

연성된 셸 구조물의 진동 파워흐름해석

Vibration Power Flow Analysis of Coupled Shell Structures

김일환* · 홍석윤** · 박도현* · 길현권***

Il-Hwan Kim, Suk-Yoon Hong, Do-Hyun Park and Hyun-Gwon Kil

Key Words : Coupled Shell(연성된 셸), Power Flow Analysis(파워흐름해석법), Power Transmission Coefficient(파워투과계수), Power Reflection Coefficient(파워반사계수)

ABSTRACT

In this paper, Power Flow Analysis (PFA) method has been applied to the prediction of vibration energy density and intensity of coupled shell structures in the medium-to-high frequency ranges. To consider the wave transformation at joint between shell elements, power transmission and reflection coefficients are investigated for various joint angles, and here Donnell-Mushtari thin shell theory has been used. For validations computations are performed to analyze the response of coupled shells by changing the excitation frequency and damping loss factor.

1. 서론

복합구조물의 중고주파 진동 현상은 소음 발생의 주요 원인이 될 수 있기 때문에 관심의 초점이 되고 있다. 기존의 유한요소법(FEM)과 경계요소법(BEM) 및 통계적에너지해석법(SEA)이 중고주파 영역에서 가지는 한계점들을 보완하기 위해 제안된 파워흐름해석법(Power Flow Analysis, PFA)은 고유의 에너지지배방정식을 기반으로 하여 고주파 영역에서 에너지의 공간적인 분포와 전달경로등을 제시함은 물론 중주파수 영역에까지 확대 적용될 수 있는 방법으로 인식되고 있다. Nefske와 Sung은 파워흐름해석법을 보의 횡진동에 적용하였고 Wohlever와 Bernhard는 보의 횡진동과 종진동에 대한 에너지지배방정식을 제시하였다. Bouthier와 Bernhard는 이차원 막막(membrane)과 등방성 평판의 횡진동 및 음향공간에 대한 에너지지배방정식을 제시하였다. 박도현 등은 등방성(isotropic) 평판의 면내(in-plane)진동과 직교이방성(orthotropic) 평판의 횡진동에 대한 에너지지배

방정식을 유도하였으며 서성훈은 연성 보-평판 구조요소를 개발하였고, 서울대 선박소음진동연구실에서는 PFA를 기반으로 하는 해석프로그램을 처음으로 개발하였다.

파워흐름해석법을 일반적인 형상을 가지는 구조물의 중고주파 소음진동 문제에 적용하기 위해서는 이를 유한요소법과 경계요소법에 접목할 필요가 있다. 서성훈등은 파워흐름해석법에 유한요소법을 적용한 파워흐름유한요소법(Power Flow Finite Element Method, PPFEM)을 정립하였고, 박도현과 이호원은 파워흐름해석법에 경계요소법을 적용한 파워흐름경계요소법(Power Flow Boundary Element Method, PFBEM)을 정립하여 보와 평판으로 구성된 복합구조물의 진동해석에 적용하였다. 박도현등은 보와 평판외에 곡률을 가지는 단일 쉘요소에 대해 파워흐름해석법은 적용하였다. 이를 복합구조물에 확장하여 적용하기 위해서는 연성된 셸 구조물에 대한 진동문제를 해석하기 위한 파워흐름해석법의 정립이 필요하다.

따라서, 본 논문에서는 파워흐름해석법을 연성된 셸구조물에 적용하기 위한 연구로서 원통형 셸의 연성부분에서 파워투과계수와 파워반사계수를 구하고 이를 파워흐름해석법에 적용하여 두 개의 원통형 셸요소가 연성된 경우의 진동문제에 수치적으로 적용하였다.

2. 쉘요소내의 변위표현식 유도

* 서울대학교 조선해양공학과 대학원
E-mail : hellol74@snu.ac.kr
Tel : (02) 880-7331, Fax : (02) 888-9288

** 서울대학교 조선해양공학과

*** 수원대학교 기계공학과

2.1 힘과 모멘트

기본적으로 쉘은 평판과 달리 변위의 세가지 방향성분 u, v, w 가 서로 연성되어 있으므로 이를 동시에 고려하면 좌위투과/반사계수의 유도가 불가능할 가능성이 높다. 박도현등은 평판의 경우처럼 쉘의 면외변위와 면내변위를 분리시켜 에너지지배방정식을 유도한 바 있으며, 이 경우 곡률반경이 커지거나 주파수가 높아지면 점차 엄밀해의 파수와 일치함을 확인할 수 있다. 이처럼 면내변위와 면외변위를 분리할 수 있다고 가정하면 면내진동에 의한 force resultant와 moment resultant는 다음과 같이 표현된다.

