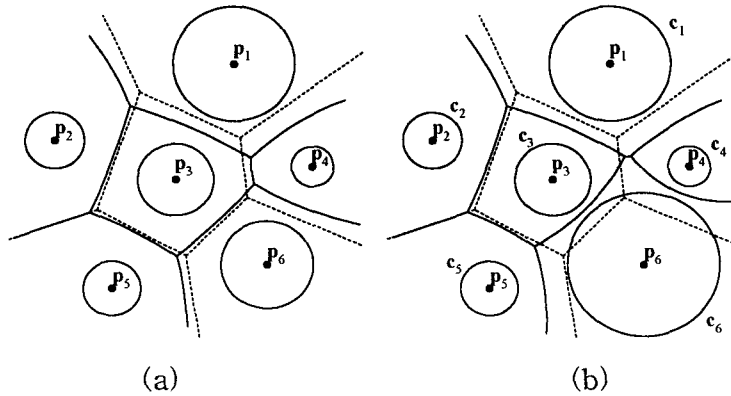


그림 1. 점 집합과 원 집합의 보로노이 다이어그램

먼저, 원 집합의 원들의 중심점에 대한 보로노이 다이어그램을 생성한다. 그 다음으로, 위에서 생성된 점 집합 보로노이 다이어그램의 위상을 초기해로 해서 원 집합의 보로노이 다이어그램의 올바른 위상을 일련의 모서리 플립 연산을 통하여 수정한다. 마지막으로, 원들의 반지름과 위상 정보를 이용하여 원하는 보로노이 다이어그램의 기하 정보를 생성한다.

그림 1에 나타낸 것은 점 집합 과 원 집합의 보로노이 다이어그램이다. 점선으로 나타나 있는 도형은 점 p_i 가 원 c_i 의 중심일 때 점 집합 $\{p_i | i=1,2,\dots,n\}$ 의 보로노이 다이어그램이고, 실선으로 그려진 도형은 원 집합 $\{c_i | i=1,2,\dots,n\}$ 의 보로노이 다이어그램이다. 그림 1(a)를 통해 이 두 보로노이 다이어그램의 모습이 꼭지점의 위치 등의 기하요소를 제외한다면 매우 유사하다는 것을 알 수 있다. 특히, 이 예제에서의 두 보로노이 다이어그램의 위상은 동일하다. 그러나 언제나 동일한 위상이 나타나는 것은 아니다. 만약 그림 1(a)의 원 c_6 의 반지름을 늘려서 그림 1(b)와 같이 되었다면, 그 결과로 형성된 원 집합의 보로노이 다이어그램의 위상은 점 집합과는 서로 다르게 된다. 그러나, 위상의 변화는 국부적으로 일어나며, 위 예제의 경우 점 집합 보로노이 다이어그램의 하나의 모서리를 플립하면 원하는 원 집합 보로노이 다이어그램의 올바른 위상을 찾을 수 있을 것이다. 이러한 간단한 모서리 플립 연산을 상황에 따라 반복적으로 적용함으로써 복잡한 경우의 문제도 풀 수 있는 것으로 나타났다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 몇 가지 기호의 정의를 제시하였고, 3절에서는 모서리 플립 조건을 다루었다. 그리고, 4절에서는 기하 정보의 계산에 대한 설명을 하고, 5절에서는 구현 및 실험 결과를 제시하고, 끝으로 결론을 제시하였다.

2. 용 어

설명 편의를 위해, 몇몇의 용어와 기호가 제시되었다. $c_i=(p_i, r_i)$ 는 중심이 p_i 이고 반지름이 r_i 인 원을 나타낸다. 만약 원은 반지름이 0일 경우 점이 될 수도 있다. C 는 원 집합을 나타내며, P 는 원의 중심점의 집합을 나타낸다. $VD(P)$ 와 $VD(C)$ 는 각각 P 와 C 의 보로노이 다이어그램을 나타낸다. CC_i 는 보로노이 꼭지점 v_i 에 상응하는 세 개의

원들에 동시에 외접하는 원을 나타낸다.

3. 위상 정보의 변화

VD(P)로부터 VD(C)의 올바른 위상 구조를 가지기 위해서, 특정 모서리 하나의 플립 여부를 판단하여야 한다. 모서리의 상태에 따라서, i) 외접원이 양쪽 꼭지점에서 동시에 존재하는 경우, ii) 외접원이 하나의 꼭지점에서만 존재하는 경우, iii) 외접원이 존재하지 않는 경우의 세 가지로 나뉜다. 각각의 경우에 따라 서로 다른 연산을 취해야 한다. 본 논문에서는 지면 사정상 가장 기본적인 상태인 외접원이 양쪽 꼭지점에서 동시에 존재하는 경우만을 설명하겠다.

