

미분 변환법에 의한 쌍곡선형태 Winkler 탄성 지반상의 보 해석

Analysis of Beam Resting on Hyperbolic Winkler Elastic Foundation by Differential Transformation

신 영 재^{*} · 윤 종 학^{**} · 전 수 주^{***}

Yung-Jae Shin, Jong-Hak Yun, Su-Ju Jaun

Key Words:Hyperbolic Winkler Elastic Foundation(쌍곡선 형태의 Winkler 탄성 지반), Differential Transformation(미분 변환법).

Abstract

In this paper, the numerical analysis of beam resting on hyperbolic Winkler elastic foundation by differential transformation is performed. Accordig to the change of parameter of hyperbolic Winkler elastic foundation, beam deformation is computed when the boundary conditions are clamped-clamped, pinned-pined and clamped-free.

1. 서 론

탄성 지반상의 보에 대한 동적 거동 해석은 공학의 많은 분야에서 관심의 대상이었다. 탄성 지반상에서의 보에 대한 해석은 탄성지반의 반력이 보의 변형량에 비례한다는 가정하에 전개되었다. 이러한 가정은 E. Winkler에 의해 처음 소개되었다⁽¹⁾. Pasternak은 Winkler 지반에 전단력에 의한 상호작용을 포함시킨 지반 모델을 제안하였다⁽²⁾

* 국립안동대학교 기계공학부

E-mail :yjshin@andong.ac.kr

Tel : (054) -5435 Fax : (054) 823-5495

** 국립안동대학교 기계공학부

***국립안동대학교 기계공학부

가장 간단한 모델은 Winkler 지반 모델이며 이 미 동적 거동과 안정성에 대한 평가가 근사해를 구하는 방법⁽³⁾과 정해를 구하는 접근법^(4,5)을 통해 자세히 연구되었다. Farghaly 등은 편심된 집중 질량과 축방향 힘이 자유 진동에 미치는 영향을 연구하였다⁽⁴⁾. Razaqpur 등은 Winkler 지반 모델하에서 Euler-Bernoulli 보에 대한 해석을 유한 요소법을 사용하여 수행하였다⁽⁶⁾. Valsangkar 등에 의해서 Pasternak 지반상에서의 Euler-Bernoulli 보에 대한 해석이 이루어 졌으며⁽⁷⁾, Rosa에 의해서 Timoshenko 보에 대한 연구가 수행되었다⁽⁸⁾. Soldatos 등은 쌍곡선 형태의 Winkler 지반 모델의

해석적인 연구를 행하였다⁽⁹⁾

이러한 탄성 지반상의 연구들은 해석적 방법과 수치적인 방법을 통하여 행하여 졌다. 그러나 탄성 지반상의 보의 해석에 있어서 해석적인 방법으로 접근하는 것은 해를 얻기가 힘들 경우가 많으며, FEM이나 FDM으로 수치해석시 공식화가 어렵고 해를 얻는데 많은 시간이 소요되므로 경제성과 효율성이 떨어지는 단점이 있다. 따라서 간단한 수식관계에 의한 빠른 수렴성을 갖는 수치해석 방법의 요구에 부응하여 새로운 수치해석 방법으로 미분변환법(Differential Transformation)이 개발되었다.

1986년 Zhou에 의해 소개된 미분 변환법(Differential Transformation)은 선형, 비선형 문제에서 수렴이 빠르고 간단한 연산과 순환관계에 의한 수치해석으로 복잡한 수식을 필요로 하지 않는다⁽¹⁰⁾. 미분변환법을 적용하여 Malik등은 연속시스템에서 진동을 해석하여 미분변환법의 타당성과 빠른 수렴성을 검증하였으며⁽¹¹⁾, Chen등은 비선형 스프링시스템의 진동해석을 통해 비선형 진동해석에 미분변환법을 적용하였고⁽¹²⁾, Chen은 축하중을 받는 티모셴코 보(Timoshenko Beam)의 진동해석을 하였다⁽¹³⁾. 상기와같이 미분변환법은 많은 학자들에 다양한 공학문제에 활발히 적용 및 연구되고 있는 수치해석방법이다.