$$N_\alpha = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \quad (1a)$$

$$N_\beta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\nu}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \quad (1b)$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\nu}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \quad (1c)$$

$$M_\alpha = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_\alpha A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{R_\beta B} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \quad (1d)$$

$$M_\beta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_\beta B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\nu}{R_\alpha A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \quad (1e)$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(\frac{1}{R_\alpha B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{R_\beta A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \quad (1f)$$

면외진동에 의한 힘과 모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$N_\alpha = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{\nu}{R_\beta} \right) w \quad (2a)$$

$$N_\beta = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R_\beta} + \frac{\nu}{R_\alpha} \right) w \quad (2b)$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = 0 \quad (2c)$$

$$M_\alpha = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\nu}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \quad (2d)$$

$$M_\beta = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\nu}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \quad (2e)$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (2f)$$

(1)식과 (2)식을 각각 더하면 면내진동과 면외진동이 모두 고려된 힘과 모멘트를 얻을 수 있다.

2.2 쉘의 운동방정식

쉘의 면외변위를 무시한 경우 면내진동에 대한 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{A} \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} + \frac{1}{R_\alpha A} \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_\beta B} \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \beta} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3a)$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_\beta B} \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{R_\alpha A} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3b)$$

(3)식에 (1)식을 적용하고 $h^2/(12R^2)$ 을 포함하는 항들을 무시하면 변위의 면내 성분으로 표현된 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta}$$

$$= \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4a)$$

$$\frac{(1+\nu)}{2} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2}$$

$$= \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4b)$$

쉘의 면내변위를 무시한 경우 면외진동에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$-\frac{N_\alpha}{R_\alpha} - \frac{N_\beta}{R_\beta} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 M_{\beta\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta}$$

$$+ \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 M_\beta}{\partial \beta^2} + \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5)$$

(5)식에 (2)식을 적용하면 변위 w 로 표현되는 면외진동의 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D\nabla^4 w + K \left(\frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2} + \frac{2\nu}{R_\alpha R_\beta} \right) w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

위 식의 ∇^4 은 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla^4 = \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{2}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \quad (7)$$

2.3 분산관계식

면내진동의 운동방정식에는 두 가지 파동 모드가 존재한다. 이들을 분리해 내기 위해서는 먼저 다음과 같이 변위의 면내 성분을 파동해의 형태로 가정한다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_u \\ C_v \end{Bmatrix} \exp(-jk_\alpha A\alpha - ik_\beta B\beta + j\omega t) \quad (8)$$

(8)식을 대입한 (4)식을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} k_\alpha^2 + \frac{(1-\nu)}{2} k_\beta^2 - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \omega^2 & -\frac{(1+\nu)}{2} k_\alpha k_\beta \\ -\frac{(1+\nu)}{2} k_\alpha k_\beta & -\frac{(1-\nu)}{2} k_\alpha^2 + k_\beta^2 - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

위 행렬식에서 계수 행렬의 행렬식을 0으로 두면 다음과 같은 특성 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(k_\alpha^2 + \frac{(1-\nu)}{2} k_\beta^2 - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \omega^2 \right) \left(-\frac{(1-\nu)}{2} k_\alpha^2 + k_\beta^2 - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \omega^2 \right) - \frac{(1+\nu)^2}{4} k_\alpha^2 k_\beta^2 = 0 \quad (10)$$

(10)식을 인수분해 하면 다음과 같이 두 가지 파동에 대한 분산관계식을 얻게 된다.

$$\left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho}, \quad \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = \frac{E}{2(1+\nu)\rho} \quad (11a-b)$$

(11a)식은 plate의 면내 종파의 분산관계식과 동일하고 (11b)식은 plate의 전단파의 분산관계식과 동일하다. 이 두 식으로부터 다음과 같이 각 파동에 대한 군속도를 얻을 수 있다.

$$c_{\omega'} = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}}, \quad c_{\omega''} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} \quad (12a-b)$$

여기서 $c_{\omega'}$, $c_{\omega''}$ 는 각각 종파와 전단파의 군속도이다.

