

비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 박판의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Thin Plate on Inhomogeneous Pasternak Foundation

○ 김일중* · 이용수** · 오숙경*** · 이효진****

Kim, Il Jung, Lee, Yong Soo and Oh, Soog Kyoung and Lee, Hoy Jin

Key Words : Free Vibration, Thin Plate, Inhomogeneous Pasternak Foundation, Concentrated Mass

Abstract : Recently, as size of building structure becomes larger, mat area of building structure is supported on Inhomogeneous foundation. The equipment machineries in building are mostly on basement story. The slab of the lowest basement story with equipment machineries is considered as plate supported on foundation with concentrated masses. In this paper, vibration analysis of rectangular thin plate is done by use of rectangular finite element with 4 nodes. The solution of this paper are compared with existing solution and natural frequencies of thin plates, with concented mass, on inhomogeneous Pasternak foundation are calculated

기호설명

$\bar{a} \times \bar{b}$: 전체판의 크기

D : 판의 휨강성

E : 탄성계수

G : 전단탄성계수

h : 판 두께

k_w : Winkler 지반강성

k_g : 전단지반강성

$SFP = \frac{k_g \bar{a}^2}{D}$: 전단지반계수

$WFP = \frac{k_w \bar{a}^4}{D}$: Winkler지반계수

ρ : 단위 체적당질량

μ : 포아송비

w : 수직처짐

θ_x : x 방향 회전각

θ_y : y 방향 회전각

ω : 판의 고유진동수

m : 판 전체 질량

$M_c(a_1, b_1)$: $x=a_1, y=b_1$ 위치의 집중질량

1. 서론

건축물의 규모가 대형화 되어감에 따라 건축물의 온통기초는 비균질한 지반위에 놓이게 되는 경우가 많다. 온통기초는 주로 진동을 발생시키는 진동원 즉, 발전기, 동력기, 대형펌프 등 설비기계가 위치하는 경우가 많으며, 설비기계에서 발생하는 기계진동은 기초판에 직접적인 동적영향을 미치게 된다. 그리고 외부에서 작용하는 동적영향으로는 발파, 향타, 폭발, 차량이동, 지진등을 들 수 있다. 이러한 동적영향은 근접한 지반에 영향을 주고 그 영향은 다시 구조물의 동적응답에 영향을 미치게 되는 지반 - 구조물 상호 작용을 일으키게 된다. 따라서 본 연구에서는 비균질 탄성 지반에 지지된 집중질량을 갖는 장방형 판에 대한 고유 진동수를 구하여 건축구조물의 온통기초에 대한 동적 특성을 규명하여 설계시 기초자료를 얻는데 그 목적이 있다.

1956년 Cohen과 Hendelman⁽¹⁾에 의해 Rayleigh - Ritz 법을 이용하여 다양한 경계 조건하에 추가 분포 질량을 갖는 장방형판의 진동 해석이 이루어졌고, T. Wah⁽²⁾는 1961년 Dirac Delta 함수를 사용하여 집중 질량을 갖는 4변단순지지 판의 진동문제를 다루었다. 1984년 P.A.A. Laura와 R. H. Gutierrez⁽³⁾는

책임저자, 정회원, 정인대학 건축인테리어 디자인과, 조교수

E-mail : platepro@mail.chongin.ac.kr

Tel : (063)530-9273, Fax : (063)537-5842

** 정회원, 원광대학교 건축학부 정교수

*** 정회원, 원광대학교 박사수료,

**** 원광대학교 건축공학부 석사과정

Rayleigh-Ritz 법을 이용하여 비균질 지반에 지지된 판의 동적 해석을 행하였으며, 같은 해 J. A. G. Horenberg 와 J. G. M. Kerstens⁽⁴⁾는 Modal Constraint법을 이용하여 판의 동적 해석을 행하였다. K.H.Low^(5,6)는 집중질량을 받는 판의 진동 특성에 대해 1993년 발표하였다.