본 연구는 쌍곡선 형태의 Winkler 탄성 지반상 보의 비선형적인 지배 방정식에 미분변환법을 적용하여 수치해석을 하였다. 수치해석시 경계조건이 고정단-고정단, 핀단-핀단 그리고 고정단-자유단에 대하여 쌍곡선 형태의 Winkler 탄성 지반 변수의 변화에 따라 보의 처짐을 수치해석하여 미분변환법의 특성을 고찰하였다.

2. 운동방정식

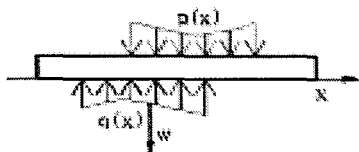


Fig. 1 The coordinate system of a beam resting on an elastic foundation.

Fig.1은 탄성지반상의 보를 나타낸다. 그림에서 $p(x)$ 는 보에 종방향으로 작용하는 분포 하중을 나타내며, $q(x)$ 는 보의 임의의 점에서 처짐 $w(x)$ 에 따른 탄성지반의 반력이다. 쌍곡선형태 Winkler 탄성 지반상의 $q(x)$ 는 식 (1)과 같이 나타낸다.

$$q(x) = \frac{k w(x)}{1 + \mu w(x)} \tag{1}$$

여기서 k 는 Winkler 지반 계수(modulus of Winkler foundation)이며 μ 는 쌍곡선형태 Winkler 탄성 지반상의 변수이다. 만약 $\mu = 0$ 라면 Winkler 탄성 지반이 된다.

유한 또는 무한 길이를 가지는 보의 처짐이 작고 전단변형과 회전관성을 무시할 경우 보는 Bernoulli-Euler 보로 생각할 수 있다. 그러므로 보의 처짐량을 지배하는 지배 방정식은 Bernoulli-Euler 보 이론으로부터 식 (2)와 같이 얻을 수 있다.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + k \frac{bw}{1 + \mu w} = b(px) \tag{2}$$

여기서 E 는 보의 종탄성계수(Youngs modulus), I 는 단면에 대한 관성 모멘트(area moment of inertia) 그리고 b 는 보의 너비(width)이다. 양 끝단에서의 경계조건은 고정단(clamped)일 경우 $w = w' = 0$ 이며, 핀단(pinned)일 경우 $w = w' = 0$, 그리고 자유(free)단일 경우 $w'' = w''' = 0$ 이다.

3. 미분 변환법

미분 변환법(Differential Transformation)은 Zhou가 전기 회로(electric circuit)에 관한 연구에서 선형과 비선형 초기값 문제의 해를 구하기 위해 제시한 것(Zhou, 1986)으로 테일러 급수(Taylor series expansion)에 기본을 두었다. 이 방법은 선형과 비선형의 공학 문제에 적용할 수 있고, 간단한 순환 관계

에 의해서 해를 구할 수 있으며 해의 정확도가 대단히 높다.

임의의 원함수(original function) $y(x)$ 에 대한 미분 변환은

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (3)$$

와 같이 정의되고, 여기서 $Y(k)$ 를 T - function이라 한다.

$Y(k)$ 의 미분 역변환(differential inverse transformation)은

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (4)$$

로 정의되므로, 원함수 $y(x)$ 는 다음 식으로 유도된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (5)$$

상기의 정의로부터 다음과 같은 미분 변환에 관한 기본적인 연산은 Table. 1과 같다.

Table. 1 Examples of the differential transformation of the original function

Original function	T - function
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$y(x) = z y(x)$	$Z(k) = k Y(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$
$y(x) = \frac{dy(x)}{dx}$	$Z(k) = (k-1) Y(k-1)$
$w(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$	$W(k) = (k-1)(k-2) Y(k-2)$
$w(x) = y(x) z(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Y(l) Z(k-l)$
$w(x) = x^n$	$W(k) = \frac{n!}{k!} \delta_{k-n} \quad \delta_{k-n} = \begin{cases} 1 & k=n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$

실제의 적용에 있어서는 $y(x)$ 는 근사적으로 n개의 유한한 항으로 식(6)과 같이 나타내며, n은 수렴도에 의해 결정되어진다.