한편, 면외변위 w 도 다음과 같은 파동해의 형태로 가정할 수 있다.

$$w(\alpha, \beta, t) = W \exp(-jk_\alpha A\alpha - jk_\beta B\beta + j\omega t) \quad (13)$$

(13)식을 운동방정식인 (6)식에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$D(k_a^2 + k_b^2) = \rho h \omega^2 - K \left(\frac{1}{R_a^2} + \frac{1}{R_b^2} + \frac{2\nu}{R_a R_b} \right) \quad (14)$$

이 때 파수 k 를 $k^2 = k_a^2 + k_b^2$ 로 정의하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2 - \frac{K}{D} \left(\frac{1}{R_a^2} + \frac{1}{R_b^2} + \frac{2\nu}{R_a R_b} \right) \quad (15)$$

(15)식으로부터 쉘의 면진동에 대한 군속도 c_g 를 계산하면 다음과 같다.

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2k^3 D}{\omega \rho h} = c_{sl} \left\{ 1 - \frac{c_{sl}^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{R_a^2} + \frac{1}{R_b^2} + \frac{2\nu}{R_a R_b} \right) \right\}^{\frac{3}{4}} \quad (16)$$

여기서 c_{sl} 와 c_{sl} 은 plate의 굽힘파와 종파에 대한 군속도이며 다음과 같이 표현된다.

$$c_{sl} = 2 \left(\frac{D}{\rho h} \omega^2 \right)^{1/4}, c_{ps} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} \quad (17a-b)$$

2.4 변위

(8)식과 (11)식을 쉘의 면내진동방정식인 (9)식에 대입하여 고유치를 얻으면 그 비로써 종파와 전단파에 대해 각각 C_n 와 C_t 의 비를 결정할 수 있다. 면내변위는 종파와 전단파의 성분을 중첩하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u(\alpha, \beta, t) = \left\{ \frac{k_a}{k_t} \alpha_s \exp(-ik_a B \beta) - \frac{k_b}{k_s} \alpha_s \exp(-ik_b B \beta) \right\} \times \exp(-ik_a A \alpha + i\omega t) \quad (18-a)$$

$$u(\alpha, \beta, t) = \left\{ \frac{k_a}{k_t} \alpha_s \exp(-ik_a B \beta) + \frac{k_b}{k_s} \alpha_s \exp(-ik_b B \beta) \right\} \times \exp(-ik_a A \alpha + i\omega t) \quad (18-b)$$

여기서 α_s , α_s 는 각각 종파와 전단파의 크기이다. 면의 변위는 굽힘파의 원거리와 근거리 성분을 중첩하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u(\alpha, \beta, t) = (\alpha_{jl} \exp(-ik_{jl} B \beta) + \alpha_{jm} \exp(-ik_{jm} B \beta)) \times \exp(-ik_a A \alpha + i\omega t) \quad (18-c)$$

여기서 α_{jl} , α_{jm} 는 각각 굽힘파의 원거리와 근거리 성분의 크기이다.

2.5 유효힘

변위표현식인 (18)식에서 미지수는 4개이므로 연성경계조건의 수를 미지수의 개수와 일치시키기 위해 다음과 같은 유효힘이라는 개념을 사용한다. a 가 일정한 모서리에 작용하는 유효힘은 다음과 같다.

$$\overline{N_{\alpha\beta}} = N_{\alpha\beta} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\beta} \quad V_\alpha = Q_\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \quad (19a-b)$$

β 가 일정한 모서리에 작용하는 유효힘은 다음과 같다.

$$\overline{N_{\beta\alpha}} = N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\alpha} \quad V_\beta = Q_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} \quad (20a-b)$$

여기서 Q_α , Q_β 는 수직전단력으로서 이는 모멘트 평형으로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$Q_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \beta} \quad (21a)$$

$$Q_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} \quad (21b)$$

3. N개의 원통형 쉘이 연성된 경우의 파워투과/반사계수 계산

3.1 파워투과/반사계수 계산

임의의 고정좌표계(global coordinates)를 (α, β, z) 라고 가정하고, 쉘 요소들이 α 축을 경계선으로 하여 연결되어 있다면 N 개의 쉘 중에서 고정좌표계와 α 축을 회전축으로 하여 ϕ , 만큼의 각도를 이루고 있는 j 번째 쉘의 회전 특성은 다음 회전 행렬 R_j 로 표현할 수 있다.

$$R_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_j & -\sin \phi_j & 0 \\ 0 & \sin \phi_j & \cos \phi_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

따라서 N 개의 쉘 요소에 작용하는 힘과 모멘트의 경계조건은 고정좌표계를 기준으로 다음식을 만족해야 한다.

