

# 성덕대왕신종의 맥놀이 지도 Beat Maps of King Song-Dok Bell

김석현\*  
Seock Hyun Kim

**Key Words** : King Song-Dok Bell(성덕대왕신종), Beat Map(맥놀이 지도), Mode Pair(모드쌍), Slightly Asymmetric Shell(미소비대칭셸)

## ABSTRACT

Vibration beat phenomenon is theoretically investigated on a slightly asymmetric cylindrical shell, which is a simplified model of Korean bell. Mode pairs of the slightly asymmetric shell are obtained by receptance analysis and impulse response of the shell is derived using modal expansion and Laplace transform. Based on the impulse response model, beat mapping method is proposed to explain the reason that the beat of a bell vibration shows periodic distribution on the circumference. Beat characteristics of King Song-Dok Bell are explained in detail using the beat map and the measured modal data.

## 1. 서론

성덕대왕신종(에밀레종)은 역사적 의미와 함께, 그 크기의 웅대함과 수려한 외관, 그리고 아름다운 소리로 한국이 자랑하는 국보급 문화재이다. 최근 신종의 진동 및 음향의 비밀을 풀기 위하여 과학적인 접근이 시도되고 있다. 신종 소리의 우수성으로는 웅장하면서도 맑은 타격음, 선명하고 힘찬 맥놀이 그리고 긴 여운을 꼽는다.<sup>(1,2)</sup> 이중에서도 특히, 맥놀이는 종 소리에서 힘찬 생명력을 느끼게 하는 중요한 특성이다. 맥놀이의 원인은 설계 및 구조상의 질량 및 강성 비대칭성이 그 원인으로 밝혀졌다.<sup>(3-5)</sup> 구조상 불가피한 질량 및 강성 분포의 비대칭성과 함께, 표면의 조각이나 문양, 내부의 덩쇠등이 미세한 비대칭성을 발생시킨다. 그 결과 근접한 진동수를 갖는 모드쌍이 존재하게 되고 이들의 간섭으로 맥놀이가 발생된다. 범종이 일단 구조된 후, 맥놀이의 선명함을 결정하는 가장 중요한 요인으로는 타격점인 당좌의 위치이다.<sup>(6)</sup> 타격지점(당좌)이 모드쌍의 절선 배치와 어떠한 관계를 갖는가 하는 것이 중요하다. 모드쌍을 구성하는 L,H모드의 절선이나 배의 정중앙을 타격하

면 두 모드가 대등하게 발생하므로 강한 맥놀이가 발생된다는 사실이 밝혀졌다.<sup>(7,8)</sup> 뿐만 아니라, 하대 내부의 적절한 위치를 적당량 연삭하여 모드쌍의 절선을 이동시킴으로써 맥놀이의 주기를 조정하고 선명한 맥놀이를 얻는 실현적 기법이 많은 대형 범종에 적용되어 왔다.<sup>(9)</sup> 그러나 아직 맥놀이에 대하여 과학적으로 규명하지 못한 문제가 많이 남아 있다. 최근의 연구에 의하면 맥놀이의 강도는 원주상의 위치에 따라 전혀 다르다는 사실이 확인되었다.<sup>(8)</sup> 맥놀이가 강하게 발생하는 지점과 약한 지점이 주기적으로 분포한다는 흥미로운 사실이 성덕대왕신종의 측정조사에서 확인되었다.<sup>(10)</sup> 이러한 특성은 진동의 맥놀이와 근접장의 음향 맥놀이 모두에서 확인되고 있다. 본 연구에서는 이러한 맥놀이의 주기적 변화 분포를 이론적으로 규명한다. 원주상에서 맥놀이의 변화를 보여주는 맥놀이 지도 작성 기법을 제시하고, 성덕대왕신종을 대상으로 맥놀이 지도를 작성한다. 맥놀이 지도는 선명한 맥놀이의 발생 지점과 맥놀이가 나오지 않는 지점을 한눈에 파악할 수 있도록 원주상에서의 맥놀이 분포특성을 보여준다. 이를 이용하여 신종의 맥놀이 현상을 체계적으로 이해하고, 향후의 연구에 유용한 자료를 제공하고자 한다.