본 연구에서는 집중 질량을 갖는 판의 진동 해석을 하기 위해 4절점 장방형 유한 요소를 이용하여 해석하였으며 지반 조건은 지반을 수직스프링으로 이상화한 Winkler지반에 전단지반을 고려한 Pasternak지반으로 고려하였다. 지반 강성은 서로 다르게 하여 이질지반으로 이상화하였다. 그리고 판의 중앙에 집중 질량을 갖는 경우와 판의 가장자리에 갖는 경우에 대해 고유진동수를 구하였다.

2. 유한요소해석

가상 일의 원리를 이용한 판의 좌굴 및 진동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_A [m_0]^T \cdot \chi \cdot dA + \frac{1}{2} \int_A k_w w^2 \cdot dA + \{w, y\}^2 \cdot dA \\ & + \frac{1}{2} \int_A k_g [w, x]^2 - \frac{1}{2} \int_A \rho h \dot{w}^2 dA \\ & - M_c(a_1, b_1) w^2(a_1, b_1) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $dA = dx \cdot dy$

$[m_0]$: 모멘트 χ : 곡률

$\dot{w} = \partial w / \partial t$: 판의 수직변위의 시간에 대한 함수

식(1)의 좌변 첫 번째 항은 판의 휨변형에너지, 두 번째 항은 Winkler지반에 의한 변형에너지, 세 번째 항은 전단지반에 의한 변형에너지, 네 번째 항은 판의 운동에너지를 나타내고, 마지막항은 집중 질량이 한 일을 나타낸다. 유한요소해석을 위해 4절점 3자유도를 갖는 사각형 요소를 이용하였으며, 판의 변위함수는 다항식으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w = & a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y \\ & + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 = [P] \{a\} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $[P]$: 형상함수

$\{a\}$: 변위함수의 계수 행렬

2.1 판의 강성 및 질량행렬

판 요소의 처짐각 및 처짐을 매트릭스 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\{\delta\} = \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ w \end{pmatrix} = [F] \cdot \{a\} \quad (3)$$

여기서, $[F]$: 변위와 계수행렬과의 관계를

나타내는 행렬

식(3)에 요소의 각 절점 좌표 값을 대입하여 각 절점의 변위벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_j^e\} \\ \{\delta_k^e\} \\ \{\delta_l^e\} \end{Bmatrix} = [A] \cdot \{a\} \quad (4)$$

식(4)을 계수행렬 $\{a\}$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\{a\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta^e\} \quad (5)$$

길이 dx, dy 인 미소 판 요소에 작용하는 모멘트 $[m_0]$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[m_0] = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{\chi\} \quad (6)$$

여기서, $[m_0]$: 미소의 판 요소에 작용하는 모멘트

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} : \text{판의 휨강성}$$

윗 식의 곡률 $\{\chi\}$ 에 변위형상함수인 식(2)를 대입하고 식(5)의 관계를 적용하면 곡률 $\{\chi\}$ 는 다음과 같이 된다.

$$\{\chi\} = [C] \cdot \{a\} = [C] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta^e\} \quad (7)$$

식(6)에 식(7)을 대입하면 판 요소에 작용하는 모멘트 $[m_0]$ 을 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$[m_0] = [D] \cdot [C] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta^e\} \quad (8)$$

가상일의 원리 $\delta(T - U) = 0$ 을 적용하기 위해 식(1)에서 힘에 의한 변형에너지와 Winkler지반과 전단지반에 의한 변형에너지에 대해 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\delta U = \int_A [m_0]^T \cdot \delta(x) \cdot dA + \int_A F_k(\omega)^T \cdot \delta(\omega) \cdot dA + \int_A k_d [(\omega, x)^T \cdot \delta(\omega, x) + (\omega, y)^T \cdot \delta(\omega, y)] \cdot dA \quad (9)$$

식(9)의 우변의 첫 번째 항에서 요소강성매트릭스, 두 번째 항에서 Winkler 지반 강성매트릭스, 세 번째 항에서 전단지반강성매트릭스를 얻을 수 있다. 식(9)의 우변의 첫 번째 항에 식(7),(8)을 대입하여 정리하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\int_A [m_0]^T \delta(x) dA = (\delta^e)^T [A^{-1}]^T \int_A [C]^T [D]^T [C][A]^{-1} dA \delta(\delta^e) = (\delta^e)^T [K_e] \delta(\delta^e) \quad (10)$$