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^n x^k Y(k) \quad (6)$$

4. 미분 변환법 적용

4.1 지배 방정식의 미분 변환법 적용

쌍곡선형태 Winkler 탄성 지반상의 보의 처짐을 지배하는 식(2)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(1+\mu w) \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{kb}{EI} w = (1+\mu w) \frac{b}{EI} p(x) \quad (7)$$

여기서 $p(x)$ 가 등 분포하중(p)이 이고, 식(7)을 미분 변환을 적용하면

$$W(4) = \frac{(\mu \frac{b}{EI} p - \frac{kb}{EI}) W(0) + \frac{b}{EI} p}{1 \times 2 \times 3 \times 4 (1 + \mu W(0))} \quad (7.a)$$

$$W(k+4) =$$

$$\frac{\mu \sum_{l=1}^k W(l)(k+1-l)(k+2-l)(k+3-l)(k+4-l) W(k+4-l)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) + \mu(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) W(0)} + \frac{\mu \frac{b}{EI} p - \frac{kb}{EI}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) + \mu(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) W(0)} W(k) \quad (8)$$

과 같으며, k 는 1, 2, 3, ..., n 이다.

4.2 경계 조건의 미분 변환법 적용

탄성 지반 위의 보의 양단에서의 경계조건이 고정단-고정단(clamped-clamped), 핀단-핀단(pinned-pinned) 그리고 고정단-자유단(clamped-free)일 때 미분 변환하면 각각 다음과 같다.

i) 고정단-고정단

at $x=0$

$$w(0) = W(0) = 0$$

$$w'(0) = W(1) = 0$$

(9.a)

at $x = L = 1$

$$w(1) = \sum_{k=0}^n W(k) = 0$$

$$w'(1) = \sum_{k=1}^n kW(k) = 0 \tag{9.b}$$

ii) 핀단-핀단

at $x=0$

$$w(0) = W(0) = 0$$

$$w''(0) = W(2) = 0 \tag{10.a}$$

at $x = L = 1$

$$w(1) = \sum_{k=0}^n W(k) = 0$$

$$w''(1) = \sum_{k=2}^n k \times (k-1) W(k) = 0 \tag{10.b}$$

iii) 고정단-자유단

at $x=0$

$$w(0) = W(0) = 0$$

$$w'(0) = W(1) = 0 \tag{11.a}$$

at $x = L = 1$

$$w''(1) = \sum_{k=2}^n k \times (k-1) W(k) = 0$$

$$w'''(1) = \sum_{k=3}^n k \times (k-1) \times (k-2) W(k) = 0 \tag{11.b}$$

5. 수치해석

본 연구는 $EI=1000[Nm^2]$, $p=100[N/m]$ 그리고 Winkler 지반 계수 k 값이 흙의 물성치인 $10^5[N/m^2]$ 일 때 미분 변환법을 사용하여 수치해석을 수행하였다. 미분 변환법의 시간경제성과 효율을 알아보기 위하여 쌍곡선 형태의 Winkler 지반 변수 $\mu = 0[m^{-1}]$ 일 때, 즉 Winkler 지반일 때 n 의 값에 따른 수렴도를 조사하였다. 그리고 경계조건이 고정단-고정단, 핀단-핀단 그

리고 고정단-자유단일 때 보의 처짐을 쌍곡선 형태의 Winkler 지반 변수 μ 값의 변화에 따라 구하였다.

경계조건이 고정단-고정단이고, 미분 변환된 지배방정식인 식(8)과 경계조건 식(9)를 사용하여 $\mu = 0$ 인 Winkler 지반 일 때 n 값에 따른 보의 처짐이 Fig. 2에 나타나 있다. 그림에서 $n = 14$ 이상에서 완전히 수렴하였음을 알 수 있다. 이와 같이 Winkler 지반상의 보의 해석에서 미분 변환법을 적용하면 대수 방정식 형태의 지배방정식과 경계조건을 구할 수 있다. 미분 변환된 지배 방정식은 간단한 순환 관계를 가지며 적은 n 값에서도 수렴도가 좋은 결과를 얻을 수 있음을 알았다.

