

자유단에 집중질량을 갖는 캔틸레버형 변단면 보의 자유진동 Free Vibrations of Tapered Cantilever-Type Beams with Tip Mass at the Free End

오 상 진[†] · 이 재 영* · 박 광 규** · 모 정 만***

Sang Jin Oh, Jae Young Lee, Kwang Kyou Park and Jeong Man Mo

Key Words : tapered beam(변단면 보), general boundary condition(일반적인 단부조건), free vibration(자유진동), natural frequency(고유진동수), tip mass(집중질량)

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the free vibration characteristics of tapered beams with general boundary condition(translational and rotational elastic support) at one end and carrying a tip mass with translational elastic support at the other end. The beam model is based on the classical Bernoulli-Euler beam theory which neglects the effects of rotatory inertia and shear deformation. The governing differential equation for the free vibrations of linearly tapered beams is solved numerically using the corresponding boundary conditions. Numerical results are compared with existing solutions by other methods for cases in which they are available. The lowest four natural frequencies are calculated over a wide range of section ratio, dimensionless spring constant and mass ratio.

1. 서 론

보는 기둥, 평판 등과 함께 구조물을 형성하는 가장 기본이 되는 구조요소이어서 다양한 조건을 갖는 보의 정, 동적 거동에 관한 많은 연구가 수행되어 왔다. 구조계의 진동특성 및 안정성에 대한 지배인자들의 영향을 결정하는 문제는 공학관련 분야에서 매우 실제적이고 중요한 문제로 취급되고 있다.⁽¹⁾ 지배인자들 중 특히 축방향력, 지지조건, 수학적 모형, 추가질량, 단면변화 등은 보의 횡방향 진동 특성 및 안정성에 중요한 영향인자로 알려져 있어 이에 대한 폭넓은 연구가 이루어지고 있다.⁽²⁻⁸⁾

이 논문에서는 일단은 회전 및 수직방향 스프링으로 지지된 일반적인 단부조건을 갖고 타단은 집중질량과 수직방향 스프링을 갖는 변단면 보의 자유진동 특성을 파악하는데 연구목적이 있다. 이를 위하여 해석대상 보의 단부조건에 대한 경계조건을 적용하여 단면제원이 보축을 따라 직선적으로

변화하는 선형 변단면 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 수치해석하여 고유진동수를 산출하였다. 해석 예에서는 변화높이, 변화폭 및 정방향 변단면 보의 단면비, 무차원 스프링상수 및 질량비에 따른 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

2. 해석모형

Fig. 1은 좌측단은 회전 및 수직방향 스프링으로 지지되어 있고, 우측단은 집중질량과 수직방향 스프링을 갖는 길이 l 인 변단면 보를 나타낸 것이다. 이 그림에서 A 와 I 는 각각 보축상 임의점 x 에서의 단면적과 단면2차모멘트이며, A_a 와 I_a 는 좌측단에서, A_b 와 I_b 는 우측단에서 보단면의 단면적과 단면2차모멘트이다. 그리고 K_m 는 회전스프링상수, K_n 와 K_b 는 수직방향 스프링상수, M 는 집중질량의 크기이며, $w(x, t)$ 는 횡방향 진동변위이다.

Bernoulli-Euler 보이론을 적용하면 변단면 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

식 (1)에서 E 와 ρ 는 각각 보 재료의 탄성계수 및 밀도이

[†] 담양대학 토목과
E-mail : sjoh@damyang.ac.kr
Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 381-9100

* 호원대학교 건축토목공학부

** 대전대학교 토목공학과

*** 전주농림고등학교

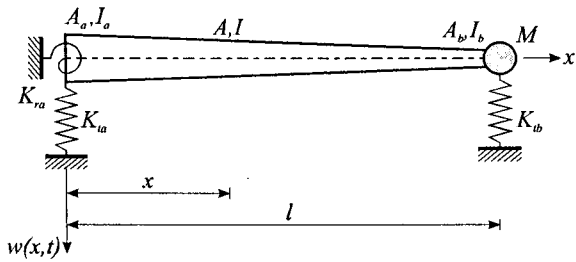


Fig. 1 Geometry and variables of tapered cantilever-type beam

다. 대상 보가 조화진동을 한다고 가정하면, 횡방향 진동변위에 대한 조화진동식은 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

여기서 w_x 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며, ω_i 는 고유각진동수(rad/s), i 는 모드번호이다.

