

축 방향으로 이동하는 티모센코보의 동특성 해석 Dynamics of an Axially Moving Timoshenko Beam

김주홍*·오형미**·이우식***

Joohong Kim, Hyungmi Oh and Usik Lee

Key Words : Moving Beam(이동하는 보), Timoshenko Beam(티모센코보), Vibration(진동), Spectral Element(스펙트럴요소), Stability(안정성), Divergence(발산), Flutter(플러터)

ABSTRACT

The use of frequency-dependent spectral element matrix (or exact dynamic stiffness matrix) in structural dynamics is known to provide very accurate solutions, while reducing the number of degrees-of-freedom to resolve the computational and cost problems. Thus, in the present paper, the spectral element model is formulated for the axially moving Timoshenko beam under a uniform axial tension. The high accuracy of the present spectral element is then verified by comparing its solutions with the conventional finite element solutions and exact analytical solutions. The effects of the moving speed and axial tension on the vibration characteristics, the dispersion relation, and the stability of a moving Timoshenko beam are investigated, analytically and numerically.

1. 서론

축 방향으로 이동하는 구조물은 자동차, 항공, 생산기기, 전자기기등과 같은 여러 산업분야에서 기술적으로 중요한 역할을 해왔다. 주요한 축 방향으로 이동하는 기계구조로는 방직기, 마그네틱 테이프를 이용하는 녹음기, 락스, 케이블카에 사용되는 삭도 등등이 있다. 이 분야의 주요한 연구에 대한 검토가 Wicker와 Mote [1]에 의해서 이루어졌다.

축 방향으로 이동하는 구조물의 이동속도는 이동속도가 낮은 경우에도 고유진동수의 변화나 복소모우드의 발생 등과 같은 구조물의 동특성에 많은 영향을 미친다. 또한, 축 방향의 이동속도가 특정 속도를 넘어서면 구조물의 안정성이 상실되어 과도한 진동으로 인해 파괴될 수도 있다. 따라서, 축 방향으로 이동하는 구조물의 설계나 최적화에 앞서서 구조물의 동특성과 안정성을 정확하게 예측하는 것은 매우 중요하다.

보처럼 축 방향으로 이동하는 일차원 구조물은 주로 오일러보(Euler Beam)의 이론 [2-8]을 이용하여 해석되어왔다. 특히, 티모센코보(Timoshenko Beam) 이론을 축 방향으로 이동하는 일차원 구조물에 적용한 경우는 매우 드물다. 따라서, 본 연구에서는 티모센코보 이론을 축 방향으로 이동하는 일차원 구조물의 진동해석에 이용하였다. 축 방향으로 이동하는 일차원 구조물에 대한 주요한 연구는 다음과 같다. Simpson[10]은 처음으로 티모센코보 이론을 이동하는 두꺼운 보에 적용하였으나, 수치결과를 보이지는 않았다. 이후에, Chonan[11]은 라플라스변환법(Laplace transform method)을 이용하여 이동하는 티모센코보의 정상상태 응답을 연구하였다. Simpson과 Chonan 등은 그들의 연구에서 축 방향의 변형은 고려하지 않았다.

이동하는 보에 대한 진동해석을 위해서 사용된 해석 기법들은 갤러킨방법(Galerkin's method)[2], 모우드가정법(assumed mode method)[3], 유한요소법(finite element method: FEM)[4], 그린함수법(Green's function method)[5], 전달함수법(transfer function method)[6], 섭동법(perturbation method)[7], 점근법(asymptotic method)[8], 라플라스변환법[10] 등 이다. 앞서 수행된 연구들[11, 12]에 의해 알려진 바에 따르면, 스펙트럴요소법(spectral element method)은 주파수영역에서 정의된 정확한 형상함수를 사용하

* 인하대학교 산업과학기술연구소
E-mail : vanc93@yahoo.co.kr
Tel : (032) 860-8780, Fax : (032) 866-1434

** 인하대학교 대학원

*** 인하대학교 기계공학과

여 스펙트럴요소(spectral element)를 유도하기 때문에 구조물의 정확한 동특성 해석이 가능하며, 균등한 보를 해석하는 경우 동특성 해석의 정확도를 증가시키기 위해 보의 길이에 상관없이 추가적인 요소분할이 요구하지 않는다. 또한, 기존의 유한요소법에서 사용되는 요소결합기법 또한 동등한 방법으로 스펙트럴요소법에 적용할 수 있다.

