

열 효과를 고려한 비틀림이 있는 회전 블레이드의 진동 특성 Thermal Effect on the Vibration Characteristics of Pretwisted Rotating Blade

기영중*·김지환**

Young-Jung Kee, Ji-Hwan Kim

Key Words: vibration analysis, rotating blade, degenerated shell element, initial twist, thermal effect

ABSTRACT

Vibration analysis of rotating blade is the main purpose of this study. In the present work, general formulation is proposed to analyze the rotating shell-type structures including the effect of centrifugal force, Coriolis acceleration and initial twist. Furthermore, simplified equations are derived for the case of an open circular cylindrical shell. Based on the concept of degenerated shell element with the Reissner-Mindlin's assumptions, the finite element method is adopted for solving the governing equations. In addition, it is investigated the effect of thermal load on the vibration characteristics of pretwisted blade. Numerical results are summarized for the various parameters such as rotating speed, angle of pretwist and stacking sequence of a composite blade. Also, present results are compared with the previous works and experimental data.

1. 서론

터보 기계류에 사용되는 블레이드의 진동 해석에 대한 기존의 연구들은 보나 평판 모델을 이용하여 수행되어왔다. Leissa[1]등은 블레이드를 보로 형상화하였고, 이 모델에 대한 정확성과 사용 한계를 검토하였다. Dokainish[2]등은 평판 이론을 이용한 블레이드의 진동 해석을 수행하였으며, 보 모델로는 해석이 불가능했던 시위방향으로의 굽힘 거동을 예측할 수 있었다. 또한 Rao[3]등은 열 환경하에서 회전하는 평판의 진동 특성에 대한 연구를 수행하였다.

현재 터보 기계류에 사용되고 있는 블레이드의 형상은 설계 및 제작 기술의 진보를 통해 곡률과 아울러 비틀림이 있는 쉘의 형상을 띄고 있다. 따라서 이를 유한요소화 하는 과정도 기존의 보 또는 판 모델과는 다른 접근 방법을 요구하게 된다.

Leissa[4]등은 고전 쉘 이론을 기초로 Ritz 방법을 이용하여 외팔 보 형태의 정지해있는 쉘의 진동 특성을 연구하였으며, Lee[5]등은 두께가 변화하는 직사각형 투영면을 갖는 회전하는 얇은 쉘에 대한 진동 특성을 조사하였다. 또한 Liew[6]등은 비틀어진 외팔 보 형태의 원뿔 형 쉘에 대한 진동 특성을 조사하였다.

위에서 언급한 연구들과 같이 쉘 구조물에 대한 해석 방법은 다양하게 시도되어 왔으며, 특히 유한

요소법을 적용한 연구가 활발하게 수행되고 있다. 그 중에서 Ahmad[7]등은 특별한 가정 없이 임의의 쉘 형상에 대한 해석을 가능케 하는 감절점 쉘 유한요소(degenerated shell element)의 개념을 소개하였다. 이 방법은 상대적으로 사용에 편리한 점도 있었으나 발표 초창기에는 여러 문제점들을 안고 있었으며, 그 동안 많은 연구활동들을 통해 수정되어 왔다. Huang[8]등은 가정된 변형률(assumed strain)을 이용하여 shear-locking 과 membrane locking 이 발생하지 않는 개선된 감절점 유한요소를 제시하였으며, 근래에 Zheng[9]등은 위의 방법을 이용하여 원심력과 코리올리 효과(Coriolis effect)가 고려된 회전축과 같은 원통형 쉘에 대한 진동 해석을 수행하였다.

항공우주 기술의 발달과 더불어 경량의 복합재료가 구조부재로써 널리 사용되고 있으며, 이에 대한 많은 연구가 수행되고 있다. Bhumbla[10]등은 회전하는 복합재료 평판의 자유 진동 특성과 각 모드에 대한 거동(mode shape)들에 대해 조사하였으며, Lam[11]등은 일차 전단변형 이론을 기초로 하여 직교 적층된 회전하는 원통형 실린더의 진동 특성에 대한 연구를 수행하였다. 또한 Kumar[12]등은 감절점 쉘 유한요소를 이용하여 적층된 쉘 구조물의 진동 특성을 조사하였으며, 수치해석에 대한 효율성과 정확성을 검토하였다.