본 연구에서는 해석대상 보로서 좌측단의 단면적 및 단면 2차모멘트를 기준으로 식 (3), (4)에 나타낸 바와 같이 단면적과 단면 2차모멘트가 직선적으로 변화하는 선형 변단면 보를 택하였다.

$$A = A_a [1 + (\beta - 1)x/l]^m \quad (3)$$

$$I = I_a [1 + (\beta - 1)x/l]^n \quad (4)$$

윗 식들에서 β 는 좌측단과 우측단에서의 단면제원 d_a 와 d_b 의 비로서 이후 단면비(d_b/d_a , section ratio)라 한다. 그리고 (m, n)은 단면형상계수로서 변화율이 변단면인 경우 (1, 3), 변화폭 변단면인 경우 (1, 1), 정방형 변단면인 경우 (2, 4)이다.⁽⁹⁾

지배 미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l \quad (5,6)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A_a / (EI_a)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

식 (7)에서 C_i 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)이다.

식 (1)에 식 (2)~(4)를 대입하고, 식 (5)~(7)의 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 식 (8)과 같다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = - \frac{2n(\beta-1)}{[1+(\beta-1)\xi]} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \frac{n(n-1)(\beta-1)^2}{[1+(\beta-1)\xi]^2} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + C_i^2 [1+(\beta-1)\xi]^{m-n} \eta \quad (8)$$

이상에서 식 (8)은 단면제원이 부재축을 따라 직선적으로

변화하는 선형 변단면 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이다.

좌측단은 회전스프링과 수직방향 스프링으로 구성되어 있으므로 경계조건은 $EI_a d^2 w_x / dx^2 = K_{ra} dw_x / dx$, $EI_a d^3 w_x / dx^3 = -K_{la} w_x$ 이며, 우측단은 집중질량과 수직방향 스프링으로 구성되어 있으므로 경계조건은 $EI_b d^2 w_x / dx^2 = \omega_i^2 J dw_x / dx$, $EI_b d^3 w_x / dx^3 = K_{lb} w_x - \omega_i^2 M w_x$ 이다. 이들 경계조건을 무차원 변수를 이용하여 나타내면 다음 식들과 같다.

$$d^2 \eta / d\xi^2 - k_{ra} d\eta / d\xi = 0 \quad (9a)$$

$$d^3 \eta / d\xi^3 + k_{la} \eta = 0 \quad (9b)$$

$$d^2 \eta / d\xi^2 - \beta^{-n} C_i^2 j \theta d\eta / d\xi = 0 \quad (10a)$$

$$d^3 \eta / d\xi^3 - \beta^{-n} (k_{lb} - C_i^2 \mu \theta) \eta = 0 \quad (10b)$$

식 (9), (10)에서 k_{ra} , k_{la} , k_{lb} 는 무차원화한 스프링상수로서 식 (11)~(13)과 같고, μ 는 자유단의 집중질량과 보 전체질량의 비(mass ratio)로서 식 (14)와 같다. 그리고 θ 는 변단면 보를 동일지간의 등단면 보로서 변환한 경우 보 단면의 단면적 A_m 과 좌측단에서의 단면적 A_a 의 비로서 변화율과 변화폭 변단면인 경우 식 (15a), 정방형 변단면인 경우에는 식 (15b)와 같다.

$$k_{ra} = K_{ra} l / (EI_a), \quad k_{la} = K_{la} l^3 / (EI_a) \quad (11,12)$$

$$k_{lb} = K_{lb} l^3 / (EI_a), \quad \mu = M / (\rho A_m l) \quad (13,14)$$

$$\theta = (\beta + 1) / 2, \quad \theta = (\beta^2 + \beta + 1) / 3 \quad (15a,b)$$