본 연구의 목적은 첫째, 일정한 장력을 받으며 일정한 속도로 축 방향으로 이동하는 티모셴코보의 스펙트럴요소(spectral element)를 유도하고 둘째, 유도된 스펙트럴요소의 정확도를 검증하기 위해 유한요소법을 이용하여 얻은 결과와 본 연구에서 유도된 스펙트럴요소를 이용하여 계산한 결과를 비교하였다. 마지막으로 보의 이동속도와 장력이 보의 안정성에 미치는 영향을 고찰하였다.

2. 운동방정식

보의 굽힘변위와 회전각을 각각 $w(x, t)$ 과 $\psi(x, t)$ 로 나타내면 이동하는 보의 운동에너지와 위치에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho A \left[\dot{c}^2 + (\dot{w} + c\dot{w}')^2 \right] + \rho I (\dot{\psi} + c\dot{\psi}')^2 \right\} dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EI \psi'^2 + \kappa GA (w' - \psi)^2 + Pw'^2 \right\} dx \quad (1)$$

여기서, $L, \rho A, \rho I, \kappa, c, P$ 는 각각 보의 길이, 단위길이 당 밀도, 단면형상에 따른 계수, 축 방향 이동 속도, 축 방향의 장력이다. 분포하중 $p(x, t)$ 와 경계에서의 전단력과 굽힘모멘트에 의한 가상일은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta W = \int_0^L p(x, t) \delta w dx + M_1 \delta \psi_1 + M_2 \delta \psi_2 + Q_1 \delta w_1 + Q_2 \delta w_2 \quad (2)$$

식 (1)과 (2)에 확장된 해밀턴의 원리(Extended Hamilton's principle)를

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (3)$$

적용하면 다음과 같이 운동방정식과 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\kappa GA (w'' - \psi') - \rho A (c^2 w'' + 2c\dot{w}' + \ddot{w}) + Pw'' = -p(x, t)$$

$$EI \psi'' - \rho I (c^2 \psi'' + 2c\dot{\psi}' + \ddot{\psi}) + \kappa GA (w' - \psi) = 0 \quad (4)$$

그에 따른 경계조건은 다음과 같다.

$$\text{at } x = 0, \left\{ \begin{array}{l} w(0) = w_1 \text{ or } Q(0) = -Q_1 \\ \psi(0) = \psi_1 \text{ or } M(0) = M_1 \end{array} \right\}$$

$$\text{at } x = L, \left\{ \begin{array}{l} w(L) = w_2 \text{ or } Q(L) = Q_2 \\ \psi(L) = \psi_2 \text{ or } M(L) = -M_2 \end{array} \right\} \quad (5)$$

여기서, $Q(x)$ 와 $M(x)$ 는 다음과 같이 정의되는 전단력과 굽힘모멘트이다.

$$Q(x) = \kappa GA (w' - \psi) - \rho A c (\dot{w} + c\dot{w}') + Pw'$$

$$M(x) = -EI \psi' + \rho I c (\dot{\psi} + c\dot{\psi}') \quad (6)$$

3. 스펙트럴요소 유도

이동하는 티모셴코보의 자유응답은 다음과 같이 스펙트럴형태로 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N W_n(x) e^{i\omega_n t}, \psi(x, t) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(x) e^{i\omega_n t} \quad (7)$$

여기서, $W_n(x)$ 과 $\Psi_n(x)$ 은 주파수 $\omega_n = 2\pi n/T$ 에 각각 대응하는 푸리에계수이다.