본 연구에서는, Reissner-Mindlin 의 가정과 더불어 회전으로 인한 원심력과 코리올리 효과 및 초기 비틀림의 영향이 고려된 복합재료 쉘 형상 블레이드의 진동특성에 대한 연구를 수행하였으며 감절점 쉘 유한요소를 이용하여 수치 결과를 구하였다. 수치 해석에 사용된 블레이드는 회전판의 반경과 장착 각의 영향을 고려하기 위해 블레이드가

* 서울대학교 대학원

** 교수, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail: jwhkim@snu.ac.kr

Tel: (02) 880-7393, Fax: (02) 887-2662

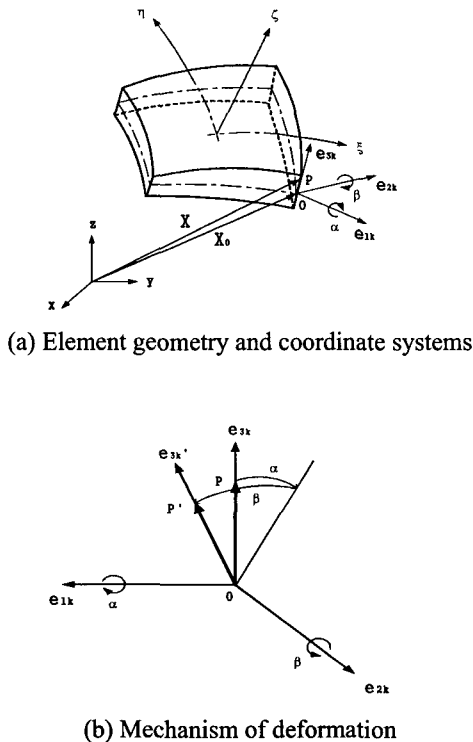


Figure 1 Geometry and deformation mechanism of degenerated shell element

회전축으로부터 임의의 자리에 위치하도록 설정하였으며, 개방된 원통형 실린더로 형상화 하였다. 또한 본 연구의 해석결과를 기존의 수치 해석 결과 및 실험 결과와 함께 비교하였다.

2. 유한요소 정식화

다음과 같은 기본적인 가정을 도입한다.

첫째, 변형전의 중립곡면에 대해 수직인 직선면은 변형 후에도 직선을 유지하나, 중립곡면에 대해 수직을 유지할 필요는 없다.

둘째, 쉘의 각각의 층에서 수직방향의 응력성분은 없고, 두께 방향의 전단변형은 허용한다.

2.1 기하학적인 정의

Figure 1(a)는 변형되기 이전 상태에서 요소내의 임의의 점 P 에 대한 위치 벡터 \mathbf{X} 와 절점 벡터 및 사용된 좌표계를 보여주고 있으며, 위치 벡터 \mathbf{X} 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + z\mathbf{e}_3 \quad (1)$$

여기서 \mathbf{X}_0 는 중간곡면상의 점 O의 위치를 나타내며, \mathbf{e}_3 는 중간곡면에 대해 수직인 단위 벡터이

다.

또한 두께방향으로 무차원화된 좌표계 ζ 를 도입하면, 식(1)은 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \zeta \left(\frac{h}{2} \right) \mathbf{e}_3 \quad (2)$$

Figure 1(b)는 변형에 대한 메커니즘을 보여주고 있으며, 이는 직선요소 \overline{OP} 가 변형 후 \overline{OP}' 으로 변하는 것으로 표현할 수 있다. 따라서 중간곡면에 대해 수직인 단위벡터 \mathbf{e}_3 는 \mathbf{e}_3' 으로 회전하게 되므로, 점 P에 대한 변위 벡터 \mathbf{U} 는 다음과 같이 정의할 수 있으며,

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \zeta \mathbf{U}_\zeta \quad (3)$$

여기서 $\mathbf{U}_\zeta = \frac{h}{2}(\mathbf{e}_3' - \mathbf{e}_3)$ 이다.

본 연구에서는 9 절점 등매개변수 유한요소를 이용하며, 각 절점은 병진변위 u, v, w 와 회전변위 α, β 의 5개의 자유도를 갖는다. 각 절점에서의 변위 성분을 이용하여 아래와 같은 이산화된 표현을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \left[\mathbf{U}_0 + \zeta \frac{h_i}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{2i} & \mathbf{e}_{1i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \right] \quad (4)$$

2.2 운동 방정식

속도 성분이 V_x 와 V_y 인 회전하는 블레이드에 외부로부터 열의 입력이 존재할 경우, 정상상태에서 열전달 지배방정식은 다음(Ref. [13])과 같다.