여기서, $[K_e]$: 요소강성 매트릭스

$$[K_e] = \int_A [A^{-1}]^T [C]^T [D]^T [C][A]^{-1} dA$$

Winkler 지반이 한 일의 변분을 취해 식(2),(5)를 대입하면 Winkler 지반 강성 행렬을 얻을 수 있다.

$$\int_A k_w(\omega)^T \cdot \delta(\omega) \cdot dA = k_w (\delta^e)^T \int_A [A^{-1}]^T [P]^T [P][A]^{-1} dA \delta(\delta^e) = (\delta^e)^T [W^e] \delta(\delta^e) \quad (11)$$

여기서, $[W^e]$: Winkler 지반 강성 매트릭스

$$[W^e] = k_w \int_A [A^{-1}]^T [P]^T [P][A]^{-1} dA$$

전단지반에 의한 변형에너지를 마찬가지로 방법으로 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\int_A k_g [(\omega, x)^T \cdot \delta(\omega, x) + (\omega, y)^T \cdot \delta(\omega, y)] \cdot dA = (\delta^e)^T \int_A k_g [A^{-1}]^T \frac{\partial}{\partial x} [P]^T \cdot \frac{\partial}{\partial x} [P][A^{-1}] dA \cdot \delta(\delta^e) + (\delta^e)^T \int_A k_g [A^{-1}]^T \frac{\partial}{\partial y} [P]^T \cdot \frac{\partial}{\partial y} [P][A^{-1}] dA \cdot \delta(\delta^e) = (\delta^e)^T [W_{gx}^e] \delta(\delta^e) + (\delta^e)^T [W_{gy}^e] \delta(\delta^e) \quad (12)$$

여기서, $[W_{gx}^e]$: x방향 전단지반 강성 매트릭스

$$[W_{gx}^e] = \int_A k_g [A^{-1}]^T \frac{\partial}{\partial x} [P]^T \cdot \frac{\partial}{\partial x} [P][A^{-1}] dA \quad (13)$$

같은 방법으로 y 방향에 대한 전단 지반 강성 매트릭스 $[W_{gy}^e]$ 를 구하면 다음과 같다.

$$[W_{gy}^e] = \int_A k_g [A^{-1}]^T \frac{\partial}{\partial y} [P]^T \cdot \frac{\partial}{\partial y} [P][A^{-1}] dA \quad (14)$$

식(1)에서 운동에너지에 대한 항의 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\delta T = \int_A \rho h(\dot{\omega}) \delta(\dot{\omega}) dA = \int_A \rho h (\delta^e)^T [A^{-1}]^T [P]^T [P][A^{-1}] \delta(\delta^e) dA = (\delta^e)^T [M^e] \delta(\delta^e) \quad (15)$$

여기서, $[M^e]$: 질량 매트릭스

$$[M^e] = \int_A \rho h [A^{-1}]^T [P]^T [P][A^{-1}] dA$$

다음 그림1.과 같이 크기 $\bar{a} \times \bar{b}$ 인 판의 중앙에서 거리 (a_1, b_1) 떨어진 위치에 집중질량을 갖는 판을 고려한다.

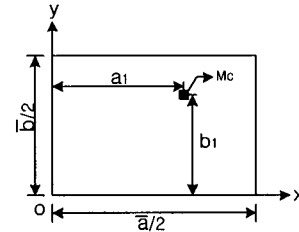


그림1. 집중질량을 갖는 판

식(1)의 마지막항에서 집중질량에 대한 항의 변분을 취하면 다음과 같다.

$$M_c(a_1, b_1) w(a_1, b_1) \delta w(a_1, b_1) \quad (16)$$

w는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w = [P] \{a\} = [P][A^{-1}] \{\delta^e\}$$

위 식을 식(16)에 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_c(a_1, b_1) [(\delta^e)^T [A^{-1}] [P]^T [P][A^{-1}]^T \delta(\delta^e)]_{x=a_1, y=b_1}$$

$$(\delta^e)^T [M_c(a_1, b_1) [A^{-1}]^T \bar{P}]^T \bar{P} [A^{-1}] \delta(\delta^e)$$

