

비정규 공정능력지수의 고찰 : $C_{Np}(U, V, W)$
More Comments on Non-Normal Process Capability
Indices : $C_{Np}(U, V, W)$

김홍준*
Kim, Hong Jun
김진수**
Kim, Jin Soo

Abstract

In this paper, We consider some generalization of these five basic indices to cover non-normal distribution. The proposed generalizations are compared with the five basic indices. The results show that the proposed generalizations are more accurate than those basic indices and other generalization in measuring process capability. We compared an estimation methods by Clements with based on sample percentiles, WVM to calculate the proposed generalization as an example. The results indicated that Clements method is more accurate than percentile method, WVM in measuring process capability. But the calculations of percentile method are easy to understand, straightforward to apply, and show be valuable used for applications.

1. 서론

본 논문에서 비정규분포의 공정능력을 실무에서 비교적 용이하게 평가하기 위해서 이러한 지수들의 어떤 일반화(generalization)를 제안한다. 정규공정에 대한 기본 공정능력지수들과 제안된 일반화 공정능력지수의 공정능력 측도의 정확성에 관해 언급하고, 일반화 공정능력지수의 추정 방법에 관한 새로운 추정량인 백분위수(percentile) 방법을 도입하여 기존의 Clements 방법과 가중분산법들과 비교하기로 한다.

* 대구산업정보대학 산업안전보건과

** 한밭대학교 산업경영공학과

2. 공정능력지수

2.1 기본 공정능력지수 [$C_p(U, V, W)$]

Benson(1994)은 제1세대 (C_p, C_{pk}) · 제2세대 (C_{pm}) · 제3세대 (C_{pmk}) · 제4세대 (C_{psk}) 공정능력지수를 통합시켜 단일 공정능력지수 형태로 나타내기 위해서 Vännman(1995)에 의해 정의한 $C_p(U, V)$ 를 확장시켜 $C_p(U, V, W)$ 로 나타낸다.

$$C_p(U, V) = \frac{d - U |\mu - m|}{3\sqrt{\sigma^2 + V(\mu - T)^2}} \quad (2.1)$$

여기서 μ 는 공정평균, σ 는 공정 표준편차, $d = \frac{USL - LSL}{2}$, $m = \frac{USL + LSL}{2}$, T 는 목표치, $U, V \geq 0$ 이다.

이것은 $C_p(0, 0) = C_p$, $C_p(1, 0) = C_{pk}$, $C_p(0, 1) = C_{pm}$, $C_p(1, 1) = C_{pmk}$ 이다.

$$C_p(U, V, W) = \frac{d - U |\mu - m| - W(\mu - T)}{3\sqrt{\sigma^2 + V(\mu - T)^2}} \quad (2.2)$$

여기서, $U, V, W \geq 0$ 이고 U 는 공정 평균이 규격의 중심으로 벗어남의 크기를 나타내는 모수이고, V 및 W 는 공정 평균이 목표치로부터 벗어남의 크기를 나타내는 모수이다.

3. 비정규 공정능력지수

3.1 일반화 $C_{Np}(U, V, W)$

본장에서는 분포가 정규가 아닌 비정규분포인 경우에, $C_p(U, V, W)$ 의 일반화는 $C_{Np}(U, V, W)$ 로 나타낸다.

$$C_{Np}(U, V, W) = \frac{d - U |M - m| - W(M - T)}{3\sqrt{\left(\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{6}\right)^2 + V(M - T)^2}} \quad (3.1)$$

여기서 F_α 는 α 번째 백분위수, M 은 분포의 중앙치(median), $m = \frac{USL + LSL}{2}$, T 는 목표치, $U, V, W \geq 0$. $(U, V, W) = (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ 로 두면 $C_{Np}, C_{Npk}, C_{Npm}, C_{Npmk}, C_{Npsk}$ 인 비정규분포에 대한 5가지 기본 지수가 다음과 같이 구해진다. 최근에 Zwick(1995)와 Schneider(1995) 등은 C_p 와 C_{pk} 의 2개의 일반화를 공정 중앙치 M 보다 공정 평균 μ 를 사용하여 나타내었다. 이것을 나머지

3개 기본지수 C_{pm} , C_{pmk} , C_{psk} 에 확장 시켜 추가 구성하여 $C'_{Np}(U, V, W)$ 라 나타낼 수 있다.