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \rho C V_x \frac{dT}{dx} - \rho C V_y \frac{dT}{dy} = 0 \quad (5)$$

식(5)는 Galerkin 가중 잔여법을 이용함으로써 아래와 같은 이산화된 유한요소 방정식으로 표현할 수 있다.

$$(\mathbf{K}_{cm} + \mathbf{K}_{cv}) \mathbf{T} = \mathbf{P} \quad (6)$$

여기서 \mathbf{K}_{cm} , \mathbf{K}_{cv} , \mathbf{T} 와 \mathbf{P} 는 전도와 블레이드의 회전으로 인한 대류에 의해 형성되는 행렬, 절점에서의 온도 벡터 및 열 하중 벡터를 의미한다.

변형 에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV + U_c \right] \quad (7)$$

여기서 n 은 복합재료 블레이드의 적층수이며, U_c 는 원심력의 영향으로 인한 추가적인 에너지를 의미하며 그 표현식은 아래와 같다.

$$U_c = \frac{1}{2} \int_V (N_x^c w_x^2 + 2N_{xy}^c w_x w_y + N_y^c w_y^2) dV$$

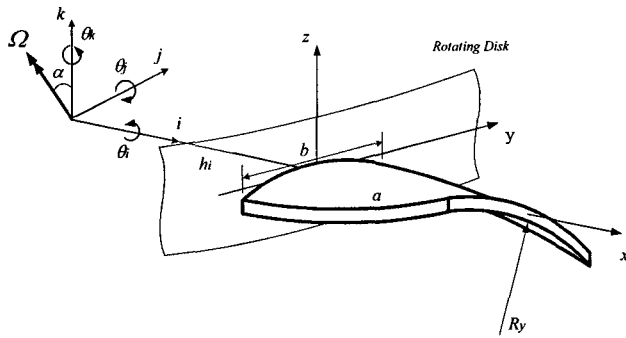


Figure 2 Rotating blade with the offsets (h_i) from a reference frame

또한 응력과 변형율의 관계는 다음과 같이 표현되며, $\sigma = Q(\epsilon - \epsilon_t)$ (8)

여기서

$$\sigma = \{\sigma_x \sigma_y \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz}\}^T$$

$$\epsilon = \{\epsilon_x \epsilon_y \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz}\}^T$$

$$\epsilon_t = \{\alpha_x \alpha_y \alpha_{xy} 0 0\}^T \bar{T}$$

는 각각 응력과 전체 변형율 및 열 변형율을 의미하며, \bar{T} 는 식(6)으로부터 얻어진 정상상태에서의 절점 온도분포를 이용하여 구한 요소의 평균 온도를 의미한다.

Figure 2 는 본 연구에서 사용한 블레이드의 형상을 보여주고 있다. 여기서 블레이드 임의의 점에서의 속도 벡터 V 에 대한 표현은 다음과 같다.

$$V = dr/dt + \Omega \times r \quad (9)$$

그러므로, 운동에너지의 표현식은 아래와 같다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_V \rho V \cdot V dV \quad (10)$$

변형 에너지 식(7)과 운동에너지 식(10)을 이용하여 Hamilton 의 원리에 적용하고, 이를 이산화함으로써 다음과 같은 운동방정식을 얻게 된다.

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + (K_l + K_g + K_{cf} + K_t)d = F_{cf} \quad (11)$$

여기서 M, C 는 질량행렬과 감쇠행렬, $K_l, K_g,$ 는 선형 및 기하학적 강성행렬이며, K_{cf}, K_t 는 열 하중과 원심력에 의해 생성되는 강성행렬을 의미한다. F_{cf} 는 원심력에 의한 하중벡터를 나타낸다.

동적인 해석을 위해, 식(11)의 해를 시간에 대해 독립인 정적인 부분과 시간에 대해 종속적인 동적 응답부분으로 나누게 되면 다음과 같이 표현된다.

$$d = d_s + \delta(t) \quad (12)$$

따라서 식(12)를 이용하여 다음과 같은 최종적인 운동 방정식을 유도할 수 있다.

$$M\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + (K_l + K_g + K_{cf})\delta = 0 \quad (13)$$

3. 결과 및 검토

본 연구에서는 감 절점 쉘 유한요소를 이용하여 열 하중을 받으며 회전하는 블레이드의 진동 특성에 대하여 조사하였다.