$$\sum_{j=1}^N R_j F_j = 0 \quad (23)$$

여기서 $\vec{F}_j = [\overline{N_{\beta\alpha}}, N_{\beta\beta}, V_{\beta\beta}, M_{\beta\beta}]^T$ 로서 j 번째 shell 요소 내의 힘과 모멘트를 나타내는 열벡터이다. 만약 고정좌표계에서 경계의 변위와 기울기를 나타내는 변위벡터를 $\vec{a} = [u \ v \ w \ \theta_\beta]^T$ 라고 정의하면, j 번째 쉘요소에서의 국부좌표계(local coordinates)에서 경계의 변위와 기울기를 나타내는 변위벡터 $\vec{b}_j = [u_j \ v_j \ w_j \ \theta_{\beta j}]^T$ 와의 관계는 다음과 같다.

$$\vec{b}_j = R_j^{-1} \vec{a} \quad (24)$$

여기서 θ_β 는 쉘의 중앙단면에 대한 수선이 변형 후 β 축에 관해 기울어진 각도이며 다음과 같이 표현된다.

$$\theta_\beta = \frac{v}{R_\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (25)$$

j 번째 쉘요소내의 파의 크기로 구성된 미지수벡터 $\vec{\alpha}_j = [\alpha_j \ \alpha_{\beta j} \ \alpha_{\beta\beta j} \ \alpha_{\beta\beta j}]^T$ 를 도입하면 이는 입사파에 의한 성분과 투과 혹은 반사된 파의 크기가 중첩되어 있으므로 $\vec{\alpha}_j$ 를 입사파의 크기벡터인 $\vec{\alpha}_j^+$ 와 투과 혹은 반사된 파의 크기벡터인 $\vec{\alpha}_j^-$ 의 합으로 표현할 수 있다.

$$\vec{\alpha}_j = \vec{\alpha}_j^+ + \vec{\alpha}_j^- \quad (26)$$

같은 방법으로 변위벡터도 다음의 관계식을 만족한다.

$$\vec{b}_j = \vec{b}_j^+ + \vec{b}_j^- \quad (27)$$

(24)식과 (27)식을 이용하면 m 번째 쉘요소내 입사파가 존재할 때 고정좌표계의 변위벡터와 j 번째 쉘요소의

국부좌표계의 변위벡터의 관계를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{b}_j = R_j^{-1} \vec{a} - \vec{b}_j \delta_{jm} \quad (28)$$

(18)식을 행렬화하면 j 번째 셀요소내의 변위벡터 \vec{b}_j 와 크기벡터 \vec{a}_j 의 관계를 나타내는 연결행렬 L_j 를 이용해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{b}_j = L_j \vec{a}_j \quad (29)$$

또한, (18)식을 (1)식과 (2)식에 대입하면 경계에서 j 번째 셀요소에 작용하는 힘벡터 \vec{F}_j 와 변위벡터 \vec{b}_j 의 관계를 나타내는 강성행렬 S_j 를 이용해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{F}_j = S_j \vec{b}_j \quad (30)$$

(23)식에 (24)식과 (28)식을 대입하면 다음과 같이 연성축에서 고정좌표계의 변위벡터를 표현할 수 있다.

$$\vec{a} = \left[\sum_{j=1}^n R_j S_j L_j^{-1} R_j^{-1} \right]^{-1} R_m (S_m L_m^{-1} L_m - S_m) \vec{a}_m \quad (31)$$

고정좌표계의 변위벡터를 얻은 후 (31)식을 다시 (28)식에 대입하면 다음과 같이 j 번째 셀요소의 연성축에서 국부좌표계의 크기벡터를 얻을 수 있다.

$$\vec{a}_j = L_j^{-1} (R_j^{-1} \vec{a} - L_j \vec{a}_j \delta_{jm}) \quad (32)$$

(32)식으로부터 구한 각 좌의 크기와 경계를 통해 입사하는 좌의 크기의 비율 이용해 좌위투과계수와 좌위반사계수를 구할 수 있다.

4. 에너지 밀도 및 인텐시티 계산

4.1 셀의 진동에너지저장방정식

박도현 등은 얇은 셀의 변위진동과 면내진동에 관한 2차 편미분형태의 진동에너지방정식을 다음과 같이 유도하였다.

$$-\frac{c_{ij}^2}{\eta_i \omega} \left(\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \langle \bar{e}_{ij} \rangle + \eta_i \omega \langle \bar{e}_{ij} \rangle = 0 \quad (33a)$$

$$-\frac{c_{ij}^2}{\eta_j \omega} \left(\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \langle \bar{e}_{ij} \rangle + \eta_j \omega \langle \bar{e}_{ij} \rangle = 0 \quad (33b)$$

$$-\frac{c_{is}^2}{\eta_s \omega} \left(\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \langle \bar{e}_{is} \rangle + \eta_s \omega \langle \bar{e}_{is} \rangle = 0 \quad (33c)$$