## 2. 성덕대왕신종의 맥놀이 특성

저지에 의하여 조사된 결과에 의하면<sup>(6,10)</sup>, 성덕대왕신종의 타격음은 Table 1의 주파수성분들이 어울어져 장중하면서도 맑은 타격음을 발생시킨다. Fig.1에서 볼 수 있듯이, 대

\* 강원대학교 기계메카트로닉스공학부 교수  
E-mail : seock@kangwon.ac.kr  
Tel : (033) 250-6372 Fax : (033) 257-4190

부분의 고차 성분들은 타격 후 10초 정도면 사라지고, 약 20초까지 2차 진동음이 지속되며, 이후에는 1차 진동음만이 남는다. 이 1차 진동음은 Fig.2에서와 같이, 강약을 반복하는 맥놀이를 발생시킴으로써, 종소리가 마치 살아 숨을 쉬는 것 같은 생명력을 갖게 한다. 다른 범종에 비하여, 신종에서 특이한 점은 Fig.1에서 볼 수 있듯이, 1차 진동음과 함께 2차 진동음의 맥놀이가 20여초 동안 지속되는 점이다. 그 결과, 1차음보다 상대적으로 높은 2차 진동음의 청명하면서 힘찬 맥놀이를 2회 들을 수 있다.

Table 1 Natural frequencies and modes.

No.	mode (m, n)	frequencies (Hz)
1	(0, 2)-L	64.07
2	(0, 2)-H	64.42
3	(0, 3)-L	168.52
4	(0, 3)-H	168.63
5	(1, 2)-L	189.34
6	(1, 2)-H	190.55
7	(1, 3)-L	227.99
8	(1, 3)-H	228.34
9	(0, 4)-L	281.93
10	(0, 4)-H	282.61
11	(1, 4)-L	349.40
12	(1, 4)-H	350.12

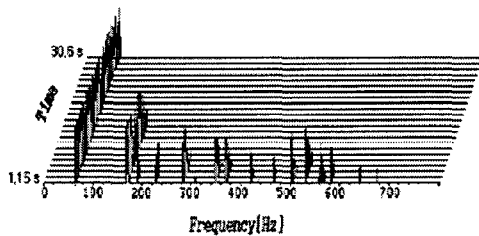


Fig.1 3-dimensional vibration spectrum of King Song-Dok Bell.

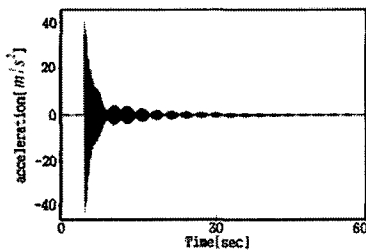


Fig.2 Vibration beat of King Song-Dok Bell.

### 3. 맥놀이 해석 이론

#### 3.1 해석방법

미소 비대칭성에 기인하는 맥놀이 현상의 수학적 모델을

얻기 위하여, Fig.3과 같이 종의 몸통을 축대칭 원통 쉘로 단순화 시키고, 비대칭성을 하나의 집중질량으로 표시한 모델을 사용하여 충격응답 함수를 구한다.

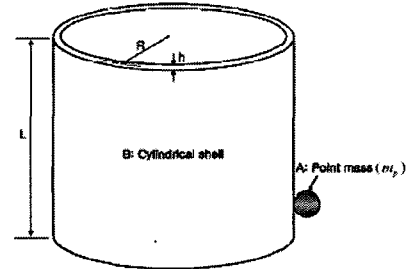


Fig.3 Cylindrical shell with a concentrated mass.

Fig.1에서 원통 쉘의 운동은 축방향 성분, 원주상의 접선 성분 및 반경방향 성분들이 연성되어 복잡한 거동을 보인다. 이중 음의 방사를 지배하는 것은 반경 성분이다.

Donnel- Mushtari-Vlasov 쉘 이론은 복잡한 쉘 거동 중에서도 반경 방향 성분  $w$ 만으로 표시된 운동방정식을 제공하므로 음의 방사에 관련된 진동해석에서 널리 이용된다. 본 연구에서는 축 대칭 원통 쉘의 진동모드 함수를 구한 후, 리셉턴스법을 사용하여 미소 집중 질량에 의한 비대칭 원통 쉘의 모드함수 형태를 구하고, 충격응답함수를 유도한다.

#### 3.2 축대칭 원통셸의 모드해석

Donnel-Mushtari-Vlasov의 쉘 이론에 근거하면, 축대칭 원통 쉘의 운동은 다음의 미분방정식으로 표현된다.

$$D \nabla^4 W + Eh \nabla^2 W - \rho h \omega^2 \nabla^2 W = 0 \quad (1)$$

여기서,  $W = w e^{in\theta}$ 의 조화운동에서 쉘 운동 변위의 반경 성분이고, 굽힘강성은  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ , 그리고 미분 연산자는 다음과 같이 정의된다.

$$\nabla^4(\cdot) = \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^2 \partial \theta^2} \quad (2)$$

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \quad (3)$$

단한 쉘에서 식(1)의 해는 다음과 같이 축 상에서의 함수와 원주 상에서의 조화함수 형태로 표시된다.