$$C'_{Np}(U, V, W) = \frac{d - U|\mu - m| - W|\mu - T|}{3\sqrt{\left(\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{6}\right)^2 + V(\mu - T)^2}} \quad (3.2)$$

3.2 가중분산법 : $C_{Np}(WV)$

가중분산법(the weighted variance method : *WVM*)의 주된 개념은 동일한 메디안과 상이한 표준편차를 갖는 2개의 새로운 분포를 만드는 것을 의미하는 것으로 즉, 편향의 혹은 비대칭분포를 2개의 정규분포로 분할하는 것이다. 가중분산에 기초한 공정능력지수들은 정규공정에 대한 공정능력지수들을 다음과 같이 수정하여 나타낼 수 있다.

$$\hat{C}_{Np}(WV) = \frac{USL - LSL}{3(s_1 + s_2)} \quad (3.3)$$

여기서

$$s_1^2 = \frac{2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - M)^2}{2n_1 - 1} \quad (3.4)$$

로 측정치가 \bar{X} 와 같거나 작은 n_1 관측으로부터의 샘플 표준편차 s_1 을 계산할 수 있다. 또한, \bar{X} 보다 큰 n_2 관측으로부터의 샘플 표준편차 s_2 는 다음과 같이 나타낸다.

$$s_2^2 = \frac{2 \sum_{i=1}^{n_2} (X_i - M)^2}{2n_2 - 1} \quad (3.5)$$

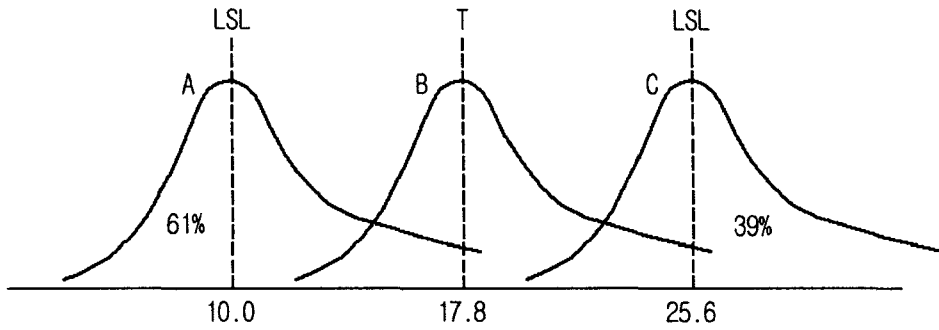
한편, 목표치(T)로부터 샘플 표준편차 s_{T1} 과 s_{T2} 는 다구찌 불편추정량을 고려함으로써 다음과 같이 나타낸다.

$$s_{T1}^2 = \frac{2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - T)^2}{2n_1} = \frac{2n_1 - 1}{2n_1} s_1^2 + (M - T)^2 \quad (3.6)$$

$$s_{T2}^2 = \frac{2 \sum_{i=1}^{n_2} (X_i - T)^2}{2n_2} = \frac{2n_2 - 1}{2n_2} s_2^2 + (M - T)^2 \quad (3.7)$$

4. 공정능력 측도의 비교

기본지수 $C_p(U, V, W)$ 와 제안된 일반화지수 $C_{Np}(U, V, W)$ 를 비교하기 위하여 <그림 1>에 보여주는 3개의 공정 A, B, C의 예를 고려한다. 3개의 공정들은 자유도 3을 갖는 χ^2 분포를 한다. <표 1>에 그 특성치들을 요약하였다.



<그림 1> 공정 A, B, C의 분포

<표 1> 공정 A, B, C의 특성치

공정	μ	M	σ	$\chi^2_{0.135}$	$\chi^2_{99.865}$
A	10.00	9.37	2.45	7.03	22.63
B	17.80	17.70	2.45	14.83	30.43
C	25.60	24.97	2.45	22.63	38.23

<표 2>에 상기 예의 $C_p(U, V, W)$ 와 $C_{Np}(U, V, W)$ 를 계산하여 나타내었다.