여기서 $[M_c]$: 집중질량행렬

$$[M_c] = [M_c(a_1, b_1) [A^{-1}]^T \bar{P}]^T \bar{P} [A^{-1}]$$

$$[\bar{P}] = [P]_{x=a_1, y=b_1} = [1 \ a_1 \ b_1 \ a_1^2 \ a_1 b_1 \ b_1^2 \ a_1^3 \ a_1^2 b_1 \ a_1 b_1^2 \ b_1^3]$$

2-2. 고유치 방정식

전체 판의 유한요소해석에 대한 운동에너지의 변분의 합 (δT) 및 변형에너지 변분의 합 (δU) 을 구하면 다음과 같다.

$$\delta U = (\delta)^T [K_E] \delta(\delta) + (\delta)^T [W_{gx}] \delta(\delta) + (\delta)^T [W_{gy}] \delta(\delta)$$

$$\delta T = (\delta)^T [M_E] \delta(\delta) + (\delta)^T [M_P] \delta(\delta)$$

여기서

- [K_E] : 전체판의 요소강성 행렬
- [W_{gx}] : 전체판의 x방향 전단지반 강성 매트릭스
- [W_{gy}] : 전체판의 y방향 전단지반 강성 매트릭스
- [M_E] : 전체판의 질량행렬
- [M_P] : 집중 질량 강성 행렬

위 식에 의해 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta(T-U) = \delta(A) [\omega^2 \{ [M_E] + [M_P] \} - \{ [K_E] + [W_{gx}] + [K_{gy}] \}] = 0$$

$$\{ \{ [K_E] + [W_{gx}] + [K_{gy}] \} - \omega^2 \{ [M_E] + [M_P] \} \} = 0 \quad (17)$$

식(17)에서 구한 ω 가 집중질량을 갖는 판의 고유진동수가 된다.

3. 유한요소법의 적용 및 비교분석

3.1 유한요소법의 적용

적용모델은 그림2와 같다. Pasternak지반은 Winkler지반과 전단지반의 조합으로 이루어져 있으며 Winkler지반계수는 판 중앙에서 수평 및 수직 거리 u, v 범위에 k_{w1} , 기타범위에 k_{w2} 를 갖는다. 집중질량은 (a_1, b_1) 위치에 작용한다. 이러한 비균질 Pasternak 지반에 지지된 판의 제반 조건은 다음과 같다.

- 1) 탄성계수(E) : 2,039,000 kgf/cm²
- 2) 포아송비(μ) : 0.3
- 3) 판두께(h) : 0.1 cm
- 4) 판의 크기($a \times b$) : 100cm \times 100cm
- 5) m : 판 전체 질량

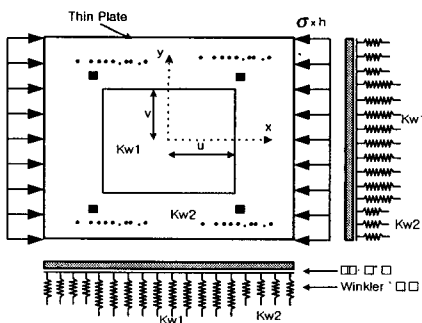


그림2. 지반 모델링

3.2 비교분석

3.1절의 조건을 이용하여 해석한 결과 표1.~표3.은 전단지반 강성 파라미터(SFP)를 고려하지 않고 Winkler지반 강성 파라미터만 고려한 경우에 대해 본 연구해석해와 기존 참고 문헌해를 비교하였다. 비교결과 본 해석해와 기존해의 차이는 약 0.7%이내의 적은 오차를 보였다.

표4.는 중앙에 집중질량 $M_c = (\rho a^2)/4$ 가 가해진 후판의 고유진동수를 Leissa⁹⁾의 해와 비교한 것이다. Leissa는 Dirac Delta함수를 이용하여 해석하였으므로 함수의 항수에 따라 값의 차이를 보인다. 4차항까지 고려한 Leissa의 해와 본 해와 비교한 결과 0.22%의 오차를 보였다.