$$W(x, \theta) = X_n(x) \cos n(\theta - \phi_r) \quad (4)$$

여기서,  $\phi_r$ 의 존재는 원주 모드가 축 대칭성 때문에 원주 상에서 임의의 위상을 갖는 조화함수임을 의미한다.  $\phi_r = 0, \pi/2n$ 의 두 값으로 표시되고, 동일한 진동수를 가지며 직교하는 고유 모드쌍으로 나타난다.<sup>(11)</sup>  $X_n(x)$ 은 원통

셀의 길이 축 상에서 정의되는 모드함수로, 양단에서의 축 대칭 경계조건으로부터 결정된다. 축 상에서  $m$ 개의 절점을 갖는 모드함수를  $X_{nm}(x)$ 로 표시하고, 경계조건을 적용하는 과정에서 모드별 고유진동수  $\omega_{nm}$ 이 결정된다. 본 연구에서는 종의 축 상에서 위상변화가 없는 진동 모드의 원주상 맥놀이를 다루므로  $X_{nm}(x)$ 은 미지의 함수로 둔다.

3.3 미소 비대칭 원통셀의 모드 해석

리셉턴스법에서는 Fig.4와 같이 원통셀에 집중 질량이 부착된 진동계가 그 고유진동수와 고유모드로 진동하는 자유진동 상태를 고려한다. 이 경우, 질량이 부착된 지점에서는 연속조건과 힘 평형조건이 성립된다.

$$w_{Ap} = w_{Bp}, \quad f_{Ap} + f_{Bp} = 0 \quad (5,6)$$

질량이 부착된 지점에서 집중 질량과 원통셀의 리셉턴스는 가진력에 대한 변위 응답의 비로, 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha_p = \frac{w_{Ap}}{f_{Ap}}, \quad \beta_p = \frac{w_{Bp}}{f_{Bp}} \quad (7,8)$$

식(5)~ (8)로부터, 집중 질량과 원통셀의 리셉턴스는 다음의 특성방정식을 만족시킨다.

$$\alpha_p + \beta_p = 0 \quad (9)$$

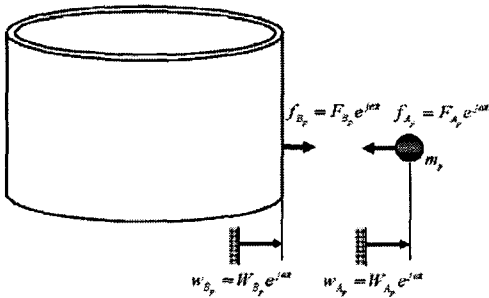


Fig.4 Force and displacement condition at point mass.

집중 질량은 다음의 힘 평형조건으로 리셉턴스를 구할 수 있다.

$$f_{Ap} = m_p \ddot{w}_{Ap} \quad (10)$$

따라서,

$$\alpha_p = - \frac{1}{m_p \omega^2} \quad (11)$$

여기서,  $m_p$ 는 집중 질량의 크기이다.

원통셀의 리셉턴스는 원통셀이 집중 질량으로부터 받는 힘  $f_{Hp} = F_{Hp} e^{j\omega t}$ 에 대한 변위 응답의 비로 정의된다. 따라서, 식(8)로 정의되는 축 대칭 원통셀의 리셉턴스를 구하기 위해서는 조화 가진력  $F_{Hp} e^{j\omega t}$ 이 질량 부착 지점에 작용할 때의 원통셀의 변위 응답을 필요로 한다. 원통셀 모드는 식(4)의 함수로 주어지므로, 모드중첩법을 사용하면  $(x_p, \theta_p)$ 에  $F \sin \omega t$ 이 작용할 때 셀의 응답을 다음과 같이

구할 수 있다.<sup>(11)</sup>

$$w(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F'}{N_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} X_{nm}(x_p) X_{nm}(x) \cos n(\theta - \theta_p) \sin \omega t \quad (12)$$

$$N_{nm} = \pi R \rho h \int_0^L X_{nm}^2(x) dx \quad (13)$$

따라서,  $(x_p, \theta_p)$ 에서의 원통셀의 리셉턴스는 다음과 같이 결정된다.

$$\beta_p = \frac{w(x_p, \theta_p, t)}{F \sin \omega t} = \sum_m \sum_n \frac{X_{nm}^2(x_p)}{N_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} \quad (14)$$

식(9)의 특성방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$- \frac{1}{m_p \omega^2} + \sum_m \sum_n \frac{X_{nm}^2(x_p)}{N_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} = 0 \quad (15)$$