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 식 (8)의 지배미분방정식을 수치해석하여 해석대상 보의 고유진동수 및 진동형을 산출하였으며, 해석과정의 개략적인 내용은 다음과 같다. 식 (8)의 미분방정식에는 불확정량인 미지의 무차원 고유진동수 C_i 항이 포함되어 있으므로 먼저 C_i 값을 가정하여 미분방정식에 대입하고, 좌측단에서 우측단까지 수치적분을 시행한다. 가정한 값의 대상구조에 대한 고유치 여부 판단은 수치적분에서 얻어진 우측단에서의 결과가 식 (10)의 경계조건을 만족하는지 여부로 판단한다. 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 정도가 매우 높아 진동문제 등에 많이 사용되는 Runge-Kutta method를 이용하였으며, 무차원 고유진동수 C_i 는 행렬값탐사법을 반복적으로 적용하는 과정에서 Regula-Falsi method를 이용하여 산출하였다.⁽¹⁰⁾

Table 1 Comparison of results

Geometry	i	Frequency parameter, C_i	
		This study	Reference
Depth taper ^(a) $\beta=0.8, k_{ra}=1$ $k_{ia}=10^8, k_{ib}=0$ $\mu=1$	1	0.78897	0.78896
	2	10.470	-
	3	37.117	-
	4	81.416	-
Depth taper $\beta=0.8, k_{ra}=0.1$ $k_{ia}=10^8, k_{ib}=0$ $\mu=100$	1	0.032647	0.032646
	2	8.9628	-
	3	35.554	-
	4	79.837	-
Depth taper $\beta=0.6, k_{ra}=0.1$ $k_{ia}=10^8, k_{ib}=0$ $\mu=10$	1	0.10768	0.10768
	2	7.9239	-
	3	31.356	-
	4	70.243	-
Uniform ^(b) $\beta=1, k_{ra}=k_{ia}=10^8$ $k_{ib}=0.1$ $\mu=10$	1	0.55032	0.55071
	2	15.512	15.524
	3	50.064	50.010
	4	104.35	-
Uniform $\beta=1, k_{ra}=k_{ia}=10^8$ $k_{ib}=10$ $\mu=100$	1	0.36013	0.36024
	2	15.428	15.439
	3	49.975	50.010
	4	104.26	-

(a): Ref. [5], (b): Ref. [8]

본 연구에서는 해석대상 보에 대한 단면비 β , 질량비 μ 및 무차원 스프링상수 k_{ra}, k_{ia}, k_{ib} 가 입력되면 무차원 고유진동수와 진동형이 계산되도록 FORTRAN77어로 컴퓨터 프로그램을 작성하였으며, 해석 예에서는 최저차 4개의 무차원 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 본 연구결과를 검증하기 위하여 문헌들의 결과와 Table 1에 비교하였다. 이 표에서 본 연구와 문헌의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다.

Table 2-4는 각각 변화높이, 변화폭 및 정방향 변단면 보의 단면비 $\beta(0.7, 0.9)$, 질량비 $\mu(0, 0.1, 0.5)$, 수직방향 스프링상수 $k_{ia}=k_{ib}(1, 10, 100, 10^8)$, 회전스프링상수 $k_{ra}(1, 10, 100, 10^8)$ 에 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 나타낸 것이다.

4. 결 론

본 연구에서는 일단은 회전 및 수직방향 스프링으로 지지되고 타단은 집중질량과 수직방향 스프링을 갖는 선형 변단면 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 수치해석하여 고유진동수를 산출하였으며, 타문헌의 결과와 비교하여 본 연구결과를 검증하였다. 해석 예로서 단면비, 무차원 스프링상수 및 질량비 변화에 따른 고유진동수 및 진동형을 산출