그리고 각 영역에서의 인텐시티와 에너지 밀도와의 상관관계는 다음과 같다.

$$\langle \bar{q}_{ij} \rangle = -\frac{c_{ij}^2}{\eta_i \omega} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \vec{i} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \vec{j} \right) \langle \bar{e}_{ij} \rangle \quad (34a)$$

$$\langle \bar{q}_{ij} \rangle = -\frac{c_{ij}^2}{\eta_j \omega} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \vec{i} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \vec{j} \right) \langle \bar{e}_{ij} \rangle \quad (34b)$$

$$\langle \bar{q}_{is} \rangle = -\frac{c_{is}^2}{\eta_s \omega} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \vec{i} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \vec{j} \right) \langle \bar{e}_{is} \rangle \quad (34c)$$

(33)식의 일반해는 β 축에 평행한 경계선 $\alpha=0$ 와 $\alpha=L_a$ 가 모든 영역에서 더 이상 연결된 부재가 없기 때문에 흘러나

가는 파위는 없다고 가정하면 변위진동에 의한 에너지 밀도는 (35)식과 같이 α 에 관한 cosine의 급수로 표현할 수 있다.

$$\langle \bar{e}_{ij} \rangle_{(\alpha, \beta)} = \sum_{n=1}^{\infty} e_{ijn}(\beta_i) \cos k_n \alpha \quad (35)$$

여기서 $e_{ijn}(x_i)$ 는 영역 i 에서 에너지 밀도 $\langle \bar{e}_{ij} \rangle_{(\alpha, \beta)}$ 급수의 n 번째 성분의 계수이고 k_n 은 $n\pi/L_a$ 이다. (35)식을 (32a)식에 대입하면 다음과 같이 $e_{ijn}(\beta_i)$ 에 관한 관계식을 얻는다.

$$-\frac{1}{B^2} \frac{d^2 e_{ijn}(\beta_i)}{d\beta_i^2} + \left(\frac{1}{A^2} k_n^2 + \Phi_i^2 \right) e_{ijn}(\beta_i) = 0 \quad (36)$$

여기서 Φ_i 는 $\eta_i \omega / c_{ijn}$ 이다. (36)식은 β 에 관한 2차상미분방정식이므로 다음과 같이 $e_{ijn}(\beta_i)$ 의 일반해를 구할 수 있다.

$$e_{ijn}(\beta_i) = e_{ijn}^+(\beta_i) + e_{ijn}^-(\beta_i) \quad (37)$$

여기서 $B^2 \left(\frac{1}{A^2} k_n^2 + \Phi_i^2 \right)$ 를 λ_{in}^2 라 하면

$$e_{ijn}^+(\beta_i) = A_{in}^+ \exp(-\lambda_{in} \beta_i) \quad (38a)$$

$$e_{ijn}^-(\beta_i) = A_{in}^- \exp(\lambda_{in} \beta_i) \quad (38b)$$

로 표현된다. 위첨자로 표시된 +와 -는 + β 방향과 - β 방향으로의 에너지 전달을 의미한다.

(35)식, (37)식, 그리고 (38)식을 (34a)식에 대입하면 영역 i 에서의 α 방향 인텐시티 성분 $q_{ijn}(\alpha, \beta_i)$ 와 β 방향 성분 $q_{ijn}(\alpha, \beta_i)$ 의 일반해도 다음과 같이 얻어진다.

$$q_{ijn}(\alpha, \beta_i) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{ijn}(\beta_i) \sin k_n \alpha \quad (39a)$$

$$q_{ijn}(\alpha, \beta_i) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{ijn}(\beta_i) \cos k_n \alpha \quad (39b)$$

여기서 $q_{ijn}(\beta_i)$ 는 $q_{ijn}(\alpha, \beta_i)$ 급수의 n 번째 성분의 계수이며 (39)식과 유사한 형태로 표현할 수 있다.

$$q_{ijn}(\beta_i) = q_{ijn}^+(\beta_i) + q_{ijn}^-(\beta_i) \quad (40a)$$

$$q_{ijn}^+(\beta_i) = \frac{1}{A} \frac{c_{ijn}^2}{\eta_i \omega} k_n e_{ijn}^+(\beta_i) \quad (40b)$$

$$q_{ijn}^-(\beta_i) = \frac{1}{A} \frac{c_{ijn}^2}{\eta_j \omega} k_n e_{ijn}^-(\beta_i) \quad (40c)$$