식(15)의 해는 집중질량 부착에 의하여 발생하는 변화된 고유진동수가 된다. 집중 질량이 작은 경우, 고유진동수의 변화는 매우 작다. 따라서,  $\omega_{nm}$  부근에서 새로이 구해지는 고유진동수는 다음과 같이  $(m,n)$ 모드만을 고려하여 근사적으로 구할 수 있다.

$$\omega_{nm}' = \frac{\omega_{nm}}{\sqrt{1 + X_{nm}^2 m_p / N_{nm}}} \quad (16)$$

이에 대응하는 모드는 식 (12)에  $\omega = \omega_{nm}'$ 을 대입하면 얻을 수 있다.  $\omega_{nm}'$ 은  $\omega_{nm}$ 에 매우 가까우므로,  $(m,n)$ 모드만을 고려하여 다음과 같이 구해진다.

$$W_{nmL}(x, \theta)' = X_{nm}(x) \cos n(\theta - \theta_p) \quad (17)$$

이 모드는  $\theta = \theta_p$ 에서 배(anti-node)가 되는 원주상 모드를 가지며, 그 고유진동수는 식(16)과 같이  $\omega_{nm}$ 보다 미세하게 감소된 값을 갖는다. 이 모드와 직교하는 또 하나의 원주상 모드는 식(4)로부터 다음과 같이 표시 가능하다.

$$W_{nmH} = X_{nm}(x) \cos n(\theta - \theta_p - \frac{\pi}{2n}) \quad (18)$$

식(18)의 모드는 집중 질량이 부착된 위치가 절점(node)이 되므로, 대칭셀의 고유진동수  $\omega_{nm}$ 을 고유진동수로 갖는 모드가 된다. 결과적으로 집중 질량에 의하여 미소 비대칭성을 갖는 원통셀은 다음과 같이, 미세한 고유진동수의 차이를 갖는 모드쌍을 갖게 된다.

$$W_{nmL} = X_{nm}(x) \cos n(\theta - \phi_L) \quad (19)$$

$$\omega_{nmL} = \frac{\omega_{nm}}{\sqrt{1 + X_{nm}^2 m_p / N_{nm}}} \quad (20)$$

$$W_{nmH} = X_{nm}(x) \cos n(\theta - \phi_H) \quad (21)$$

$$\omega_{nmH} = \omega_{nm} \quad (22)$$

$$\phi_L = \theta_p, \quad \phi_H = \theta_p + \pi/2n \quad (23,24)$$

하첨자 L,H는 미세하게 감소된 고유진동수를 갖는 L모

드와 이보다 약간 높은 고유진동수를 갖는 H모드를 구분하기 위하여 표기한다.

3.4 미소 비대칭 원통셀의 충격응답 해석

모드전개 이론에 의하여 원통셀의 진동응답은 다음과 같이 진동모드의 중첩으로 표시 가능하다.

$$u(x, \theta, t) = \sum_m \sum_n \sum_\gamma \eta_{mnr}(t) W_{mnr}(x, \theta) \quad (25)$$

여기서 일반화된 좌표는 다음의 운동방정식을 만족시킨다.

$$\rho h \sum_m \sum_n \sum_\gamma (\ddot{\eta}_{mnr} + \omega_{mnr}^2 \eta_{mnr}) W_{mnr} = q, \quad (\gamma = L, H) \quad (26)$$

충격응답특성을 구하기 위하여,  $(x^*, \theta^*)$  지점에 다음과 같이, 단위 면적당 충격력  $q$ 가 작용하는 경우의 응답을 검토한다.

$$q = \frac{\hat{F}}{R} \delta(x - x^*) \delta(\theta - \theta^*) \delta(t) \quad (27)$$

여기서,  $\hat{F}$ 는 충격량이고,  $R$ 는 셀의 반경,  $\delta$ 는 디랙델타 함수(Dirac Delta Function)이다. 식(27)을 식(26)에 대입하고, 모드함수  $W_{mnr}$ 의 직교성을 이용하면 다음의 비연성화된 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{\eta}_{mnr} + \omega_{mnr}^2 \eta_{mnr} = F_{mnr}(t) \quad (28)$$

여기서,

$$F_{mnr}(t) = \hat{F} X_{nm}(x^*) \cos n(\theta^* - \phi_\gamma) \delta(t) / N_{nm} \quad (29)$$

라플라스 변환을 이용하면, 식(28)로부터 일반화된 좌표들 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\eta_{mnr}(t) = \frac{\hat{F} X_{nm}(x^*) \cos n(\theta^* - \phi_\gamma)}{\omega_{mnr} N_{nm}} \sin(\omega_{mnr} t) \quad (30)$$

식(30)과 식(25)로부터 충격응답함수는 다음과 같이 구해진다.