하였다. 본 연구결과를 이용하는 경우 스프링으로 지지된 보 뿐만 아니라 고정적인 단부조건 즉 고정-자유($k_{ra}=k_{ia}=\infty, k_{ib}=0$), 고정-회전($k_{ra}=k_{ia}=\infty, k_{ib}=\infty$), 회전-회전($k_{ra}=0, k_{ia}=\infty, k_{ib}=\infty$)의 지지조건을 갖는 보의 고유진동수 및 진동형을 정확하게 산출할 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold.
- (2) Huang, T. C., 1961, "The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 28, pp.579-584.
- (3) Amba-Rao, C. L., 1967, "Effect of End Conditions on the Lateral Frequencies of Uniform Straight Columns," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 42, pp.900-901.
- (4) Matsuda, H., Morita, C. and Sakiyama, T., 1992, "A Method for Vibration Analysis of a Tapered Timoshenko Beam with Constraint at any Points and Carrying a Heavy Tip Body," Journal of Sound and Vibration, Vol. 158, pp.331-339.
- (5) Aucilleo, N. M., 1996, "Transverse Vibrations of a Linearly Tapered Cantilever Beam with Tip Mass of Rotatory Inertia and Eccentricity," Journal of Sound and Vibration, Vol. 194, pp.25-34.
- (6) Aucilleo, N. M. and Nole, G., 1998, "Vibrations of a Cantilever Tapered Beam with Varying Section Properties and Carrying a Mass at the Free End," Journal of Sound and Vibration, Vol. 214, pp.105-119.
- (7) Li, W. L., 2000, "Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 237, pp.709-725.
- (8) Kim, H. K. and Kim, M. S., 2001, "Vibration of Beams with Generally Restrained Boundary Conditions using Fourier Series," Journal of Sound and Vibration, Vol. 245, pp.771-784.
- (9) Gupta, A. K., 1985, "Vibration of Tapered Beams," Journal of Structural Engineering, Vol. 111, pp.19-36.
- (10) Oh, S. J., Lee, B. K. and Lee, I. W., 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, pp.4871-4891.

Table 2 Frequency parameter C_i for depth tapered beam

$k_{ia} = k_{ib}$	k_{ra}	μ	$\beta=0.9$				$\beta=0.7$			
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
1	1	0	1.4381	3.7402	22.933	60.333	1.5049	3.6167	20.591	53.838
		0.1	1.3823	3.2450	20.033	54.095	1.4731	3.0482	17.555	47.570
		0.5	1.1794	2.5446	17.508	50.515	1.3196	2.2431	15.181	44.479
	10	0	1.4385	5.3043	26.750	66.341	1.5031	4.8717	23.919	59.177
		0.1	1.3869	4.4976	23.472	59.703	1.4845	3.9758	20.506	52.519
		0.5	1.2085	3.3669	20.803	56.049	1.3984	2.7058	18.030	49.379
	100	0	1.4385	5.7407	28.506	70.214	1.5027	5.2238	25.400	62.477
		0.1	1.3875	4.8342	24.980	63.167	1.4862	4.2264	21.750	55.439
		0.5	1.2124	3.5816	22.187	59.385	1.4099	2.8334	19.178	52.202