표1. Winkler 지반 강성 변화에 따른 고유진동수 ($u, v=0.1m$, 판크기100cm \times 100cm, h=0.1cm) ($\omega a^2 \sqrt{\rho/D}$)

WFP		단순지지 판		고정지지 판	
k_{w1}	k_{w2}	본 해석해		본 해석해	
		기존해 ^[a]	기존해 ^[b]	기존해 ^[a]	기존해 ^[b]
0	20	25.68		39.17	
		25.74	25.7	39.32	39.23
0	50	32.64		43.68	
		32.73	32.63	43.83	43.8
0	100	41.68		50.26	
		41.87	41.62	50.47	50.36
20	0	20.86		36.79	
		20.91	20.91	36.95	36.98
50	0	22.47		38.16	
		22.54	22.51	38.34	38.51
100	0	24.82		40.28	
		25.02	24.86	40.55	40.78

표2. Winkler 지반 강성 변화에 따른 고유진동수 ($u, v=0.2m$, 판크기100cm \times 100cm, h=0.1cm) ($\omega a^2 \sqrt{\rho/D}$)

WFP		단순지지 판		고정지지 판	
k_{w1}	k_{w2}	본 해석해		본 해석해	
		기존해 ^[a]	기존해 ^[b]	기존해 ^[a]	기존해 ^[b]
0	20	23.41		37.37	
		23.52	23.40	37.54	38.58
0	50	27.96		39.53	
		28.25	27.87	39.76	40.54
0	100	33.96		42.78	
		34.74	33.77	43.19	43.49
20	0	23.32		38.58	
		23.37	23.37	38.75	40.07
50	0	27.77		42.35	
		27.95	27.82	42.55	43.85
100	0	33.66		47.86	
		34.24	33.70	48.22	48.21

표3. Winkler 지반 강성 변화에 따른 고유진동수 ($u, v=0.3m$, 판크기 $100cm \times 100cm$, $h=0.1cm$) ($\omega \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D}$)

WFP		단순지지 판		고정지지 판	
k_{w1}	k_{w2}	본연구해	기존해 ^[6]	본연구해	기존해 ^[6]
0	20	21.11	21.21	36.13	36.33
0	50	23.03	23.25	36.62	36.84
0	100	25.75	26.29	37.41	37.66
20	0	25.44	25.48	39.70	39.89
50	0	32.16	32.23	44.93	45.10
100	0	40.87	41.09	52.49	52.66

표4. 중앙 집중질량($\frac{\rho a^2}{4}$)을 갖는 판의 고유진동수($\omega \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D}$) ($50cm \times 50cm$, $h=0.455cm$, 4변단순지지)

참고 문헌해(7)		본 해석해
항수	진동수	진동수
1	13.96	13.76
2	13.89	
3	13.81	
4	13.79	

3.3 집중질량을 갖고 지반위에 놓인 판의 고유진동수

표5~표8은 집중질량을 갖는 판의 고유진동수를 산정한 것이다. 집중질량은 $a_1 = b_1 = 0$ 위치에 대한 것과 $a_1 = b_1 = 0.25m$ 인 경우를 구하였으며 판의 경계조건은 4변단순지지와 4변 고정 지지판으로 하였다.

표5는 $k_{w1} = k_{w2} = 0$, $SFP = 0$ 인 경우로 지반 강성이 고려되지 않은 경우이다. $m_c/m = 0$ 일 경우 무차원 고유진동수 $\lambda^2 = 19.69041$ (4변단순지지일 경우), $\lambda^2 = 35.83851$ (4변고정지지일 경우)로 나타났다. 그리고 집중질량비(M_c/m)가 증가 할수록 고유진동수 값 λ^2 은 급속히 감소함을 알 수 있다.

표6과 같이 전체 판에 균질한 Winkler 지반 강성 ($k_{w1} = k_{w2} = 20$)을 갖고 전단지반을 고려하지 않은 경우($SFP = 0$) 고유 진동수의 증가는 지반 강성을 고려하지 않은 경우보다 35%의 증가(4변 단순지지일 경우)와 11.8%의 증가(4변 고정지지일 경우)를 보였다. 이로 미루어 고유진동수의 변화는 판의 지지조건이 단순지지일 경우 증가 폭이 크게 나타남을 알 수 있다.