식 (7)을 식 (4)에 대입하고 분포하중 $p(x, t) = 0$ 으로 두면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(1 + a_4 - a_1 c^2) W'' - a_1 2ic\omega W' + a_1 \omega^2 W - \Psi' = 0$$

$$(1 - a_2 c^2) \Psi'' - a_2 2ic\omega \Psi' + (a_2 \omega^2 - a_3) \Psi + a_3 W' = 0 \quad (8)$$

여기서, $i = \sqrt{-1}$ 이고 a_m 은 다음과 같이 정의된다.

$$a_1 = \frac{\rho A}{\kappa GA}, a_2 = \frac{\rho I}{EI}, a_3 = \frac{\kappa GA}{EI}, a_4 = \frac{P}{\kappa GA} \quad (9)$$

식 (8)의 일반해는 다음과 같이 가정한다.

$$W(x) = \bar{W} e^{ikx}, \Psi(x) = \bar{\Psi} e^{ikx} \quad (10)$$

여기서, k 는 파수(wavenumber)이다. 식 (10)를 식 (4)에 대입하면 고유치문제를 유도할 수 있으며, 유도된 고유치 문제가 해를 가지기 위해서는 다음과 같은 분산관계(dispersion relation)에 대한 특성방정식을 만족해야 한다.

$$k^4 + \alpha k^3 + \beta k^2 + \gamma k + \eta = 0 \quad (11)$$

여기서

$$\alpha = -2c\omega (a_1 + a_2 + a_2 a_4 - 2a_1 a_2 c^2) / \Delta$$

$$\beta = [a_3 (a_4 - a_1 c^2) - (a_1 + a_2 + a_2 a_4 - 6a_1 a_2 c^2) \omega^2] / \Delta$$

$$\gamma = 2c\omega a_1 (2a_2 \omega^2 - a_3) / \Delta$$

$$\eta = \omega^2 a_1 (a_2 \omega^2 - a_3) / \Delta$$

$$\Delta = (1 - a_2 c^2) (1 + a_4 - a_1 c^2)$$

식 (11)의 네 근(파수 $k_r, r=1, 2, 3, 4$)을 이용하여, 다음과 같이 식 (8)의 일반해를 나타낼 수 있다.

$$W(x) = \sum_{r=1}^4 A_r e^{ik_r x}, \Psi(x) = \sum_{r=1}^4 \varepsilon_r A_r e^{ik_r x} \quad (13)$$

여기서

$$\varepsilon_r = \frac{a_3 i k_r}{(1 - a_2 c^2) k_r^2 - 2a_2 c\omega k_r - (a_2 \omega^2 - a_3)} \quad (14)$$

Fig. 1에 나타낸 바와 같이 유한한 길이 l 을 가지는 보에 대한 스펙트럴요소의 노드 자유도는 다음과 같이 정의된다.

$$W_1 = W(0), \Psi_1 = \Psi(0), W_2 = W(l), \Psi_2 = \Psi(l) \quad (15)$$

식 (13)을 식 (15)에 대입하면 다음과 같이 노드자유도벡터 $\{y\}$ 와 상수벡터 $\{A\}$ 사이의 관계를 얻을 수 있다.

$$\{d\} = [X(\omega)]\{A\} \quad (16)$$

여기서

$$\begin{aligned} \{d\} &= \{W_1 \ \Psi_1 \ W_2 \ \Psi_2\}^T \\ \{A\} &= \{A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4\}^T \\ [X(\omega)] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1\varepsilon_1 & e_2\varepsilon_2 & e_3\varepsilon_3 & e_4\varepsilon_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

이며

$$e_r = e^{ik_r l} \quad (r=1, 2, 3, 4) \quad (18)$$

식 (7)을 식 (6)에 대입하면, 힘과 변위의 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Q &= \kappa GA \left[(1+a_4 - a_1 c^2) W' - a_1 i c \omega W - \Psi \right] \\ M &= -EI \left[(1-a_2 c^2) \Psi' - a_2 i c \omega \Psi \right] \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)에서 Q 와 M 은 각각 전단력과 굽힘모멘트의 스펙트럴계수를 나타낸다. Fig. 1에 나타낸 노드의 전단력과 굽힘모멘트는 식 (13)을 식 (19)에 대입하고 식 (5)의 경계조건을 적용하면 외력벡터 $\{f\}$ 와 상수벡터 $\{A\}$ 사이의 관계를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{f\} = [Y(\omega)]\{A\} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} \{f\} &= \{Q_1 \ M_1 \ Q_2 \ M_2\}^T \\ [Y(\omega)] &= EI \begin{bmatrix} -g_1 & -g_2 & -g_3 & -g_4 \\ -h_1 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \\ e_1 g_1 & e_2 g_2 & e_3 g_3 & e_4 g_4 \\ e_1 h_1 & e_2 h_2 & e_3 h_3 & e_4 h_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