$q_{ijn}(\alpha, \beta_i)$ 급수의 n 번째 성분의 계수인 $q_{ijn}(\beta_i)$ 도 위 식들처럼 표현하면 다음과 같다.

$$q_{ijn}(\beta_i) = q_{ijn}^+(\beta_i) - q_{ijn}^-(\beta_i) \quad (41a)$$

$$q_{ijn}^+(\beta_i) = \frac{1}{B} \frac{c_{ijn}^2}{\eta_i \omega} \lambda_{in} e_{ijn}^+(\beta_i) \quad (41b)$$

$$q_{ijn}^-(\beta_i) = \frac{1}{B} \frac{c_{ijn}^2}{\eta_j \omega} \lambda_{in} e_{ijn}^-(\beta_i) \quad (41c)$$

한편, 짐가진력에 의한 입력파위도 에너지 밀도와 마찬가지로 α 에 관한 cosine의 급수로 전개되어야 한다. 만약 크기가 Π 인 파위가 (α_0, β_0) 의 위치에 입력된다면 입력파위는 (42)식처럼 표현될 수 있다.

$$\Pi \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(\beta - \beta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_n(\beta) \cos k_n \alpha \quad (42)$$

이때 (α_c, β_c) 는 가진력이 작용하는 위치이고, $\Pi_n(\beta)$ 는 급수의 n 번째 성분의 계수인데 n 의 값에 따라 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\Pi_n(\beta) = \begin{cases} \frac{\Pi}{L_\alpha} \delta(\beta - \beta_c) & (n=0) \\ \frac{2\Pi}{L_\alpha} \delta(\beta - \beta_c) \cos k_n \alpha_c & (n \neq 0) \end{cases} \quad (43)$$

지금까지 변의진동에너지 밀도와 인텐시티의 일반해를 α 에 관한 급수로 구하였으며 면내진동의 경우도 유사한 과정을 통해 일반해를 얻을 수 있다.

4.2 경계조건

α 축에 평행한 평판구조물의 좌우 양단의 경계선 $\beta_1=0$ 와 $\beta_2=L_\beta$ 에서 더 이상 연결된 부재가 없으므로 흘러나가는 파워가 없다는 조건으로부터 다음의 관계식들을 얻는다.

$$q_{\beta 1}(\alpha, 0) = 0, \quad q_{\beta 2}(\alpha, L_\beta) = 0 \quad (44a-b)$$

또한 파워가 입력되는 위치 즉 영역 ①과 영역 ②의 경계선 $\beta_1=\beta_0$, $\beta_2=\beta_0-L_\beta$ 에서는 에너지 밀도의 연속성과 파워의 평형조건을 만족해야 한다.

$$e_1(\alpha, \beta_0) = e_2(\alpha, \beta_0 - L_\beta) \quad (45)$$

$$q_{\beta 2}(\alpha, \beta_0 - L_\beta) = q_{\beta 1}(\alpha, \beta_0) + \Pi \delta(\alpha - \alpha_c) \quad (46)$$

마지막으로 평판요소간의 연결부분 즉 영역 ②와 영역 ③의 경계선 $\beta_2=0$ 혹은 $\beta_3=0$ 에서는 두 평판이 임의의 각을 이루면서 연결되어 있기 때문에 파동변환이 발생하여 굽힘파와 종파 그리고 전단파에 대한 진동파위의 부분적인 투과와 반사를 고려해야 한다. 이는 파워투과계수와 파워반사계수를 이용하여 다음 여섯 개의 관계식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} q_{\beta 1}^+ &= \gamma_{\beta 11} q_{\beta 1}^+ + \gamma_{\beta 11} q_{\beta 2}^+ + \gamma_{\beta 11} q_{\beta 3}^+ + \tau_{\beta 21} q_{\beta 2}^- + \tau_{\beta 21} q_{\beta 3}^- + \tau_{\beta 31} q_{\beta 3}^- \\ q_{\beta 2}^+ &= \gamma_{\beta 21} q_{\beta 1}^+ + \gamma_{\beta 21} q_{\beta 2}^+ + \gamma_{\beta 21} q_{\beta 3}^+ + \tau_{\beta 22} q_{\beta 2}^- + \tau_{\beta 22} q_{\beta 3}^- + \tau_{\beta 32} q_{\beta 3}^- \\ q_{\beta 3}^+ &= \gamma_{\beta 31} q_{\beta 1}^+ + \gamma_{\beta 31} q_{\beta 2}^+ + \gamma_{\beta 31} q_{\beta 3}^+ + \tau_{\beta 32} q_{\beta 2}^- + \tau_{\beta 32} q_{\beta 3}^- + \tau_{\beta 33} q_{\beta 3}^- \\ q_{\beta 2}^- &= \tau_{\beta 21} q_{\beta 1}^+ + \tau_{\beta 22} q_{\beta 2}^+ + \tau_{\beta 22} q_{\beta 3}^+ + \gamma_{\beta 22} q_{\beta 2}^- + \gamma_{\beta 22} q_{\beta 3}^- + \gamma_{\beta 32} q_{\beta 3}^- \\ q_{\beta 3}^- &= \tau_{\beta 31} q_{\beta 1}^+ + \tau_{\beta 32} q_{\beta 2}^+ + \tau_{\beta 32} q_{\beta 3}^+ + \gamma_{\beta 32} q_{\beta 2}^- + \gamma_{\beta 32} q_{\beta 3}^- + \gamma_{\beta 33} q_{\beta 3}^- \\ q_{\beta 3}^+ &= \tau_{\beta 32} q_{\beta 2}^+ + \tau_{\beta 33} q_{\beta 3}^+ + \tau_{\beta 33} q_{\beta 3}^+ + \gamma_{\beta 33} q_{\beta 2}^- + \gamma_{\beta 33} q_{\beta 3}^- + \gamma_{\beta 33} q_{\beta 3}^- \end{aligned} \quad (47a-f)$$