<표 2> $C_p(U, V, W)$ 와 $C_{Np}(U, V, W)$ 의 비교

공정	$C_p(U, V, W)$					$C_{Np}(U, V, W)$				
	C_p	C_{pk}	C_{pm}	C_{pmk}	C_{psk}	C_{Np}	C_{Npk}	C_{Npm}	C_{Npmk}	C_{Npsk}
A	1.06	0.00	0.26	0.00	-0.32	1.00	-0.08	0.29	-0.02	-0.34
B	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.00	0.92	1.00	0.99	0.97
C	1.06	0.00	0.26	0.00	-0.32	1.00	0.08	0.34	0.03	-0.29

5. $C_{Np}(U, V, W)$ 의 추정 방법

5.1 Clements 방법

본 연구에서는 가정하는 분포가 Pearson 형태를 한다는 가정아래 제시한 추정량 $\hat{C}_{Np}(U, V)$ 를 확장시켜 식(5.1)과 같이 제안한다.

$$\hat{C}_{Np}(U, V, W) = \frac{d-U |M-m| - W | \hat{M} - T |}{3 \sqrt{\left(\frac{U_P - L_P}{6}\right)^2 + V(\hat{M} - T)^2}} \quad (5.1)$$

5.2 백분위수(percentile)에 의한 방법

Chang과 Lu(1994)는 샘플 백분위수에 기초한 $F_{99.865}$, $F_{0.135}$, M 의 계산방법을 제시하였다. 이 방법은 Clements의 방법과 같이 Gruska 등의 표를 필요로 하지 않는 잇점이 있다. 이 방법을 적용하여 $C_{Np}(U, V, W)$ 에 대한 백분위수 추정량을 구하여 다음과 같이 $C_{Np}(U, V, W)$ 의 추정량을 계산할 수 있다.

$$\hat{C}_{Np}(U, V, W) = \frac{d - U | \hat{M} - m | - W | \hat{M} - T |}{3 \sqrt{\left[\frac{F_{99.865} - F_{0.135}}{6} \right]^2 + V(\hat{M} - T)^2}} \quad (5.2)$$

$$\hat{F}_{99.865} = X_{(R_1)} + \left\{ \left(\frac{99.865n + 0.135}{100} - R_1 \right) \right\} \{ X_{(R_1+1)} + X_{(R_1)} \} \quad (5.3)$$

$$\hat{F}_{0.135} = X_{(R_2)} + \left\{ \left(\frac{0.135n + 99.865}{100} - R_2 \right) \right\} \{ X_{(R_2+1)} - X_{(R_2)} \} \quad (5.4)$$

$$\hat{M} = X_{(R_3)} + \left\{ \left(\frac{n+1}{2} - R_3 \right) \right\} \{ X_{(R_3+1)} + X_{(R_3)} \} \quad (5.5)$$

여기서 $R_1 = \left[\frac{(99.865n + 0.135)}{100} \right]$, $R_2 = \left[\frac{(0.135n + 99.865)}{100} \right]$,

$R_3 = [(n+1)/2]$. 그리고 $[R]$ 는 숫자 R 과 같거나 작은 가장 큰 정수이고, $X_{(i)}$ 는 i 번째 순서 통계량이다.

6. 적용 예

적용 예는 Pearn과 Chen(1997)에 의해 제시된 고무 edge 생산공장에서 100개의 수

< 표 3 > 100개 관측치의 무게(g)

8.61	8.81	8.72	8.69	8.65	8.64	8.68	8.74	8.68	8.67
8.64	8.68	8.98	8.70	8.74	8.75	8.66	9.00	8.64	8.70
8.53	8.74	8.59	8.69	8.70	9.03	8.83	8.87	8.79	8.68
8.76	8.71	8.71	8.67	8.67	8.68	8.69	8.74	8.80	8.59
8.68	8.55	8.73	8.67	8.71	8.73	8.67	8.68	8.69	8.74
8.55	8.71	8.74	8.70	8.62	8.61	8.79	8.69	8.68	8.77
8.66	8.72	8.81	8.63	8.78	8.64	8.66	8.63	8.71	8.99
8.67	8.71	8.63	8.74	8.67	8.69	8.69	8.68	8.70	8.81
8.76	8.64	8.54	8.71	8.69	8.80	8.70	8.59	8.53	8.74
8.71	8.81	8.60	8.64	8.71	8.75	8.67	8.73	8.61	8.84

집된 샘플 데이터를 <표 3>과 같이 나타내었다. 제조공정의 제품 규격은 $USL=8.94$, $LSL=8.46$, $T=8.70(g)$ 이다.