	10^8	0	1.4385	5.7984	28.770	70.870	1.5027	5.2704	25.621	63.027
		0.1	1.3875	4.8782	25.204	63.745	1.4864	4.2592	21.933	55.917
		0.5	1.2129	3.6095	22.390	59.936	1.4112	2.8501	19.344	52.661
10	1	0	4.2490	8.2444	24.523	60.958	4.4031	8.5713	22.658	54.664
		0.1	4.1164	7.1946	21.232	54.500	4.2990	7.4387	18.983	48.028
		0.5	3.4851	5.7014	18.519	50.864	3.7197	5.7125	16.310	44.854
	10	0	4.3369	8.9892	27.954	66.846	4.6033	9.1793	25.547	59.858
		0.1	4.2276	7.6491	24.283	59.997	4.5281	7.7329	21.487	52.850
		0.5	3.6564	5.8038	21.411	56.287	4.0037	5.6735	18.697	49.632
	100	0	4.3607	9.2429	29.563	70.643	4.6594	9.3914	26.872	63.076
		0.1	4.2578	7.8009	25.643	63.388	4.5935	7.8343	22.572	55.693
		0.5	3.7072	5.8391	22.648	59.550	4.0950	5.6588	19.687	52.379
	10^8	0	4.3638	9.2780	29.808	71.287	4.6668	9.4208	27.072	63.613
		0.1	4.2617	7.8218	25.847	63.954	4.6021	7.8484	22.733	56.158
		0.5	3.7139	5.8440	22.830	60.089	4.1075	5.6567	19.832	52.825
100	1	0	8.5727	21.877	37.318	67.498	8.1269	21.825	37.321	63.342
		0.1	8.5309	19.953	31.434	58.881	8.1041	20.514	30.728	53.089
		0.5	8.3020	13.987	27.104	54.764	7.9844	14.537	25.408	49.177
	10	0	9.9502	21.875	38.715	72.149	9.8715	21.838	38.518	67.159
		0.1	9.8853	19.981	32.121	63.102	9.8293	20.585	31.095	56.451
		0.5	9.4817	14.248	27.396	58.837	9.5723	14.808	25.423	52.412
	100	0	10.617	21.874	39.468	75.201	10.702	21.846	39.162	69.604
		0.1	10.537	19.998	32.490	65.732	10.646	20.627	31.293	58.483
		0.5	10.004	14.426	27.558	61.315	10.272	15.007	25.431	54.326
	10^8	0	10.721	21.873	39.589	75.728	10.832	21.847	39.266	70.022
		0.1	10.638	20.001	32.549	66.177	10.772	20.634	31.326	58.823
		0.5	10.081	14.458	27.585	61.732	10.376	15.044	25.432	54.644
10^8	1	0	10.244	38.408	85.276	150.87	9.2539	34.281	75.918	134.19
		0.1	10.244	38.408	85.276	150.87	9.2539	34.281	75.918	134.19
		0.5	10.244	38.408	85.276	150.87	9.2539	34.281	75.918	134.19
	10	0	12.957	42.668	90.498	156.73	11.952	38.386	80.909	139.77
		0.1	12.957	42.668	90.498	156.73	11.952	38.386	80.909	139.77
		0.5	12.957	42.668	90.498	156.73	11.952	38.386	80.909	139.77
	100	0	14.576	46.781	97.439	166.57	13.405	42.048	87.098	148.56
		0.1	14.576	46.781	97.439	166.57	13.405	42.048	87.098	148.56
		0.5	14.576	46.781	97.439	166.57	13.405	42.048	87.098	148.56
	10^8	0	14.849	47.637	99.172	169.44	13.640	42.774	88.567	151.00
		0.1	14.849	47.637	99.172	169.44	13.640	42.774	88.567	151.00
		0.5	14.849	47.637	99.172	169.44	13.640	42.774	88.567	151.00