이 경우는 점 집합과 원 집합의 형태에 따라 다시 다음의 세 가지 경우로 나누어진다: i) 두 외접원이 동시에 상대원과 교차하거나 교차하지 않는 경우, ii) 하나의 외접원만 상대원과 교차하는 경우, iii) 두 외접원 모두 상대원과 교차하지 않는 경우.

그림 2(a)와 3(b)에서의 점 집합은 동일하며, 서로 다른 반지름을 가진다. 그림 2(a)와 2(b)에서 점선으로 표시된 모서리 e_1 은 VD(P)에서 두 꼭지점 v_1 과 v_2 를 가진다. 꼭지점 v_1 은 그에 대응하는 세 개의 점 p_1, p_2, p_4 를 가지며, 꼭지점 v_2 는 대응하는 세 개의 점 p_3, p_4, p_2 를 가진다. 참고로 이와 같은 정보는 VD(P)의 꼭지점들의 위상 정보를 통해 알 수 있다. CC_1 이 꼭지점 v_1 에서 세 원 c_1, c_2, c_4 의 외접원이라고 하자. VD(P)에서 꼭지점 v_1 의 정의로부터 CC_1 은 세 원 c_1, c_2, c_4 로부터 구해져야 된다는 것을 알 수 있다. 이와 마찬가지로, 꼭지점 v_2 에서의 CC_2 역시 세 원 c_3, c_4, c_2 의 외접원이다. 그리고 c_3 와 c_1 은 각각 CC_1 과 CC_2 의 상대원이고 기호로 각각 M_1 과 M_2 로 나타낸다.

그림 2(a)에서, $CC_1 \cap c_3 = \emptyset$ 이다. 이는 CC_1 의 중심점은 상대원 c_3 보다 세 원 c_1, c_2, c_4 에 더 가까이 있다는 것을 의미한다. 이와 비슷하게, $CC_2 \cap c_1 = \emptyset$ 은 CC_2 의 중심점이 c_1 보다 세 원 c_3, c_4, c_2 에 더 가까이 있다는 것을 의미한다. 원들의 중심인 점 집합 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ 보로노이 다이어그램의 위상도 이러한 특성을 가지므로, VD(C)의 위상은 VD(P)의 위상과 같아지게 된다. 그러므로, 이러한 경우에 VD(C)의 위상은 VD(P)의 위상을 아무런 수정이 없이 곧바로 이용하게 된다. 그리하여 꼭지점과 모서리의 기하 정보를 구하는 것만이 남아있다. 참고로 꼭지점의 기하 정보는 외접원의 중심점에 해당하고, 모서리의 기하정보는 선분 또는 쌍곡선에 해당한다 [4][6].

반면에, 그림 2(b)의 CC_1 과 CC_2 모두 각각 그들의 상대원인 c_3 와 c_1 과 교차한다. 보로노이 꼭지점의 중요한 특성 중 하나는 그들은 상응하는 세 개의 제너레이터를 가지며 꼭지점의 좌표에서 위의 세 제너레이터들은 가장 가까운 제너레이터라는 것이다. CC_1 이 그들의 상대원인 c_3 와 교차한다는 것은 CC_1 의 중심점과 꼭지점에서의 세 원인 c_1, c_2, c_4 사이의 거리보다 상대원 c_3 상에서 더 가까운 점이 존재한다는 것이다. 이는 VD(P)에서 주어진 꼭지점 v_1 이 VD(C)에서는 더 이상 존재하지 못한다는 것