3.1 코드 검증

본 연구에서 사용한 코드의 검증을 위하여 정지된 상태에서 초기 비틀림 ψ 를 갖는 보와 평판에 대한 고유 진동수의 변화를 참고문헌과 함께 Table 1 에 비교 정리하였다. 여기서 사용된 기호 “B”, “T”, “EB”, “CB”는 굽힘, 비틀림, 모서리 방향으로의 굽힘 및 시위 방향으로의 굽힘 거동을 나타낸다.

3.2 블레이드의 진동해석

Table 2 는 초기 비틀림이 있는 정지 블레이드의 진동수 값을 보여주고 있다. 여기서 블레이드는 개방형 원통 쉘과 평판으로 형상화된 것으로서 Ref. [4]과 같은 물성치를 갖는다. 표에서 보는 바와 같이, 평판보다 쉘로 형상화된 경우 저차 모드에서는 전반적으로 진동수의 값이 더 크며, 고차 모드일수록 그 차이가 감소함을 볼 수 있다. 또한 초기 비틀림각이 증가할수록 굽힘 거동에 대한 진동수의 감소율이 크게 나타나며, 이와는 반대로 비틀림 거동의 진동수는 점점 증가함을 볼 수 있다. 이와 같은 현상은 Ref. [15]에 표현되어

Table 1 Comparison with the frequency parameter (λ) of a beam and plate blade model, $\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

ψ	Mode	Plate Present	Plate [14]
0°	1B	3.49	3.46
	2B	22.01	21.44
	1T	8.51	8.53
	1EB	43.62	46.14
	1CB	27.33	27.05
30°	1B	3.42	3.41
	2B	19.51	18.88
	1T	14.43	16.88
	1EB	47.48	49.60
	1CB	27.41	27.98
45°	1B	3.35	3.36
	2B	17.22	16.51
	1T	20.45	22.31
	1EB	49.74	54.00
	1CB	28.76	30.40

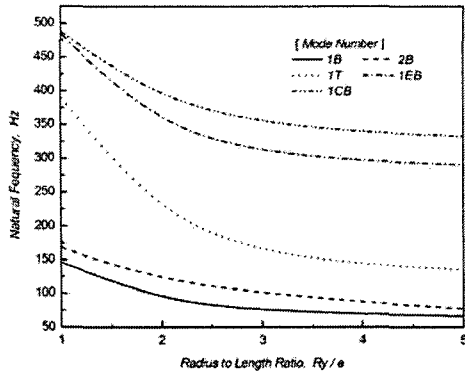


Figure 3 Natural frequency of a non-rotating blade versus radius to length ratio

있는 변형을 관계식으로부터 곡률 R_y 와 R_{xy} 의 연성된 효과에 기인한 것으로 이해할 수 있다. 곡률 R_y 가 증가하는 경우, 변형율이 감소하여 굽힘과 비틀림 거동에 대한 진동수의 값이 감소하게 된다. Figure 3 은 곡률 R_y 의 변화에 따른 진동수의 변화를 보여주고 있다. 초기 비틀림각 ψ 가 증가할 경우 비틀림 곡률 R_{xy} 가 감소하게 되며, 그 결과 Table 2 에서 보는 바와 같이 비틀림 거동의 진동수가 증가함을 볼 수 있다. 또한 곡률 R_y 와 R_{xy} 를 동시에 고려할 경우 비틀림 거동에 대한 진동수는 증가하는 반면, 굽힘 거동의 진동수는 감소하는 경향을 보여주고 있다.

Table 2 Comparison of the frequency parameter (λ) of shell and plate model: ($E=200\text{GPa}$, $\rho=7,860\text{kg/m}^3$, $\nu=0.3$, $a=b=30.5\text{cm}$, $t/a=1/100$)

ψ	Mode	Shell ($R_y = 2a$)	Plate ($R_y = \infty$)
0°	1B	5.26	3.49
	2B	25.07	22.01
	1T	8.61	8.51
	1EB	43.84	43.62
	1CB	28.46	27.33
30°	1B	4.24	3.42
	2B	23.44	19.51
	1T	13.69	14.43
	1EB	47.48	47.48
	1CB	27.23	27.41
45°	1B	4.01	3.35
	2B	15.77	17.22
	1T	22.51	20.45
	1EB	49.74	49.74
	1CB	27.83	28.76