이며

$$\begin{aligned} g_r &= i a_3 \left[(1+a_4 - a_1 c^2) k_r - a_1 c \omega + i \varepsilon_r \right] \\ h_r &= i \left[(1-a_2 c^2) k_r - a_2 c \omega \right] \varepsilon_r \end{aligned} \quad (22)$$

식 (16)과 (20)에서 상수벡터 $\{A\}$ 를 소거하면 다음과 같이 노드에서의 힘과 변위의 관계를 유도할 수 있다.

$$\{f\} = [s(\omega)]\{d\} \quad (23)$$

여기서, $[s(\omega)]$ 는 스펙트럴요소이며 다음과 같다.

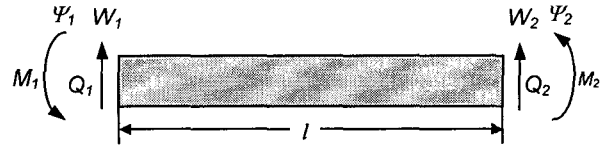


Fig. 1 Sign convention for the finite Timoshenko beam element.

$$[s(\omega)] = [Y(\omega)][X(\omega)]^{-1} \quad (24)$$

고유진동수 ω_{NAT} 는 다음과 같이 경계조건이 적용된 스펙요소행렬 $[S(\omega)]$ 의 행렬식이 0이 되게 하는 주파수다.

$$\det[S(\omega_{NAT})] = 0 \quad (25)$$

4. 안정성

축 방향으로 이동하는 보는 특정한 위험속도 이상에서 불안정해질 수 있다. 이동하는 보의 안정성을 해석하기 위해 보의 자유진동응답을 다음과 같이 나타낼 수 있다[15].

$$w(x,t) = \bar{w} e^{\lambda t}, \quad \psi(x,t) = \bar{\psi} e^{\lambda t} \quad (26)$$

식 (26)을 자유진동에 대한 운동방정식에 적용하면 고유치문제를 유도할 수 있다. 이때, λ 는 다음과 같이 복소수형태로 나타낼 수 있다.

$$\lambda = \sigma + i\Omega \quad (27)$$

불안정상태의 종류는 고유치 λ 의 실수부와 허수부의 부호에 따라 다음과 같이 결정된다.

| | |
|------------|-------------------------------------|
| Stable | if $\sigma \leq 0$ |
| Flutter | if $\sigma > 0$ and $\Omega \neq 0$ |
| Divergence | if $\sigma > 0$ and $\Omega = 0$ |

(28)

식 (25)의 $i\omega$ 를 λ 로 바꾸면 특정 이동속도 c 와 장력 P 일 때 보의 불안정상태를 아래의 고유치 문제를 풀어서 판단할 수 있다.

$$\det[S(\lambda)] = 0 \quad (29)$$

발산(divergence)이 발생하는 위험속도 c_D 는 두 가지 방법으로 계산할 수 있다. 첫번째 방법은 보가 정적인 방법에 의해 발산되는 속도를 찾는 것이고[5, 16], 두번째는 보의 이동속도와 보의 파동에 대한 위상속도(phase speed: c_p)의 관계로부터 발산이 발생하는 속도를 찾는다[16].