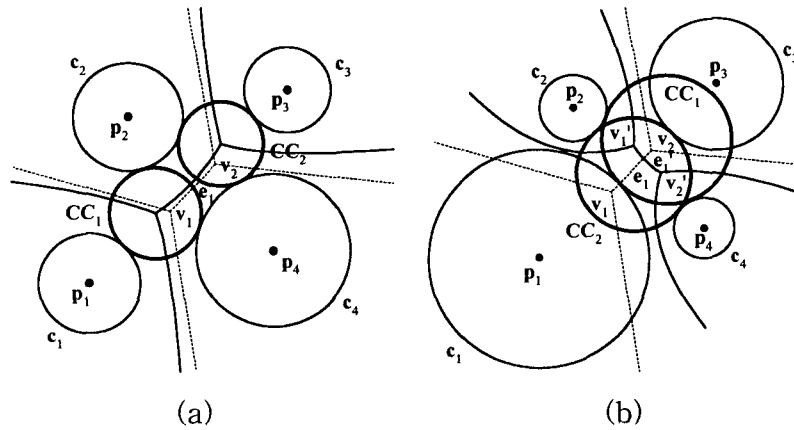


그림 2. 외접원이 양쪽 꼭지점에서 존재하는 경우

을 의미한다. 이와 마찬가지로, 꼭지점 v_2 역시 CC_2 와 c_1 이 교차하므로 더 이상 $VD(C)$ 의 원소로서 존재하지 못한다. 그러므로 $VD(P)$ 에서 위상요소의 한 부분이었던 모서리 e_1 은 양 꼭지점이 모두 위상 요소에서 사라졌기 때문에 $VD(C)$ 에서는 더 이상 존재하지 않는다. 이와 동시에, 그림 2(b)에서 보여지듯이 c_1, c_2, c_3 는 새로운 꼭지점 v_1' 을 정의하고, c_1, c_4, c_3 는 또 다른 꼭지점 v_2' 을 정의한다. 그리고 v_1' 과 v_2' 은 새로운 모서리 e_1' 을 정의한다. 그리하여, 새로운 모서리 e_1' 이 새로 나타나게 되고, 이전의 모서리 e_1 은 사라지며, 이러한 현상을 모서리 플립이라 부른다.

4. 기하 정보의 변화

위상 정보가 올바르게 형성되었으면, 이제 보로노이 꼭지점의 위치와 모서리의 곡선 식이 계산되어야 한다. 보로노이 꼭지점의 좌표를 구하는 문제는 세 원의 공통 외접원을 구하는 문제와 정확히 일치한다. 그리고 이것은 Apollonius의 10번째 문제인 것으로 고대로부터 잘 알려져 있다 [1][2].

복소평면에서의 뫼비우스 변환 (Möbius transformation)은 원을 직선으로, 직선을 원으로 변환하는 성질을 가지고 있다. 그리고, 뫼비우스 변환을 이용하여, 세 원의 공통 외접원을 구하는 문제를 두 원의 공통 접선을 찾는 문제로 변환할 수 있다. 이러한 방법은 두 쌍곡선의 교점을 찾는 문제보다 더욱 간단한 것으로 판명되었다 [6].

보로노이 모서리의 곡선 식은 두 원 사이의 거리가 동일한 점들의 자취이므로, 직선의 부분이 되거나 쌍곡선이 된다. Persson과 Held는 모서리의 곡선 식을 매개변수의 곡선 식으로 나타내었다 [4][8]. 그들의 표현 방법을 통하면, 직선과, 쌍곡선을 각각 다른 표현법으로 나타내어진다. 이에 반하여, Kim은 이러한 모서리들을 나타낼 때, 유리 2차 Bézier의 형태로 나타내었다 [4]. 이러한 표현법은 곡선의 종류(즉, 직선, 포물선, 쌍곡선, 타원)에 상관없이 하나의 형태로 표현이 가능하다. 그리고 본 논문의 알고리즘도 이 방법을 이용하였다.

5. 구현 및 실험

원 집합 보로노이 다이어그램을 계산하는 알고리즘을 Intel Celeron 300MHz 프로세서에서 C++로 구현하고 실험하였다.

그림 3은 원 집합 보로노이 다이어그램의 또 다른 예를 보여주고 있다. 그림 3(a)의 제너레이터 집합은 1,000개의 서로 교차하지 않는 임의의 반지름을 갖는 원들이다. 그림 3(b)의 경우는 나선상에 원들의 중심이 위치하고 서로 교차하지 않으며 임의의 반지름을 가지는 800개의 원들과, 나선의 중심부에 큰 반지름을 가지는 제너레이터 원이 있는 경우이다.

그림 4에서는 그림 3에서의 제너레이터 집합에 대한 수행 시간을 나타내었다. 수행시간은 VD(C)와 VD(P) 모두 나타내었으며, 각각 동그란 점과, 정사각형 점으로 표시하였다. 참고로 표에서의 VD(C)를 계산하는 데 걸리는 시간은 VD(P)를 계산하는 데 걸리는 시간을 뺀 시간이다.

VD(C)와 VD(P)의 계산 시간을 비교함에 있어서, VD(C)를 계산하는 시간이 예상했던 것처럼 많이 걸리지 않는다는 것을 추론할 수 있다. 우리는 이 외에도 다른 많은 경우들을 실험해 보았는데, 대부분의 경우 이와 비슷한 선형 패턴을 보이는 것으로 나타났다. 이러한 실험을 통해 제시한 알고리즘은 매우 효율적이라고 말할 수 있다.