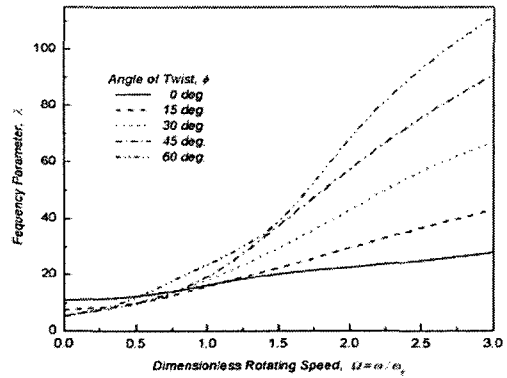


Figure 4 Variation of frequency parameters versus rotating speed and angle of pretwist

3.3 회전하는 블레이드의 진동해석

회전하는 원통 쉘에 대한 고유진동수를 Ref. [4] 과 비교하여 Table 3 에 정리하였다. 회전축은 블레이드에 수직인 것으로 함으로써 θ_r , θ_j 및 θ_k 모두 0 이 되게 하였다. 또한, Ω 는 무차원화된 회전 각속도로서 정지한 블레이드의 최저차 모드 고유진동수와 회전속도의 비를 나타낸다.

Figure 4 는 회전하는 블레이드의 최저차 모드에 대한 진동수의 변화 경향을 보여주고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 회전 속도와 초기 비틀림각이 증가할수록 진동수의 값이 증가하고 있다. 이 현상은 회전 속도가 증가할수록 굽힘과 비틀림에 대한 강성이 증가함을 의미하며, 역학적으로 회전하는 블레이드는 원심력에 의해 굽힘과 비틀림 변형에 대해 더 큰 저항을 갖게 됨을 의미한다.

Table 4 는 각기 다른 적층각의 복합재료 블레이드의 고유 진동수를 나타내고 있으며, 코드 검증을 위하여 기존의 실험을 통한 결과 및 수치해석 결과와 비교하였다.

Table 3 Natural frequencies (Hz) of a steel fan blade as a function of rotating speed

Mode	Ref. [4] ($\Omega=1.0$)	Present Study (Ω)			
		0.0	1.0	1.5	2.0
1	150.98	85.34	150.61	182.72	213.61
2	170.28	139.68	170.61	254.41	317.71
3	301.94	251.81	340.46	536.09	695.58
4	418.24	347.77	410.67	567.24	707.76
5	463.48	391.64	456.23	589.14	898.32

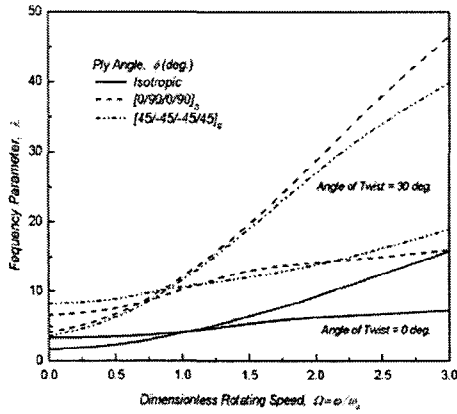


Figure 6 Effect of stacking sequence upon the pretwisted rotating blade ($\psi = 0^\circ, 30^\circ$)

본 연구에서 사용한 복합재료 블레이드의 적층 순서는 $[0/90/0/90]_s$ 와 $[\pm 45/\mp 45]_s$ 이며, Figure 6 에 초기 비틀림각 ψ 와 적층각 변화에 따른 최저차 모드에 대한 진동수 변화 경향을 나타내었다. 회전 속도와 초기 비틀림각이 증가할수록 높은 진동수를 얻게 됨을 볼 수 있으며, 적층 순서에 따라 블레이드의 강성을 변화시킴으로써 각기 다른 진동 특성을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

Figure 7 은 Dirichlet 경계 조건으로 주어진 평판의 열전달에 의한 온도 분포를 보여주고 있으며, Ref. [13]에 주어진 해석적인 해와 본 연구를 통한 결과를 비교하였다.