표7, 표8은 각각 Winkler지반 강성이 $k_{w1} = 20$, $k_{w2} = 50$ 인 경우 전단지반강성파라미터(SFP)의 변화에 따른 고유진동수를 나타낸 것으로 $SFP = 0$ 인 경우 보다 $SFP = 20$ 으로 한 경우 고유진동수의 변화는 4변 단순지지의 경우 74%의 증가를 보였고 4변 고정지지의 경우 44%의 증가를 나타냈다. 그 결과로 보아 전단 지반 강성 파라미터(SFP)의 변화가 판의 고유진동수 변화에 적지 않은 영향을 미치는 것으로 보이며 지반이나 기초 해석시 전단 지반에 대한 충분한 고려가 있어야 할 것으로 판단된다.

표5. 집중질량을 갖는 판의 고유진동수($\omega \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D}$) (4변단순지지, 판크기 $100cm \times 100cm$, $h=0.1cm$, $k_{w1} = k_{w2} = 0$, $SFP = 0$)

M_c/m	단순지지		고정지지	
	$a_1=b_1=0$	$a_1=b_1=0.25m$	$a_1=b_1=0$	$a_1=b_1=0.25m$
0	19.69041	19.69041	35.83851	35.83851
0.10	8.53426	8.88971	12.70551	18.18322
0.20	6.31185	6.61465	9.23868	13.60054
0.30	5.23527	5.49928	7.61571	11.32360
0.40	4.57034	4.80678	6.62736	9.90405
0.50	4.10773	4.32356	5.94497	8.91156
0.75	3.37592	3.55703	4.87300	7.33483
1.00	2.93327	3.09230	4.22840	6.37778
1.50	2.40261	2.53460	3.45925	5.22852
2.00	2.08446	2.19928	2.99874	4.53722
3.00	1.70479	1.79920	2.45087	3.71214

표6. 균질 Winkler 지반위에 놓인 집중질량을 갖는 판의 고유진동수($\omega \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D}$), $k_{w1} = 20$, $k_{w2} = 20$, $SFP = 0$ (4변고정지지, 판크기 $100cm \times 100cm$, $h=0.1cm$)

M_c/m	단순지지		고정지지	
	$a_1=b_1=0$	$a_1=b_1=0.25m$	$a_1=b_1=0$	$a_1=b_1=0.25m$
0	26.60515	26.60515	40.05457	40.05457
0.10	11.17773	11.79405	13.97961	19.93980
0.20	8.22088	8.74108	10.14774	14.84461
0.30	6.80407	7.25570	8.35998	12.33704
0.40	5.93316	6.33666	7.27263	10.78006
0.50	5.32887	5.69664	6.52252	9.69411
0.75	4.37532	4.68329	5.32500	7.97241
1.00	3.79976	4.06989	4.63735	6.92929
1.50	3.11122	3.33462	3.79330	5.67828
2.00	2.69819	2.89290	3.28810	4.92648
3.00	2.20618	2.36618	2.68718	4.02974

표7. 비균질 Pasternak지반위에 놓인 집중 질량을 갖는 판의 고유 진동수($\omega \sqrt{\rho/D}$)

($k_{w1}=20, k_{w2}=50, SFP=0, \text{크기}100\text{cm} \times 100\text{cm}, t=0.1\text{cm}$)

M_c/m	단순지지		고정지지	
	$a_1=b_1=0$	$a_1=b_1=0.25\text{m}$	$a_1=b_1=0$	$a_1=b_1=0.25\text{m}$
0	27.90826	27.90826	41.33067	41.33067
0.10	11.79576	12.10579	14.47014	20.21439
0.20	8.67336	8.96314	10.50186	15.02928
0.30	7.17773	7.43724	8.65106	12.48447
0.40	6.25858	6.49390	7.52556	10.90623
0.50	5.62091	5.83729	6.86464	9.80604
0.75	4.61483	4.79811	5.53057	8.06284
1.00	4.00764	4.16932	4.79826	7.00717
1.50	2.92500	3.41759	3.92480	5.7415
2.00	2.84567	2.96320	3.40210	4.98104
3.00	2.32672	2.42357	2.78033	4.07418