$$u(x, \theta, t) = \sum_m \sum_n \sum_\gamma \frac{\hat{F} X_{nm}(x^*) X_{nm}(x) \cos n(\theta^* - \phi_\gamma) \cos n(\theta - \phi_\gamma)}{\omega_{mnr} N_{nm}} \sin(\omega_{mnr} t) \quad (31)$$

속도 및 가속도 응답은 다음과 같다.

$$\dot{u}(x, \theta, t) = \sum_m \sum_n \sum_\gamma \frac{\hat{F} X_{nm}(x^*) X_{nm}(x) \cos n(\theta^* - \phi_\gamma) \cos n(\theta - \phi_\gamma)}{N_{nm}} \cos(\omega_{mnr} t) \quad (32)$$

$$\ddot{u}(x, \theta, t) = -\omega_{mnr} \sum_m \sum_n \sum_\gamma \frac{\hat{F} X_{nm}(x^*) X_{nm}(x) \cos n(\theta^* - \phi_\gamma) \cos n(\theta - \phi_\gamma)}{N_{nm}} \cos(\omega_{mnr} t) \quad (33)$$

3.5 맥놀이 응답

맥놀이는 식(33)에서 매우 근접한 고유진동수쌍  $\omega_{mnr}$  ( $\gamma = L, H$ )이 간섭하여 발생한다. 따라서 충격응답식 (33)에서 (m,n)모드만을 추출하면 특정 모드의 맥놀이 응답이 된다. 종 길이 축상  $x = x^*$ 에 위치하는 원주상에서의 맥놀이 분포특성을 보기 위해서, (m,n)모드만의 가속도 응답을 다음과 같이 검토한다.

$$\ddot{w}_{mnr}(x^*, \theta, t) = -C_{mnr} \times [ \omega_{mnrL} \cos n(\theta^* - \phi_L) \cos n(\theta - \phi_L) \cos(\omega_{mnrL} t) + \omega_{mnrH} \cos n(\theta^* - \phi_H) \cos n(\theta - \phi_H) \cos(\omega_{mnrH} t) ] \quad (34)$$

$$C_{mnr} = \frac{\hat{F} X_{nm}(x^*)^2}{N_{nm}} \quad (35)$$

4. 맥놀이 지도 작성법

성덕대왕신종에서 맥놀이를 발생시키는 1차 진동모드는 (0,2)형의 모드이고, 2차 진동모드는 (0,3)형태의 모드이다. Fig.5는 원주상에서 측정된 성덕대왕신종의 1차 및 2차 진동 모드쌍을 보인다. 절선의 배치와 모드의 형태를 측정된 결과, 원주상에서의 진동모드는 식(19)와 식(21)에 매우 근접하는 것으로 확인되었다. 원주상에서 (m,n)모드의 맥놀이 분포는 식(34)에서 괄호 안의 함수로 표시된다. 실제 범종의 맥놀이 지도를 작성하기 위해서는  $\theta^*$ 와  $\phi_L, \phi_H$  및  $\omega_{mnrL}, \omega_{mnrH}$ 의 정확한 값이 필요하다. 해석만으로 그 값을 구하는 것은 불가능하므로 측정치를 사용한다. 여기서,  $C_{mnr}$ 은 모드별 상수이므로  $C_{mnr} = 1$ 로 처리한다. 실제 모드쌍의 절선 위치와 부함되도록 모드함수 식(19),(21)의 위상을 정하는 것이 중요하다. 식(23)과 식(24)에 따라,  $\phi_L$ 에는 L모드의 배(또는 H모드의 절점)의 원주상 위상을 적용하고,  $\phi_H$ 에는 L모드의 절점의 위상을 적용한다. 성덕대왕신종의 경우, 타격점인 당좌의 중심을 기준위치로 하면,  $\theta^* = 0$ 이다. Table 2는 (0,2)와 (0,3)모드의 위상 및 주파수 측정치를 보인다. 식 (19),(21)에 L,H 모드쌍의 위상 정보를 대입하면, Fig.3의 모드쌍을 표시하는 모드함수를 얻을 수 있다. 맥놀이 지도는 식(34)에 Table 2의 측정데이터를 적용하여 원주상 등간격의  $\theta$  값에서 맥놀이 파형  $\ddot{w}_{mnr}(x^*, \theta, t)$ 을 그림으로써 얻어진다. 이러한 작업은 주어진 타격 위치를 고려하여 모드별로 수행된다.  $m=0$ 인 모드에서 종의 축 상에서는  $X_{nm}(x)$ 의 위상변화가 없으므로, 맥놀이는 그 크기만 변화한다. 즉, 하대로 내려오면 맥놀이의 원주상 분포형태는 유지되면서 그 크기만 커지고, 상부로 올라가면서 작아지는 단순한 변화를 보이게 된다. 여기는 (0,2)모드와 (0,3)모드의 원주상 맥놀이 지도를 그린다.