첫번째 방법을 이용하기 위해서 식 (4)에서 $\omega = 0$ 로 두면 식 (4)을 정적인 경우의 고유치문제로 표현할 수 있으며 이때, 해가 존재하기 위해서는 다음의 특성방정식을 만족해야 한다.

$$k^2[(1+a_4-a_1c^2)(1-a_2c^2)k^2-a_3(a_1c^2-a_4)]=0 \quad (30)$$

식 (30)의 해는 다음과 같다.

$$k_1 = k_2 = 0$$

$$k_3 = -k_4 = \bar{k} = \sqrt{\frac{a_3(a_1c^2 - a_4)}{(1-a_2c^2)(1+a_4-a_1c^2)}} \quad (31)$$

따라서, 식 (31)의 결과로부터 이동하는 보의 일반해를 유도할 수 있으며, 유도된 일반해에 단순지지의 경계조건을 적용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\bar{k}_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (32)$$

여기서, L 은 보의 길이이며 n 은 모우드번호를 나타낸다. 식 (31)과 (32)을 같게 두면 위험속도 c_{Dn} 을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c_{Dn} = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{q_1 - \sqrt{q_1^2 + q_2}}{2a_1a_2}} & \text{(bending wave)} \\ \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2}}{2a_1a_2}} & \text{(shear wave)} \end{cases} \quad (33)$$

여기서

$$q_1 = a_1a_3L^2 + \pi^2n^2(a_1 + a_2 + a_2a_4) \quad (34)$$

$$q_2 = -4\pi^2n^2a_1a_2[a_3a_4L^2 + \pi^2n^2(1+a_4)]$$

두번째 방법은 위험속도 c_D 를 보의 이동속도와 정지된 보에 대한 굽힘파동의 위상속도가 같을 때 불안정상태가 발생할 수 있다는 사실로부터 계산한다($c_D = c_p$). 위상속도는 다음과 같다[11].

$$c_p = \omega/k \quad (35)$$

이동하지 않는 보의 분산관계에 대한 특성방정식은 식 (11)에서 보의 이동속도 $c = 0$ 으로 두면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$k^4 + \bar{\beta}k^2 + \bar{\eta} = 0 \quad (36)$$

여기서

$$\bar{\beta} = a_3a_4 - \omega^2(a_1 + a_2 + a_2a_4)/\bar{\Delta}$$

$$\bar{\eta} = a_1\omega^2(a_2\omega^2 - a_3)/\bar{\Delta} \quad (37)$$

$$\bar{\Delta} = 1 + a_4$$

식 (36)에 대한 해는 다음과 같다.

$$k_1 = -k_2 = \bar{k}_1 = \sqrt{\frac{-\bar{\beta} + \sqrt{\bar{\beta}^2 - 4\bar{\eta}}}{2}} \quad (38)$$

$$k_3 = -k_4 = \bar{k}_2 = \sqrt{\frac{-\bar{\beta} - \sqrt{\bar{\beta}^2 - 4\bar{\eta}}}{2}}$$

식 (38)로부터, 정지된 보의 일반해를 유도할 수 있으며, 유도된 일반해에 단순지지의 경계조건을

적용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

(a) when $\omega \leq \omega_c$

$$\bar{k}_{1n} = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (39)$$

(b) when $\omega > \omega_c$

$$\bar{k}_{1n} = \frac{n\pi}{L} \quad \text{or} \quad \bar{k}_{2n} = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (40)$$

여기서, ω_c 는 전단모우드의 감쇄가 일어나는 차단주파수(cut-off frequency)이다. 식 (39) 또는 (40)의 파수를 식 (36)에 대입하고 주파수 ω 에 대해 풀고 식 (35)의 관계를 적용하면, 식 (33)과 동일한 결과를 얻을 수 있다.

식 (33)로부터 정지된 보에 대한 굽힘파동이나 전단파동의 위상속도가 이동하는 보의 이동속도와 같아질 경우 불안정상태가 나타날 수 있다는 사실을 알 수 있다.

5. 수치 예제

본 연구에서 수치시뮬레이션을 위해서 사용한 보의 단순지지원 균등한 보이며 다음과 같은 물성치를 적용하였다. 길이 $L = 1 \text{ m}$, 단위길이 당 밀도 $\rho A = 0.84 \text{ kg/m}$, 단위길이 당 질량 관성 모멘트 $\rho I = 7 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 굽힘강성 $EI = 180 \text{ N}\cdot\text{m}^2$, 전단강성 $\kappa GA = 6.75 \times 10^6 \text{ N}$.