표8. 비균질 Pasternak지반위에 놓인 집중 질량을 갖는 판의 고유진동수($\omega \sqrt{\rho/D}$)

($k_{w1}=20, k_{w2}=50, SFP=20, \text{크기}100\text{cm} \times 100\text{cm}, h=0.1\text{cm}$)

M_c/m	단순지지		고정지지	
	$a_1=b_1=0$	$a_1=b_1=0.25\text{m}$	$a_1=b_1=0$	$a_1=b_1=0.25\text{m}$
0	48.55232	48.55232	59.67951	59.67951
0.10	18.99392	20.35174	20.48309	26.96097
0.20	13.82221	14.97304	14.81003	18.82989
0.30	11.39555	12.39351	12.18340	16.40822
0.40	9.91689	10.80753	10.59092	14.30530
0.50	8.89588	9.70702	9.49426	12.84666
0.75	7.29183	7.97026	7.77549	10.54575
1.00	6.32724	6.92187	6.74396	9.15755
1.50	5.17628	5.66765	5.51476	7.49732
2.00	4.48717	4.91528	4.77954	6.50162
3.00	3.66734	4.01900	3.90544	5.31571

4. 결론

본 연구에서는 비균질 Pasternak 지반위에 놓인 집중 질량을 갖는 박판의 진동수에 대해 해석하였다. 비균질 Pasternak 지반은 판을 가장자리와 중앙부로 구분하여 Winkler 지반 강성을 다르게 적용하여 해석하였다. 집중 질량은 중앙부($a_1 = b_1 = 0$)와 4개의 대칭점 위치($a_1 = b_1 = 0.25\text{m}$)에 있는 경우에 대해 각각 판 전체 질량에 대한 비로 집중질량의 크기를 변화 시키며 적용하였다.

그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다

1. Winkler 지반 강성만 고려한 경우 기존 해석해와 본 연구해의 비교결과 약 0.7%의 적은 오차를 보였다.
2. 지반에 지지되지 않고 집중질량을 갖는 판에 대해 기존해와의 비교결과 0.22%의 오차를 보였다.
3. Winkler 지반 강성과 전단지반강성 파라미터가 증가 할수록 고유진동수는 증가하는 것으로 나타났다. 집중질량비가 증가 할 수 록 진동수는 급격히 감소하는 경향을 보였다.
4. 전단 지반 강성 파라미터(SFP)의 변화가 판의 고유진동수 변화에 적지 않은 영향을 미치는 것으로 보이며 지반이나 기초 해석시 전단 지반에 대한 충분한 고려가 있어야 할 것으로 판단된다.

참 고 문 헌

1. H.Cohen and G.Handelman, 1956, Vibration of a rectangular plate with distributed added mass, J. Franklin Inst.261, 319-329.
2. T.Wah, 1961, "Natural frequencies of plate-mass system", proc.Ind. Doc. Theor. Appl. Mecho., 157-168.
3. P.A.A Laura and R.H.Gutierrez, 1985, "Transverse Vibration of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part I: Rayleigh-Ritz Method ", vol(101), pp 307-315, JSV.
4. J.A.G. Horenberg & J.G.M.Kerstens, 1985 "Transverse Vibrations of Rectangular Plates on inhomogeneous foundations Part II:Modal Constraint Method" Computers and Structures, Vol(101), p317-324.
5. K.H.Low, 1993, "Analytical and experimental investigation on a vibration rectangular plates with mounted weights", J. Sound Vibr. 160(1), 111-121.
6. K.H.Low, C.K.Ng and Y.K.Ong, 1993 "Comparative study of frequencies for carrying mass. ASCE J.Engng Mech. ASCE 119(5), 917-937.
7. K. N.saha, R. C. Kar and P. K Datta, 1997, "Dynamic 9. Arthur Leissa, 1993 "Vibration of plates", Acoustical Society of America.