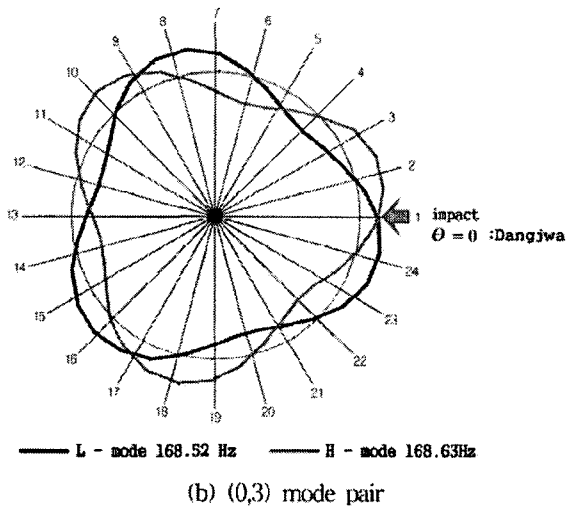
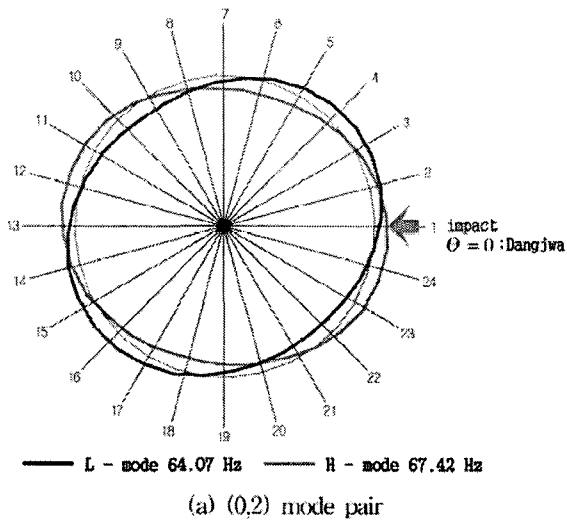


Fig.5 Circumferential mode pairs of King Song-Dok Bell (top view).

Table 2 Phase and frequency of King Song-Dok Bell.

parameter	(0,2)mode	(0,3)mode
$\phi_L$	0.723 rad(41.4°)	0.278 rad(15.9°)
$\phi_H$	-0.143 rad(-8.2°)	0.267 rad(15.3°)
$\omega_{nml}$	402.56 rad/s(64.07Hz)	1058.84 rad/s(168.52Hz)
$\omega_{nmH}$	404.76 rad/s(64.42Hz)	1059.53 rad/s(168.63Hz)

## 5. 성덕대왕신종의 맥놀이 지도

### 5.1 1차 진동음의 맥놀이 지도

당좌 중앙(타격점)을 1번 지점( $\theta=0^\circ$ )으로 하고, 당좌

중앙을 지나는 원주상을  $15^\circ$  간격으로 24 등분하여 각 위치에서 (0,2)모드의 맥놀이 파형을 그린 그림을 Fig.6에 보인다. 이론에서는 비감쇠 모델을 사용한 관계로 감쇠특성이 보이지 않으나, 맥놀이 분포특성을 파악하는데는 무관하다. 비교를 위하여 Fig.7(a)에 원주상 5개 지점에서의 가속도 응답의 측정치와, (b)에 표면 20cm 거리의 음향파 측정결과<sup>(10)</sup>를 보인다. 여기서 음향파는 종 표면에서 매우 가까운 근접장에서 측정한 결과이다. 따라서, 음향의 맥놀이 분포특성은 표면 진동의 맥놀이 분포와 거의 동일할 것이다. 맥놀이 지도를 그리는 가장 중요한 목적은 원주상에서 맥놀이가 강한 지점과 약한 지점이 어떻게 분포하는지를 파악하기 위함이다. 이론 모델과 측정치 모두에서 맥놀이가 강하고 약한 부분이 주기적으로 분포하는 것을 확인할 수 있으며, 이러한 위치는 두 결과에서 거의 일치한다. 전후 당좌 부근(24,1,12,13번 지점)과 이와 직각인 위치(6,7,18,19번)에서는 파의 진폭은 크나 맥놀이가 선명치 못하다. 역으로 그 사이의 지점(3,4,9,10,15,16,21,22)에서는 진폭은 상대적으로 작으나, 매우 선명한 맥놀이가 발생한다. 이러한 결과는 실험치에서도 그대로 확인된다. 이와같이 선명한 맥놀이가 주기적으로 발생하는 것은 Fig.5 (a) (0,2)모드쌍의 절선 분포의 주기성에 기인한다. 즉, Fig.5(a)에서 타격점이 H모드를 더 강하게 가진하는 위치이므로, 반대로 L모드가 더 강하게 응답하는 지점에서는 L,H모드가 대등하게 발생되면서 선명한 맥놀이가 나오게 된다.