여기서 $\gamma_{\beta ij}$ 는 영역 i 에서 평판요소의 연결부분으로 입사되는 a 종류의 입사파의 파워에 대한 b 종류의 반사파의 파워 비로 표현되는 파워반사계수이고 $\tau_{\beta ij}$ 는 영역 i 에서 연결부분으로 입사되는 a 종류의 입사파의 파워에 대한 영역 j 로 투과된 b 종류의 투과파의 파워 비로 표현되는 파워투과계수를 나타낸다. 에너지와 파워의 경계조건들을 적용하면 일반해의 n 번째 성분의 미지수들을 결정할 수 있고 이로부터 각 영역에서의 시간 및 공간에 대한 평균적인 에너지 밀도와 인텐시티를 구할 수 있다.

5. 계산 결과 및 분석

연성된 원통형 셸구조물에서 한쪽 셸의 증앙을 횡방향으로 $\Pi e^{j\omega t}$ 의 파워를 조화가진한 경우, 각 경계에서 외부로 흘러나가는 파워는 없다고 가정하면 Fig. 1과 같은 셸 요소의 진동을 고려할 수 있다. Fig. 2-(a)와 Fig. 2-(b)는 곡률반경이 각각 $3m$, $5m$ 이고 두께가 $0.001m$ 로 같은 알루미늄 재질의 두 셸 요소간의 연성각도가 120° 인 경우 파워반사계수와 파워투과계수를 굽힘파 입사에 대해 입사각도를 변화시키면서 도시한 그래프이다. 이 결과를 경계조건인 (47)식에 대입하면 각각의 파에 대한 에너지밀도와 인텐시티를 얻을 수 있다. Fig. 2-(c)와 Fig. 2-(d)는 $\eta=0.01$ 인 경우 굽힘파에 의한 에너지밀도와 인텐시티의 그래프이고, Fig. 2-(e)와 Fig. 2-(f)는 같은 조건에서 종파에 의한 결과이며, Fig. 2-(g)와 Fig. 2-(h)는 전단파에 의한 결과이다. 그 결과 에너지밀도와 인텐시티는 셸의 곡률에 큰 영향을 받지 않고 곡률이 없는 평판의 경우와 유사한 패턴을 보임을 확인했다. 이로써 연성된 원통형 셸구조물의 파워투과계수와 파워반사계수를 구하고 이를 파워흐름해석법에 적용하여 셸을 포함한 복합구조물의 진동문제에까지 파워흐름해석법의 적용범위를 확장하였다.

참고 문헌

- (1) D.J. Nefske, S.H. Sung, 1989, "Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems : Basic Theory and Application to Beams," J. Vib. Acoustics, Stress and Reliability in Design, 111, pp.94-100.
- (2) O.M. Bouthier, R.J. Bernhard, 1985, "Simple Models of the Energetics of Transversely Vibrating Plates", J. Sound Vib. 182(1), pp.149-164.
- (3) P.E. Cho, 1993, "Energy Flow Analysis of Coupled Structures", Ph.D. Dissertation, Purdue University.
- (4) 박도원, 1999, "연성된 평판 및 상자형 구조물의 진동파워흐름해석", 공학석사학위논문, 서울대학교.
- (5) Arthur Leissa, 1963, Vibration of Shells, Ohio State University
- (6) S. Timoshenko, 1940, Theory of Plates and Shells, Mcgraw-Hill.
- (7) R. S. Langley, K. H. Heron, 1990, "Elastic Wave Transmission through Plate/Beam Junctions", J. Sound Vib. 143(2), pp.241-253