Table 1은 스펙트럴요소의 정확도를 확인하고 이동속도 c 와 축 방향 장력 P 가 고유진동수에 미치는 영향을 보여준다. 스펙트럴요소를 이용하여 계산된 고유진동수와 해석해[13], 유한요소법에 의해 계산된 고유진동수를 서로 비교하였다.

예제로 사용된 보가 균등하기 때문에, Table 1에서 스펙트럴요소법에 의한 결과는 사용된 요소의 개수가 단지 한 게임에도 불구하고 해석해와 정확히 일치함을 알 수 있다. 그러나, 유한요소법은 요소의 개수를 충분히 증가시켰을 때에야 비로소 결과가 비교적 신뢰할 수 있는 정확도를 보인다. 즉, 스펙트럴요소모델은 유한요소모델에서 사용되는 요소의 개수보다 더 적은 개수의 요소를 사용하고도 더 정확한 결과를 얻을 수 있다. 또한, 고주파수영역에서 이러한 경향이 더욱 명백히 나타난다.

Table 1로부터 알 수 있듯이, 이동속도가 고정되어 있을 경우, 고유진동수는 장력이 증가함에 따라 증가한다. 그 반면, 장력이 고정되어 있을 경우 이동속도가 증가함에 따라 고유진동수가 감소함을 알 수 있다. 이동속도가 특정한 값에 이르렀을 때 첫번째 고유진동수가 사라져버린다. 즉, 불안정상

태가 발생한 것이다.

Fig. 2는 보에 작용하는 장력이 $P = 1 \text{ kN/m}$ 로 고정되어 있을 때 이동속도의 변화에 따른 고유치의 변화를 보이고 있다. 이동속도가 첫번째 위험속도 $c_{D1} = 57.5 \text{ m/s}$ 보다 작을 때, 모든 고유치가 순수한 허수이기 때문에 보는 안정된 상태이다. 그러나, 보의 이동속도가 c_{D1} 과 $c_S = 98.2 \text{ m/s}$ 사이에 있을 때, 양수이면서 실수인 고유치가 존재하므로 발산이 발생할 수 있다. Fig. 2는 이동속도 c_S 와 $c_{F1} = 101.2 \text{ m/s}$ 사이에 두번째 안정된 영역이 존재할 수 있음을 보여준다. 이동속도가 이 영역에 있을 때는 모든 고유치가 순수한 허수이다. 이동속도가 c_{F1} 보다 커지면, 보의 고유치가 양수인 실수부를 가질 수 있게 되므로 플러터가 발생할 수 있다. 이때, c_{D2} , c_{F2} 는 각각 142.0 m/s 와 154.6 m/s 이다.

Fig. 3는 장력 P 의 변화에 따른 세 개의 위험속도 c_{D1} , c_S , c_{F1} 의 변화를 나타낸다. c_{D1} 아래의 부분과 c_S 와 c_{F1} 사이의 좁은 영역은 각각 첫번째 안정영역과 두번째 안정영역이다. c_{D1} 과 c_S 사이는 첫번째 불안정영역이며 이 영역에서는 발산이 발생할 수 있다. 그 반면에, c_{F1} 이상의 영역은 발산뿐만 아니라 플러터도 일어날 수 있는 불안정영역이다.

이동하는 티모센코보는 복소모우드를 가질 수 있다. Fig. 4는 여러 이동속도에서 고유모우드의 실수부를 비교한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 정지된 보의 여러 대칭, 비대칭 모우드들이 보가 이동하는 경우에 이동속도의 영향으로 원래의 대칭, 비대칭 형태를 유지하지 못한다. Fig. 4(a)에 알 수 있듯이 이동속도가 첫번째 위험속도 c_{D1} 에 도달하면 첫번째 굽힘모우드는 없어진다.