### 5.2 2차 진동음의 맥놀이

성덕대왕신종에서는 2차 진동음이 타격후 약 20초 동안 유지되면서 2회의 맥놀이를 발생시켜 종소리의 우수성을 높이고 있다. Fig.8은 (0,3)의 2차 진동모드의 맥놀이 지도이다. 현재 측정치가 충분치 못하여 실험 결과와의 직접적인 비교는 어려우나, 1차 진동모드에서 확인된 바와 같이 맥놀이 선명도의 분포를 예측하는데는 무리없이 사용할 수 있을 것으로 판단된다. Fig.5 (b)에서 볼 수 있듯이, (0,3) 모드에서는 L,H모드쌍 절선의 정중앙에 당좌가 위치한다. 그 결과, L,H 모드쌍이 대등하게 가진되고 따라서, 많은 지점에서 큰 진폭의 선명한 맥놀이가 발생하게 된다. 맥놀이의 강약은 원주상에서  $\pi/6$ 의 주기로 반복된다. 이러한 주기성 역시 Fig.5 (b) (0,3)모드쌍의 절선배치의 주기성에 기인한다. 즉, Fig.5(b)에서 타격점이 L,H모드쌍을 고르게 가진하므로, 역시 두 모드가 대등하게 응답하는 지점에서는 선명한 맥놀이가 나오며, 타격위치가 좋아 그 진폭이 크게 나오게 된다. Fig.9는 9,11번 지점에서의 2차 진동수성분의 가속도 파형 측정치를 보인다. 맥놀이파의 측정치와 지도상의 맥놀이 파형은 두 지점 모두 선명한 맥놀이를 보이는 점에서 일치한다.

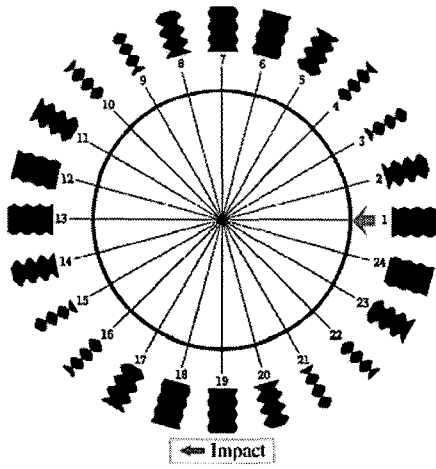


Fig.6 Beat map of the 1st vibration mode.

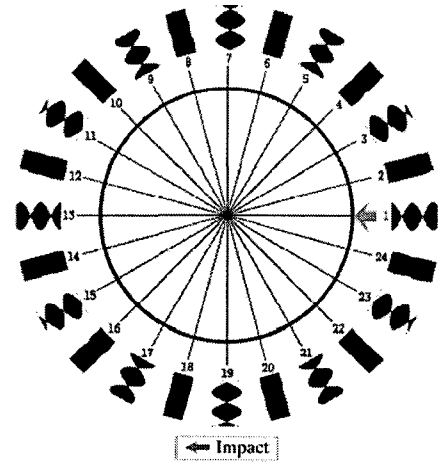
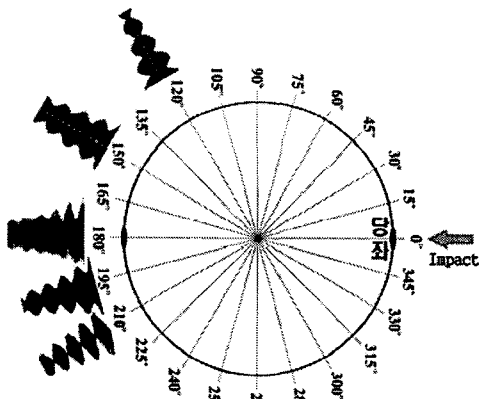
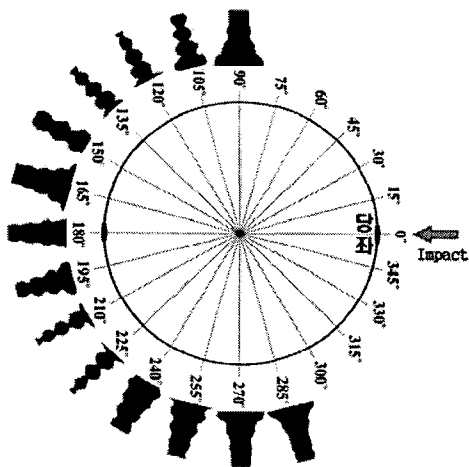


Fig.8 Beat map of 2nd vibration mode.