Table 4 Frequency parameters of composite plates upon the stacking sequences : ($E_{11}=98.0\text{GPa}, E_{22}=7.9\text{GPa}, G_{12}=5.6\text{GPa}, G_{13}=G_{23}=G_{12}, \rho=1,520\text{kg/m}^3, \nu_{12}=0.28,$ Ply Thickness: 0.381mm)

Ply Layups	Mode	Present	Ref. [16]	
			F.E.M. sol.	Experiment
[90/90/0]s	1B	3.97	3.8	3.7
	2B	25.7	23.9	24.3
	1T	35.9	35.1	38.2
[30/30/0]s	1B	6.7	6.3	6.6
	2B	40.6	37.3	40.1
	1T	61.5	56.9	59.1
[45/45/0]s	1B	5.1	4.9	4.8
	2B	32.6	30.1	29.8
	1T	52.6	49.4	51.3

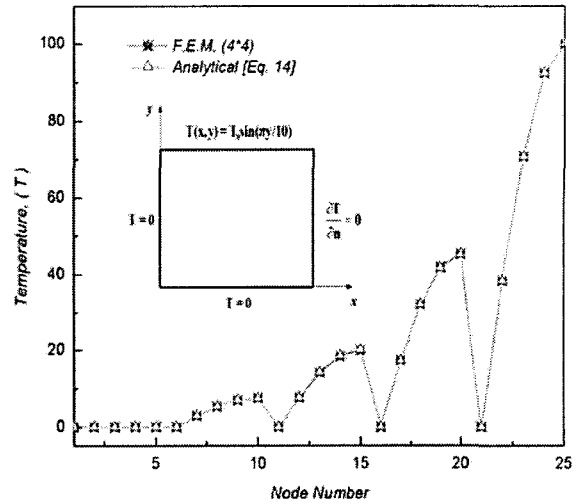


Figure 7 Comparison of present FEM solution with the analytical solution

Figure 8 은 블레이드 주위의 온도 변화에 따른 진동수의 변화 경향을 보여주고 있다. 결과에서 볼 수 있듯이 온도 분포가 증가할수록 각 모드 별로 진동수가 감소하였으며, 특히 굽힘 거동에 대한 진동수가 더 급격하게 감소하는 것을 알 수 있다. 이는 열 하중에 의한 블레이드의 초기 변형율이 증가하는 것이 원인이며, 역학적으로 열 하중에 의해 구조물의 강성이 감소하는 것으로 이해할 수 있다. 또한 열 하중이 가해지는 평판의 진동 특성을 다루고 있는 Ref. [3]에서도 본 연구의 결과와 같이 열 하중이 증가할수록 진동수가 감소함을 보이고 있다.

Table 5 는 $\Omega=1.0$ 인 회전하는 블레이드의 온도 변화에 따른 최저차 모드의 진동 특성을 보여주고

Table 5 Natural frequency (Hz) of a rotating shell-type blade with the angle of pretwist and temperature change: ($\psi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, \Omega=1.0$)

Surrounding Temperature (K)	Angle of pretwist ψ		
	0°	15°	30°
300	171.968	200.692	320.513
350	171.161	200.105	320.101
400	170.199	199.347	319.667
450	168.918	198.569	319.209
500	166.734	197.689	318.724

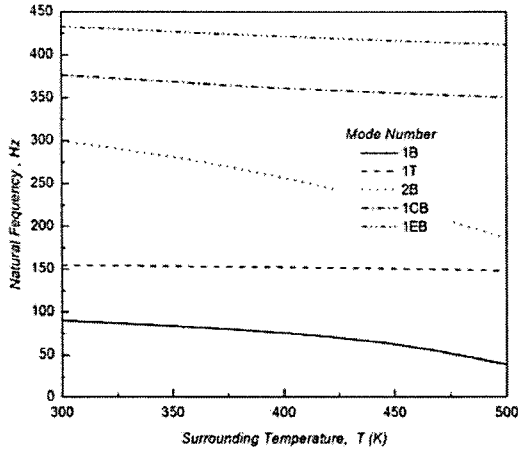


Figure 8 Effect of temperature change upon the natural frequencies (Hz) of a cantilevered shell-type blade: (Aluminum-Alloy 2024 6-T: $E = 75.0 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$, $\alpha = 73 \times 10^{-6} / \text{K}$, $\nu = 0.33$, $k = 177 \text{ W/mK}$, $\rho = 2,770 \text{ kg/m}^3$)

있다. 앞서 언급한 바와 같이 블레이드의 회전 속도가 동일한 경우, 초기 비틀림 ψ 가 증가할수록 진동수의 증가 경향이 더 큼을 볼 수 있다. 또한 주위의 온도 분포가 증가할 경우 열 변형의 증가로 인한 강성 감소로 블레이드의 진동수가 감소함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는, 초기 비틀림과 열 환경에서 회전하는 복합재료 블레이드의 진동 특성을 감절점 쉘 유한요소를 이용하여 해석하였다. 블레이드의 회전에 발생하는 원심력과 코리올리 효과 및 열 하중의 영향을 수식에 포함하였으며, 원심력으로 인한 추가적인 기하학적 강성행렬도 함께 고려하였다.