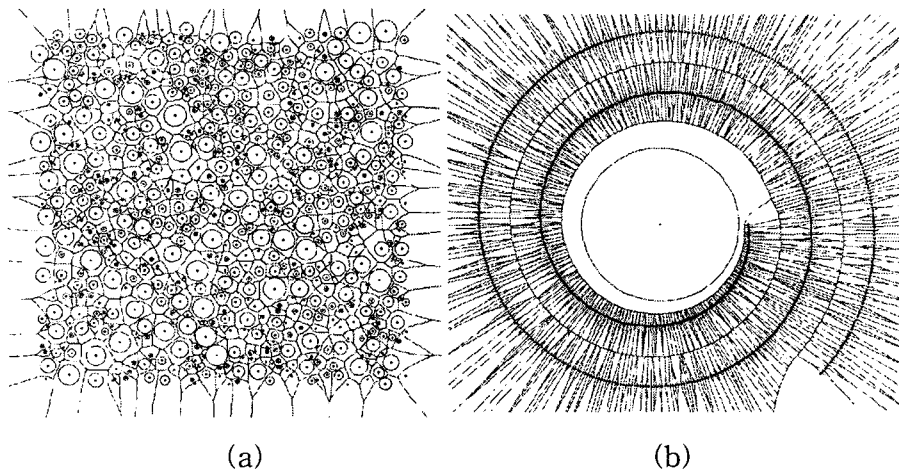


그림 3. 구현 결과, (a)랜덤 원 집합, (b)나선상의 원 집합

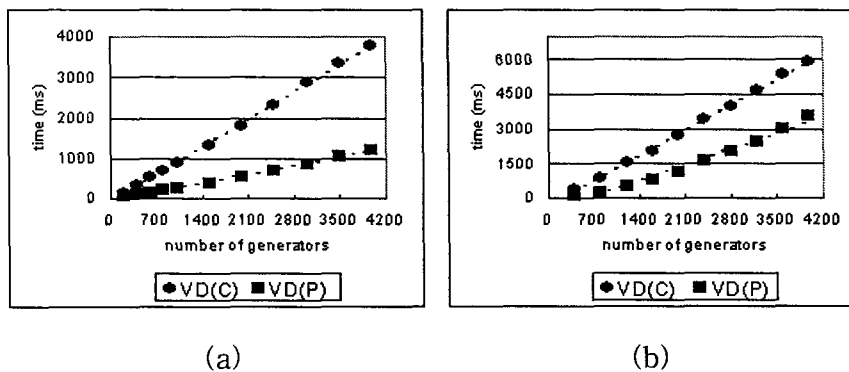


그림 4. 계산시간, (a)그림 3(a), (b)그림 3(b).

6. 결 론

이 논문에서는 점 집합의 보로노이 다이어그램으로부터 원 집합의 보로노이 다이어그램을 구하는 알고리즘을 제시하였다. 원들이 유클리드 평면에 위치해 있고, 원들의 반지름은 같을 필요가 없으며, 원들의 교차는 허용한다. 제시한 알고리즘은 빠르고 정확한 결과를 도출하며, 안정적이다.

제시한 알고리즘은 점 집합의 보로노이 다이어그램을 초기 해로 두었고, 원 집합의 보로노이 다이어그램의 위상을 찾아 나갔다. 점 집합의 보로노이 다이어그램의 각 모서리를 선택하여 검사한 후, 필요할 경우 모서리 플립 연산을 수행하고 그렇지 않을 경우는 그대로 둔다. 원 집합 보로노이 다이어그램의 위상을 모두 구하고 난 후, 그 정보로부터 기하 요소들을 수정해 나간다.

제시한 알고리즘의 장점은 안정성과 개념의 단순함에 있다. 제시한 알고리즘은 점 집합 보로노이 다이어그램의 위상을 이용하고 플립 연산만을 수행하였으므로 점 집합 보로노이 다이어그램을 구하는 안정성만큼 안정하다고 볼 수 있다.

참고문헌

1. Boyer, C. B., A History of Mathematics, Wiley, New York, 1968.
2. Courant, R. and Robbins, H., What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford, 1996.
3. Gavrilova, M. and Rokne, J., Swap conditions for dynamic Voronoi diagram for circles and line segments, Computer Aided Geometric Design, Vol. 16, pp. 89-106, 1999.
4. Held, M., On the Computational Geometry of Pocket Machining, LNCS, Springer-Verlag, 1991.
5. Kim, D.-S., Polygon offsetting using a Voronoi diagram and two stacks, Computer-Aided Design, Vol. 30, No. 14, pp. 1069-1076, 1998.
6. Kim, D.-S., Lee, S.-W. and Shin, H., A cocktail algorithm for planar Bezier curve intersections, Computer-Aided Design, Vol. 30, No. 13, pp. 1047-1051, 1998.
7. Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, 7th Edition, John Wiley & Sons, 1993.
8. Persson, H., NC machining of arbitrarily shaped pockets, Computer-Aided Design, Vol. 10, No. 3, pp. 169-174, 1978.
9. Sharir, M., Intersection and closest-pair problems for a set of planar discs, SIAM J. COMPUT., Vol. 14, No. 2, pp. 448-468, 1985.
10. Sugihara, K., Approximation of generalized Voronoi diagrams by ordinary Voronoi diagrams, Graphical Models and Image Processing, Vol. 55, No. 6, pp. 522-531, 1993.