Table 3 Frequency parameter of breadth tapered beam

$k_{ia} = k_{ib}$	k_{ra}	μ	$\beta=0.9$				$\beta=0.7$			
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
1	1	0	1.4384	3.8616	24.117	63.508	1.5135	4.0011	24.224	63.626
		0.1	1.3774	3.3635	21.137	57.058	1.4580	3.4267	20.923	56.641
		0.5	1.1654	2.6611	18.515	53.293	1.2499	2.6384	18.243	52.973
	10	0	1.4386	5.5645	28.166	69.831	1.5130	5.7056	28.282	69.953
		0.1	1.3800	4.7440	24.795	62.968	1.4605	4.7696	24.563	62.536
		0.5	1.1871	3.6003	22.020	59.123	1.2765	3.5065	21.752	58.806
	100	0	1.4386	6.0411	30.057	73.984	1.5129	6.1852	30.180	74.111
		0.1	1.3804	5.1158	26.425	66.690	1.4608	5.1315	26.179	66.240
		0.5	1.1899	3.8451	23.516	62.707	1.2801	3.7331	23.243	62.383
	10^8	0	1.4386	6.1042	30.343	74.694	1.5129	6.2487	30.467	74.821
		0.1	1.3804	5.1645	26.668	67.315	1.4608	5.1789	26.419	66.861
		0.5	1.1903	3.8768	23.737	63.303	1.2805	3.7625	23.462	62.978
10	1	0	4.2663	8.3076	25.627	64.101	4.4707	8.8032	25.952	64.307
		0.1	4.1273	7.2482	22.286	57.449	4.3464	7.6013	22.157	57.048
		0.5	3.4818	5.7642	19.491	53.632	3.7109	5.9040	19.246	53.315
	10	0	4.3271	9.1409	29.302	70.309	4.5472	9.6837	29.611	70.510
		0.1	4.2096	7.7823	25.570	63.252	4.4460	8.1345	25.401	62.833
		0.5	3.6278	5.9258	22.608	59.356	3.8835	6.0277	22.353	59.041
	100	0	4.3432	9.4240	31.048	74.388	4.5676	9.9839	31.358	74.591
		0.1	4.2315	7.9597	27.054	66.903	4.4727	8.3113	26.866	66.463
		0.5	3.6699	5.9806	23.959	62.867	3.9339	6.0703	23.695	62.545
	10^8	0	4.3453	9.4630	31.314	75.085	4.5702	10.025	31.624	75.289
		0.1	4.2343	7.9840	27.277	67.516	4.4762	8.3356	27.086	67.072
		0.5	3.6754	5.9882	24.159	63.451	3.9405	6.0762	23.894	63.128
100	1	0	8.8377	22.178	38.075	70.285	9.0359	23.074	39.706	71.452
		0.1	8.7884	20.096	32.210	61.653	8.9956	21.189	32.844	61.443
		0.5	8.5152	14.089	27.945	57.388	8.7732	14.797	27.974	57.132
	10	0	10.122	22.181	39.648	75.302	10.498	23.079	41.382	76.404
		0.1	10.049	20.110	33.072	66.238	10.436	21.195	33.670	65.971
		0.5	9.5978	14.331	28.391	61.827	10.049	15.025	28.360	61.545
	100	0	10.745	22.183	40.498	78.644	11.204	23.082	42.291	79.727
		0.1	10.658	20.118	33.535	69.140	11.129	21.199	34.114	68.836
		0.5	10.080	14.492	28.637	64.568	10.618	15.181	28.575	64.268
	10^8	0	10.842	22.183	40.636	79.224	11.314	23.082	42.438	80.305
		0.1	10.753	20.119	33.610	69.634	11.237	21.200	34.185	69.324
		0.5	10.152	14.520	28.677	65.031	10.704	15.209	28.610	64.728
10^8	1	0	10.742	40.414	89.785	158.88	10.795	40.455	89.822	158.92
		0.1	10.742	40.414	89.785	158.88	10.795	40.455	89.822	158.92
		0.5	10.742	40.414	89.785	158.88	10.795	40.455	89.822	158.92
	10	0	13.520	44.794	95.155	164.91	13.716	44.954	95.296	165.04
		0.1	13.520	44.794	95.155	164.91	13.716	44.954	95.296	165.04
		0.5	13.520	44.794	95.155	164.91	13.716	44.954	95.296	165.04
	100	0	15.234	49.146	102.49	175.28	15.471	49.368	102.71	175.50
		0.1	15.234	49.146	102.49	175.28	15.471	49.368	102.71	175.50
		0.5	15.234	49.146	102.49	175.28	15.471	49.368	102.71	175.50
	10^8	0	15.527	50.067	104.35	178.37	15.769	50.293	104.58	178.60
		0.1	15.527	50.067	104.35	178.37	15.769	50.293	104.58	178.60
		0.5	15.527	50.067	104.35	178.37	15.769	50.293	104.58	178.60