6. 결론

본 논문에서는 일정한 장력을 받는 이동하는 티모센코보의 운동방정식을 유도하였고 정확한 형상함수를 이용하여 스펙트럴요소모델을 유도하였다. 개발된 스펙트럴요소를 이용한 몇몇 수치해석의 결과를 해석적 방법과 유한요소법에 의해 계산된 결과들과 비교하여 개발된 스펙트럴요소를 정확도와 신뢰성을 확인하였다. 발산이 생길 수 있는 위험속도를 해석적으로 유도하였으며, 수치 해석을 통해 다음과 같은 사항을 확인하였다:

(1) 축 방향의 장력이 증가하면 고유진동수는 증가하며 이동속도가 증가함에 따라 고유진동수는 감소한다. 보의 이동속도가 식 (42)이 의해 예측된 가장 낮은 위험속도에 다다르면, 첫번째 고유진동수는 사라지고 보는 불안정성해질 수 있다.

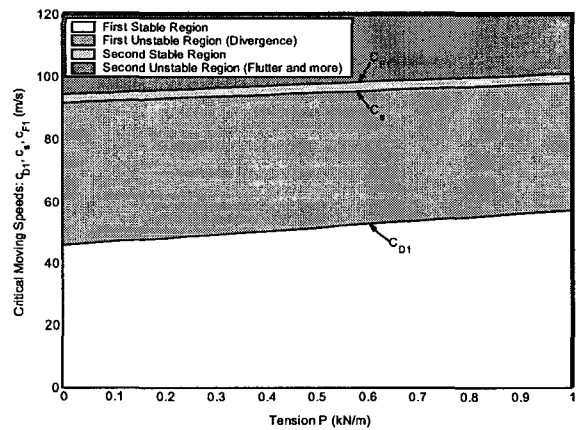


Fig. 3 The critical moving speeds vs. the tension

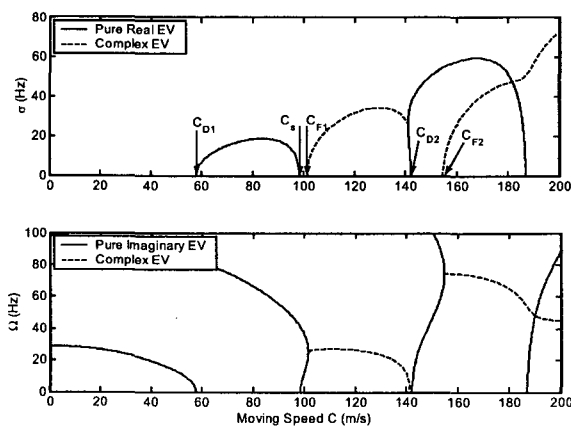


Fig. 2 The eigenvalues $\lambda = \sigma + i\Omega$ vs. the moving speed of beam c

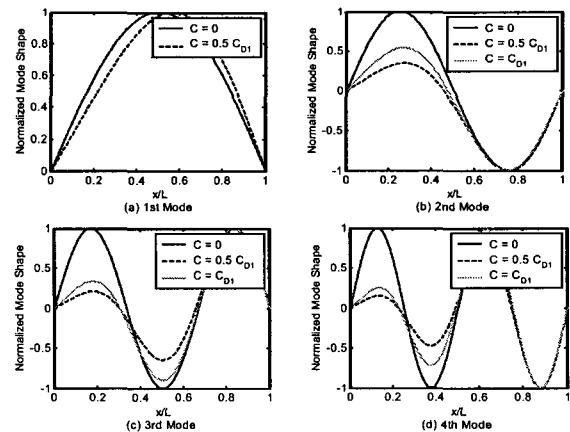


Fig. 4 Moving speed dependence of the natural modes of a moving Timoshenko beam under the axial tension $P = 1 \text{ kN}$.

(2) 첫번째 위험속도이상의 속도영역에서도 매우 좁은 안정된 속도영역이 존재할 수 있다. 또한, 장력을 증가시키에 따라 불안정성이 나타나는 이 동속도는 증가하는 경향이 있다.

참고문헌

(1) J. A. Wickert and C. D. Mote, Jr. 1988 *Shock and Vibration Digest* 20, 3-13. Current research on the vibration and stability of axially moving materials.
 (2) C. D. Mote, Jr. 1965 *Journal of the Franklin Institute* 279(4), 430-444. A study of band saw vibrations.
 (3) H. P. Lee 1993 *International Journal of Solids and Structures* 30(2), 199-209. Dynamics of a beam moving over multiple supports.
 (4) M. Stylianou and B. Tabarrok 1994 *Journal of Sound and Vibration* 178(4), 433-453. Finite element analysis of an axially moving beam, part I: time integration
 (5) J. A. Wickert and C. D. Mote, Jr. 1990 *Journal of Applied Mechanics* 57, 738-744. Classical vibration analysis of axially moving continua.
 (6) C. H. Riedel and C. A. Tan 1998 *Journal of Sound and Vibration* 215(3), 455-473. Dynamic characteristics and mode localization of elastically constrained axially moving strings and beams.