블레이드의 회전 속도가 증가할수록 원심력이 증가하게 되며, 이로 인해 블레이드의 강성이 증가하여 높은 진동수를 얻을 수 있음을 볼 수 있었으며, 초기 비틀림각이 커질수록 진동수의 증가율이 더 높게 나타났다. 또한 열 하중이 증가하는 경우 열 변형이 증가하게 되며, 그 결과 구조물의 강성이 감소하여 낮은 진동수 값을 얻을 수 있었다. 또한 복합재료 블레이드의 경우 적층각과 순서에 따라 다른 진동 특성이 나타남을 볼 수 있었다. 따라서 최적 설계를 위하여 블레이드의 형상을 변화시키지 않고 복합재료의 적층각과

순서를 적절히 조절함으로써 원하는 진동 특성을 얻을 수 있음을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) A.W. Leissa and M.S. Ewing., 1983, "Comparison of beam and shell theories for the vibrations of thin turbomachinery blades", J. Eng. Power, 105, pp. 383-392
- (2) M.A. Dokainish and S. Rawtani., 1971, "Vibration analysis of rotating cantilevered plates", Int. J. Num. Meth. Eng., 3, pp. 233-248
- (3) G. Venkateswara Rao, G. Sinha, N. Mukherjee and M. Mukhopadhyay. 1996, "A finite element free vibration of a thermally stressed spinning plate", Comp. Struct., 59(2), pp. 377-385
- (4) A.W. Leissa, J.K. Lee and A.J. Wang., 1982, "Rotating blade vibration analysis using shells", J. Eng. Power, 104, pp. 296-302
- (5) J.K. Lee, A.W. Leissa and A.J. Wang., 1984, "Vibrations of blades with variable thickness and curvature by shell theory", J. Eng. Power, 106, pp. 11-16
- (6) K.M. Liew, M.K. Lim, C.W. Lim, D.B. Li and Y.R. Zang, 1995, "Effects of initial twist and thickness variation on the vibration behavior of shallow conical shells", J. Sound Vibr., 180(2), pp. 271-296
- (7) Sohrabuddin Ahmad, B.M. Irons and O.C. Zienkiewicz, 1970, "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", Int. J. Num. Meth. Eng., 2, pp. 419-451
- (8) H.C. Huang and E. Hinton, 1986, "A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation", Int. J. Num. Meth. Eng., 22, pp. 73-92
- (9) Z.C. Zheng, 2001, "The influence of rotating on vibration of a thick cylindrical shell", J. Sound Vibr., 242(3), pp. 487-505
- (10) R. Bhumlab, J.B. Kosmatka and J.N. Reddy, 1990, "Free vibration behavior of spinning shear deformable plates composed of composite materials", AIAA J., 28(11), pp. 1962-1970
- (11) K.Y. Ram and Wu Qian, 1999, "Vibration of thick rotating laminated composite cylindrical shells", J. Sound Vibr., 225(3), pp. 483-501
- (12) W.P. Prema Kumar and R. Palaninathan, 1997, "Finite element analysis of laminated shells with exact through-thickness integration", Comp. Struct., 63(1), pp. 173-184
- (13) J.S. Carslaw and C. Jaegar, 1959, Conduction of heat in solids, Clarendon, Oxford
- (14) S. Mohamad Nabi and N. Ganesan, 1996, "Comparison of beam and plate theories for free vibrations of metal matrix composite pre-twisted blades", J. Sound Vibr., 189(2), pp. 149-160
- (15) A.W. Leissa and J.D. Chang, 1996, "Elastic deformation of thick, laminated composite shells", Composite Structures, 35, pp. 153-170
- (16) D.W. Jensen and E.F. Crawley, 1984, "Frequency determination technique for cantilevered plates with bending torsion coupling". AIAA J, 22(3), pp. 415-420.