Table 4 Frequency parameter of square tapered beam

$k_{ta} = k_{tb}$	k_{ra}	μ	$\beta=0.9$				$\beta=0.7$			
			$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
1	1	0	1.4715	3.7890	22.953	60.350	1.5838	3.8263	20.752	53.999
		0.1	1.4188	3.2633	19.933	53.915	1.5722	3.1290	17.239	47.033
		0.5	1.2190	2.5269	17.388	50.375	1.4938	2.1271	14.819	44.118
	10	0	1.4715	5.3428	26.768	66.357	1.5689	5.0458	24.063	59.326
		0.1	1.4235	4.4912	23.360	59.515	1.5795	3.9585	20.141	51.952
		0.5	1.2519	3.3104	20.679	55.907	1.6544	2.3680	17.652	49.009
	100	0	1.4714	5.7777	28.523	70.230	1.5665	5.3930	25.541	62.624
		0.1	1.4241	4.8216	24.860	62.970	1.5806	4.1850	21.359	54.843
		0.5	1.2563	3.5158	22.058	59.239	1.6790	2.4477	18.787	51.819
	10^8	0	1.4714	5.8353	28.788	70.886	1.5662	5.4390	25.762	63.174
		0.1	1.4242	4.8649	25.082	63.546	1.5807	4.2147	21.537	55.316
		0.5	1.2568	3.5425	22.260	59.789	1.6818	2.4584	18.951	52.274
10	1	0	4.3417	8.4493	24.638	61.013	4.6796	9.2509	23.343	55.049
		0.1	4.2153	7.3438	21.171	54.328	4.5958	7.9781	18.856	47.518
		0.5	3.5871	5.7638	18.413	50.726	4.0582	5.9244	16.000	44.498
	10	0	4.4400	9.2062	28.056	66.896	4.9479	9.9294	26.171	60.211
		0.1	4.3379	7.7925	24.200	59.815	4.8981	8.2694	21.262	52.303
		0.5	3.7737	5.8471	21.293	56.146	4.4404	5.8202	18.335	49.262
	100	0	4.4666	9.4648	29.662	70.692	5.0234	10.171	27.483	63.419
		0.1	4.3713	7.9427	25.550	63.196	4.9849	8.3713	22.308	55.114
		0.5	3.8295	5.8761	22.524	59.405	4.5713	5.7757	19.305	51.995
	10^8	0	4.4701	9.5006	29.906	71.336	5.0334	10.205	27.681	63.955
		0.1	4.3757	7.9633	25.752	63.760	4.9964	8.3855	22.463	55.575
		0.5	3.8370	5.8802	22.705	59.943	4.5897	5.7690	19.447	52.439
100	1	0	8.6588	22.257	37.986	67.966	8.3311	22.681	39.526	66.019
		0.1	8.6205	20.420	31.716	58.799	8.3144	21.720	32.198	52.989
		0.5	8.4117	14.302	27.130	54.657	8.2282	15.663	25.554	48.933
	10	0	10.120	22.253	39.422	72.587	10.378	22.678	40.952	69.754
		0.1	10.060	20.446	32.386	62.991	10.344	21.772	32.564	56.228
		0.5	9.6812	14.559	27.395	58.713	10.142	15.916	25.512	52.096
	100	0	10.826	22.250	40.197	75.629	11.346	22.677	41.730	72.180
		0.1	10.751	20.460	32.746	65.604	11.299	21.804	32.760	58.193
		0.5	10.244	14.736	27.542	61.182	10.990	16.108	25.488	53.973
	10^8	0	10.937	22.250	40.322	76.154	11.496	22.677	41.856	72.597
		0.1	10.858	20.462	32.805	66.046	11.447	21.809	32.791	58.522
		0.5	10.327	14.768	27.566	61.597	11.117	16.144	25.483	54.286
10^8	1	0	10.269	38.428	85.293	150.89	9.3153	34.377	76.027	134.31
		0.1	10.269	38.428	85.293	150.89	9.3153	34.377	76.027	134.31
		0.5	10.269	38.428	85.293	150.89	9.3153	34.377	76.027	134.31
	10	0	13.045	42.744	90.566	156.79	12.222	38.657	81.170	140.02
		0.1	13.045	42.744	90.566	156.79	12.222	38.657	81.170	140.02
		0.5	13.045	42.744	90.566	156.79	12.222	38.657	81.170	140.02
	100	0	14.680	46.885	97.544	166.67	13.723	42.397	87.463	148.93
		0.1	14.680	46.885	97.544	166.67	13.723	42.397	87.463	148.93
		0.5	14.680	46.885	97.544	166.67	13.723	42.397	87.463	148.93
	10^8	0	14.955	47.742	99.279	169.55	13.962	43.128	88.938	151.38
		0.1	14.955	47.742	99.279	169.55	13.962	43.128	88.938	151.38
		0.5	14.955	47.742	99.279	169.55	13.962	43.128	88.938	151.38