(7) A. L. Thurman and C. D. Mote, Jr. 1969 *Journal of Applied Mechanics* 36, 83-91. Free, periodic, nonlinear oscillation of an axially moving strip.
 (8) J. A. Wickert 1992 *International Journal of Non-Linear Mechanics* 27(3), 503-517. Non-linear vibration of a traveling tensioned beam.
 (9) A. Simpson 1973 *Journal of Mechanical Engineering Science* 15, 159-164. Transverse modes and frequencies of beams translating between fixed end supports.
 (10) S. Chonan 1986 *Journal of Sound and Vibration* 107(1), 155-165. Steady state response of an axially moving strip subjected to a stationary lateral load.
 (11) J. F. Doyle 1997 *Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*. New York: Springer-Verlag.
 (12) U. Lee, J. Kim and A. Y. T. Leung 2000 *The Shock and Vibration Digest* 32(6), 451-465. The spectral element method in structural dynamics.
 (13) R. D. Blevins 1979 *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, New York: Van Nostrand Reinhold Company.
 (14) M. Petyt 1990 *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, New York: Cambridge University Press.
 (15) R. L. Bisplinghoff and H. Ashley 1962 *Principles of Aeroelasticity*, New York: Dover Publications.
 (16) C. C. Lin 1997 *International Journal of Solids & Structures*, 34(24), 3179-3190, Stability and vibration characteristics of axially moving plates.

Table. 1 Comparison of the natural frequencies obtained by the present spectral element model (SEM), the conventional finite element model (FEM) and the analytical method [13]

| c (m/s) | P (kN/m) | Method | N _E (N _{DOF}) | Natural Frequency (Hz) | | | | | |
|-----------------|-------------|-----------------|------------------------------------|------------------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|
| | | | | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_5 | ω_{10} | ω_{15} |
| 0 | 0 | Analytical [13] | - | 22.99 | 91.91 | 206.63 | 572.39 | 2260.92 | 4985.98 |
| | | SEM | 1 (2) | 22.99 | 91.91 | 206.63 | 572.39 | 2260.92 | 4985.98 |
| | | FEM | 10 (20) | 22.99 | 91.92 | 206.75 | 574.99 | 2541.59 | 6352.15 |
| | | | 50 (100) | 22.99 | 91.91 | 206.63 | 572.41 | 2262.09 | 4998.30 |
| | | 100 (200) | 22.99 | 91.91 | 206.63 | 572.39 | 2261.17 | 4988.63 | |
| 0 | 1 | SEM | 1 (2) | 28.74 | 98.17 | 213.00 | 578.84 | 2267.45 | 4992.58 |
| | | FEM | 10 (20) | 28.74 | 98.18 | 213.13 | 581.42 | 2547.47 | 6357.62 |
| | | | 50 (100) | 28.74 | 98.17 | 213.01 | 578.86 | 2268.61 | 5004.88 |
| | | | 100 (200) | 28.74 | 98.17 | 213.00 | 578.84 | 2267.69 | 4995.23 |
| c _{Dl} | 1 | SEM | 1 (2) | 0.00 | 82.93 | 200.02 | 567.33 | 2256.42 | 4980.86 |
| | | FEM | 10 (20) | 0.33 | 82.97 | 200.24 | 570.52 | 2540.94 | 6359.58 |
| | | | 50 (100) | 0.32 | 82.94 | 200.03 | 567.36 | 2257.66 | 4993.52 |
| | | | 100 (200) | 0.32 | 82.94 | 200.03 | 567.34 | 2256.69 | 4983.60 |

Note: N_E = the number of finite elements, N_{DOF} = the number of degrees-of-freedom