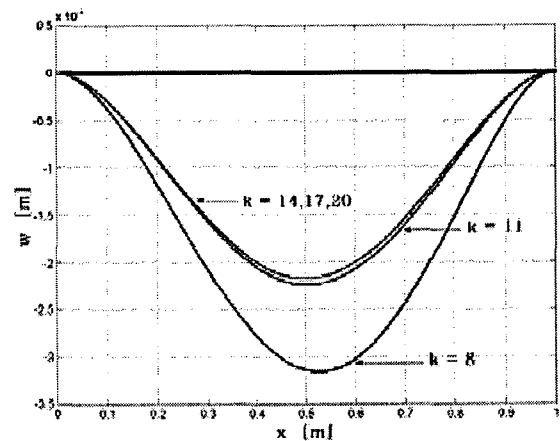


Fig. 2 Deflection of a clamped-clamped beam resting on a Winkler foundation.

Fig.3은 경계조건이 고정단-고정단이며, $n = 20$ 이고 $\mu = 0.1, 1, 10, 70, 100$ 일 때 보의 처짐을 지배방정식 (8)과 경계조건식 (9)를 사용하여 나타내었다. 그림에서 μ 값이 상대적으로 작은 0.1, 1, 10 에서는 Winkler 탄성지반상의 보의 처짐과 차이가 없으며 상대적으로 큰 값인 70, 100에서 그 영향이 증가함을 알수있다.

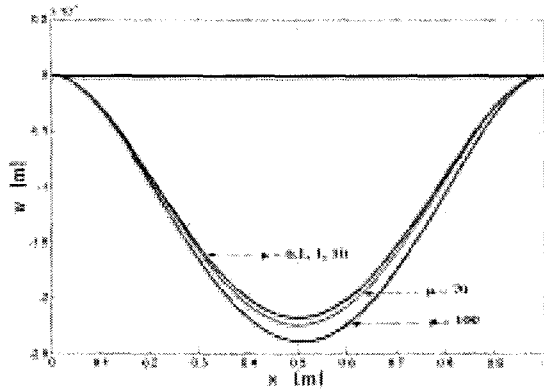


Fig. 3 Deflection of a clamped-clamped beam resting on hyperbolic Winkler foundation.

경계조건이 핀단-핀단이며, $n = 20$ 이고 $\mu = 0.1, 1, 10, 70, 100$ 일 때 보의 처짐을 식 (8)과 경계조건식 (10)을 사용하여 Fig.4에 나타내었다. μ 값이 증가함에 따라 보의 처짐이 증가함을 보이며 보의 최대 처짐은 경계조건이 고정단-고정단일 때 보다 큼을 알 수 있다.

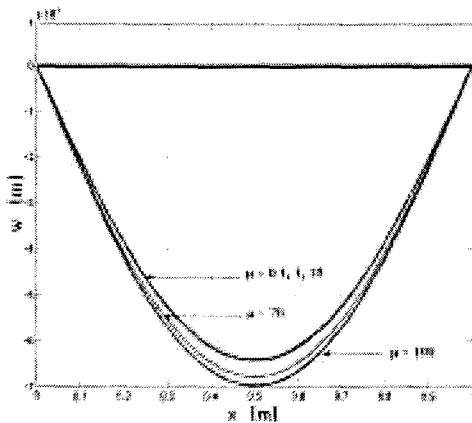


Fig. 4 Deflection of a pinned-pinned beam resting on hyperbolic Winkler foundation.

Fig.5는 경계조건이 고정단-자유단이며, $n = 20$ 이고 $\mu = 0.1, 1, 10, 70, 100$ 일 때 보의 처짐을 식 (8)

과 경계조건식 (11)를 사용하여 나타내었다. μ 값이 증가함에 따라 보의 처짐량이 증가함을 알 수 있으며 μ 값이 상대적으로 작은 0.1, 1, 10에서는 보의 처짐이 작고 상대적으로 큰 영역인 70, 100에서는 상대적으로 크다는 것을 알 수 있다.

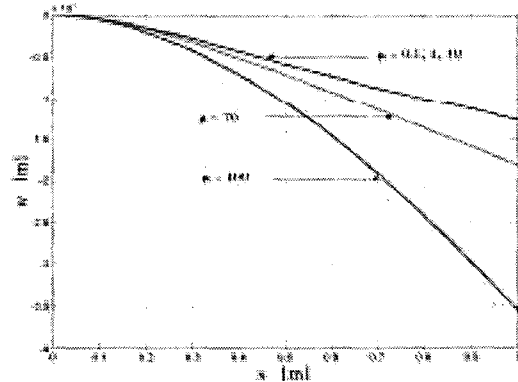


Fig. 5 Deflection of a clamped-free beam resting on hyperbolic Winkler foundation.