공정능력을 평가하기 위하여 Clements 방법과 백분위수에 의한 방법을 적용하여 추정량 $\hat{C}_{Np}(U, V, W)$ 을 각각 계산하여 본 논문에서 제안하는 가중분산법과 비교하기 위하여 그 결과를 <표 4>에 나타낸다. <표 4>에서 특히 Clements 방법과 백분위수(percentile) 방법과는 약간의 차이를 보여주고 있다. 추정량 \hat{C}_{Npk} 값을 대상으로 실제 규격을 벗어난 데이터의 공정 불량률(4%)로 기준하면 백분위수(percentile) 방법은 공정을 조금 과대 평가하고 있으며, 본 연구에서 제시한 Clements 방법은 거의 실제공정 능력과 일치한다.

<표 4> $C_{Np}(U, V, W)$ 의 추정량 비교

추정방법 \ 추정량	$\hat{C}_{NP}(U, V, W)$					비교
	\hat{C}_{Np}	\hat{C}_{Npk}	\hat{C}_{Npm}	\hat{C}_{Npmk}	\hat{C}_{Npsk}	
Clements	0.81	0.58	0.66	0.47	0.28	$C_{Np}(U, V, W)$
percentile	0.96	0.92	0.95	0.91	0.87	
WVM	0.88	0.71	0.88	0.71	0.53	$C_p(WV)$
	0.90	0.73	0.90	0.74	0.71	$C_{Np}(WV)$

7. 결론

본 연구에서, 기본지수 $C_p(U, V, W)$ 의 일반화를 고려하여, 비정규분포를 하는 공정에 적용시키기 위하여 $C_{Np}(U, V, W)$ 를 제안하였다. 제안된 일반화 $C_{Np}(U, V, W)$ 와 상이한 일반화 $C'_{Np}(U, V, W)$ 와 비교해 본 결과 제안된 일반화 $C_{Np}(U, V, W)$ 가 공정능력 측도에서 보다 정확함을 알 수 있었다. $C_{Np}(U, V, W)$ 를 추정하기 위해서 수치 예제로 적용시켜 기존 Clements 방법과 그 대안으로 샘플 백분위수(percentile)에 기초한 추정 방법과 가중분산법들을 비교하였다. 그 결과 본 연구에서 제시한 Clements 방법이 percentile 방법과 가중분산법들 보다 공정능력을 올바르게 평가한다고 판단된다. 그러나 percentile 방법은 적용상 일관성이 있고, 수표를 사용하지 않아 그 계산이 용이하고 이해하기 쉬워 공정능력 평가시 실무에 유용하게 사용될 것이다.

참고문헌

- [1] Benson, E. D., "Statistical Properties of a System of Fourth - Generation Process Capability Indices $C_{psk}(U, V, W)$ ", Ph. D. Dissertation, University of Maryland, 1994.
- [2] Chang, P. L., Lu, K. H., "PCI Calculations for any Shape of Distributions with percentile", Quality World, technical section (September), pp. 110-114, 1994.
- [3] Chan, L. K., Cheng, S. W., Spiring, F. A. [CCS], "A New Measure of Process Capability: C_{pm} ", Journal of Quality Technology. Vol. 20(3), pp. 162-173, 1998.
- [4] Choi, B. C., Owen, D. B.(1990), "A Study of A New Process Capability Index", Communications in Statistics - Theory and Methods, Vol. 19(4), pp. 1231-1245, 1990.
- [5] Choobinch, F., Ballard, J. L., "Control-limits of QC Charts for Skewed Distributions using Weighted-Variance", IEEE Trans. Reliab., REL-36, pp. 473-477, 1987.
- [6] Choobinch, F., Branting, D., "A Simple Approximation for semivariance", Eur. J. Oper. Res., 27, pp. 364-370, 1986.
- [7] Kane, V. E., "Process Capability Indices", Journal of Quality Technology, Vol. 18(1), pp. 41-52, 1986.
- [8] Pearn, W. L., Kotz, S., Johnson, N. L., "Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices", Journal of Quality Technology, Vol. 24(4), pp. 216-231, 1992.
- [9] Schneider, H., pruet, J., Langange, C., "Uses of Process Capability Indices in the Supplier Certification Process", Quality Engineering, Vol. 8(2), pp. 225-235, 1995.
- [10] Vännman, K., "A unified Approach to Capability Indices", Statistica Sinica, Vol. 5, pp. 805-820, 1995.
- [11] Zwick, D., "A Hybrid Method for Fitting Distributions to Data and Its use is Computing Process Capability Indices", Quality Engineering, Vol. 7(3), pp. 601-613, 1995.