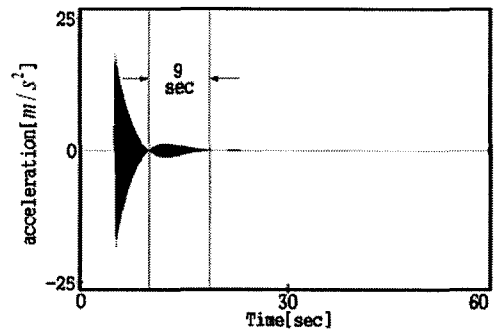


(a) beat of vibration

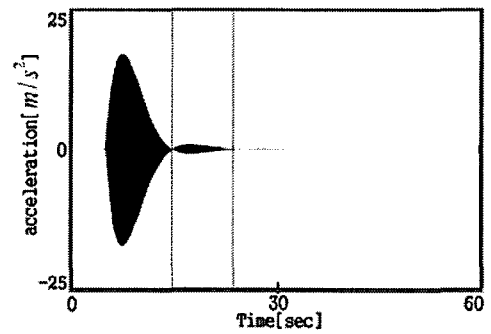


(b) beat of sound

Fig.7 Measured beat of the 1st vibration mode.



(a) acceleration at point 9



(b) acceleration at point 11

Fig.9 Measured beat in vibration of (0,3) mode (165Hz 175Hz filtered).

### 6. 결론

미소 비대칭을 집중질량으로, 종제를 원통셀로 단순화시켜 충격응답함수를 구하였다. 충격응답함수 모델에 근거하여 모드별 맥놀이 응답의 수학적 모델을 구하였다. 성덕대 왕신종에서 맥놀이를 발생시키는 1차 진동 및 2차 진동의 모드쌍에 대한 질선배치와 주파수의 측정치를 맥놀이 이론 모델에 적용하여 맥놀이지도로 작성하였다. 맥놀이 지도로부터 맥놀이가 강하고 약한 부분이 원주상에서 주기적으로 분포한다는 사실을 확인하고 그 원인을 규명하였다. 맥놀이 지도상에 표시된 맥놀이의 강약 분포는 기속도와 음향의 측정 파형과 비교할 때 상당히 잘 맞는 것으로 확인되었다.

### 후기

본 논문 작성에 필요한 실험데이터 취득에 협조해 주신 국립경주박물관장님 이하 관계자 여러분들께 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

(1) 엄영하, 1984, "한국종의 연구", 한국정신문화연구원 연구논총 84-14.

(2) 이병호, 1982, "한국범종의 음향학적 해석", 한국음향학회지, 1권 1호, pp6-18.

(3) T. Charnley and R. Perrin, 1978. "Studies with an eccentric bell", Journal of Sound and Vibration Vol.58(4), pp.517-525.

(4) 엄영하, 김석현, 1981, "종형구조에 관한 연구", 범종 4권, pp55-67.

(5) 이장무, 전성하, 김석현, 엄영하, 1989, "한국종의 진동 특성에 관한 연구(I)", 대한기계학회지 13권 3호, pp.397-403.

(6) 이장무, 김석현, 1999, "성덕대왕신종의 설계와 진동 음향특성의 상관관계", 성덕대왕신종 종합논문집, pp.320-339.

(7) 김석현, 2002, "성덕대왕신종의 진동 및 음향특성 분석", 경주박물관 학술조사보고서, 국립경주박물관.

(8) S.H.Kim, W.Soedel and J.M.Lee, 1994, "Analysis of the beating response of bell type structures" Journal of Sound and Vibration, Vol.173(4), pp.517-536.

(9) 김석현, 박석균, 박기영, 서백수, 2002, "미소 비대칭의 맥놀이 지도", 한국소음진동공학회 논문집, 제 12권 9호 pp685-693.

(10) J.M.Lee, S.H.Kim, S.J.Lee, J.D.Jeong, H.G.Choi,

"A Study on the vibration characteristics of a large size Korean bell", Journal of Sound and Vibration, accepted and in press.

(10) 김석현, 김정현, 정지덕, 이장무, 2002, "성덕대왕신종의 진동 및 음향특성", 한국소음진동공학회 논문집 제12권 7호, pp534-541.

(11) W.Soedel, 1993, "Vibration of Shells and Plates", Marcel Dekker.