상기의 경계조건이 고정단-고정단, 핀단-핀단 그리고 고정단-자유단일 경우의 보의 수치해석 결과는 μ 값이 비교적 작은 0.1, 1, 10에서는 보의 처짐에 영향이 적으며 비교적 큰 70, 100일 경우 큰 영향을 가짐을 알 수 있다.

6. 결론

본 연구는 쌍곡선 형태의 Winkler 탄성 지반상의 보의 해석을 위해 미분 변환법을 사용하여 고정단-고정단, 핀단-핀단 그리고 고정단-자유단인 경계조건에서 보의 처짐을 수치해석 하였다. 이에 따른 결과는 다음과 같다.

1. 비선형적인 탄성 지반상의(쌍곡선 형태의 Winkler 탄성 지반) 보 문제에 미분 변환법을 사용하여 수치해석을 수행 하였다.
2. 미분 변환법(Differential Transformation)은 적은 n 값에서 해를 얻을 수 있기 때문에 시간경제성과 효율성이 크고 적용이 용이함을 보인다.

3. 미분 변환법은 효율적이며 빠른 수렴을 보인다.
4. 쌍곡선 형태의 Winkler 탄성 지반상의 보의 처짐은 상대적으로 적은 변수 μ 값에 대하여 적은 영향을 받으며, μ 값이 증가함에 따라 영향이 증가함을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Hetenyi M., 1946, "Beams on Elastic Foundation", The University of Michigan Press.
- (2) Rades, M., 1970, "Steady-state response of a finite beam on a Pasternak-type foundation", International Journal of Solids Structures, 6, pp. 739-756.
- (3) De Rosa, M. A., 1989, "Stability and dynamics of beams on Winkler elastic foundations", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 18, pp. 377-388.
- (4) Farghaly, S. H., and Zeid, K. M., 1995, "An exact frequency equation for an axially loaded beam-mass-spring system resting on a Winkler elastic foundation", Journal of Sound and Vibration, 185(2), pp. 357-363.
- (5) Maurizi, M. J., Rosales, M., and Belles, P., 1988, "A further note on the free vibrations of beams resting on an elastic foundation", Journal of Sound and Vibration, 124(1), pp. 191-193.
- (6) Razaqpur, A. G., and Shah, K. R., 1991, "Exact analysis of beams on two-parameter elastic foundations", International Journal of Solids Structures, 27(4), pp. 435-454.
- (7) Valsangkar, A. J., and Pradhanang, R., 1988, "Vibrations of beam-columns on two-parameter elastic foundations", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 16, pp. 217-225.
- (8) De Rosa, M. A., 1995, "Free vibrations of Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation", Computers and Structures, 57(1), pp. 151-156.
- (9) Soldatos, K. P., and Selvadurai, A. P. A., 1984, "Flexure of Beams Resting on Hyperbolic Elastic Foundations", International Journal of Solids Structures, Vol. 21, No. 4, pp. 373-388.
- (10) Zhou, J. K., 1986, "Differential Transformation and its Application for Electrical Circuit", Huazhong University Press, Wuhan China (in Chinese).
- (11) Malik, Moinuddin., and Dang, H. H., 1998, Vibration Analysis of Continuous Systems by Differential Transformation Applied Mathematics and Computation, Vol. 96, pp 17-26.
- (12) Chen, Cheng. Jen., and WU, W. J., 1994, "Application of the Taylor Differential Transformation Method to Viscous Damped Vibration of Hard and Soft spring System", Computer and structures, Vol.59 No.4, pp.631-639.
- (13) Chen, C. K., and Ho, S. H., 1999, " Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko Beams under Axial Loading using Differential Transform", international Journal of Mechanical Sciences, Vol.41, pp.1339-1356.
- (14) Chen, C. K., and Ho, S. H., 1996, "Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problems", Applied Mathematics and Computation, Vol. 79, pp. 173-188.
- (15) Zhou, J. K., 1986, "Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits", Huazhong University Press, Wuhan China.