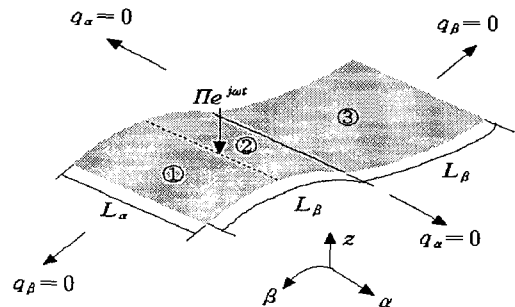
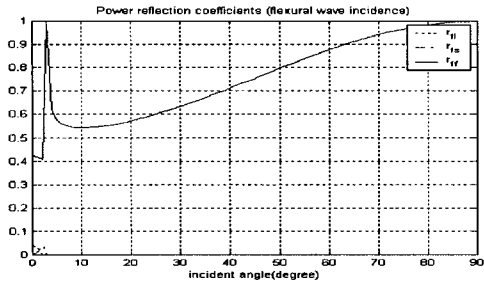
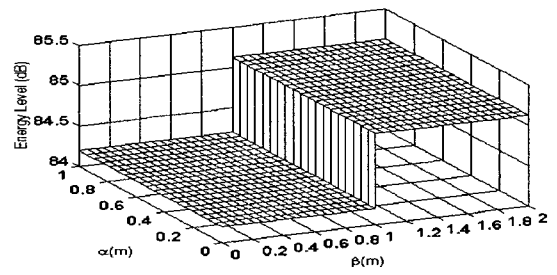


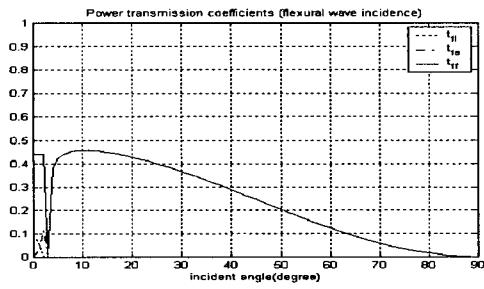
Fig 1. Boundary conditions of coupled shell structure



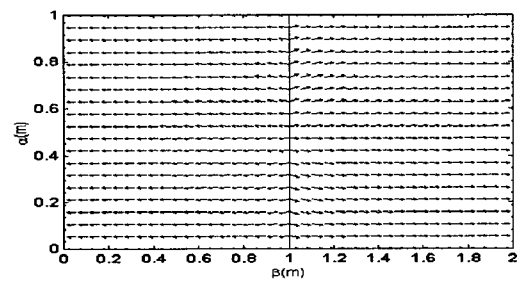
(a) Power reflection coefficients



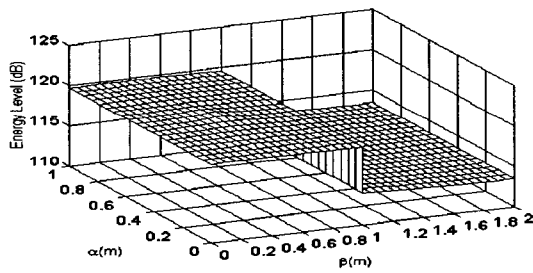
(e) Longitudinal wave energy density



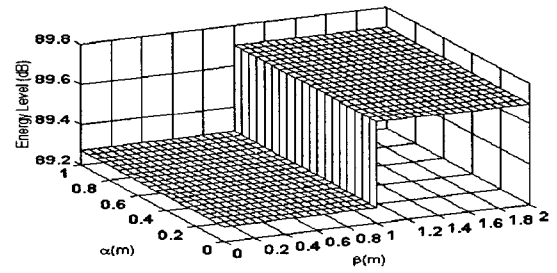
(b) Power transmission coefficients



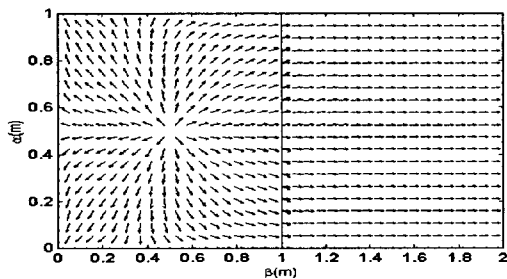
(f) Longitudinal wave intensity



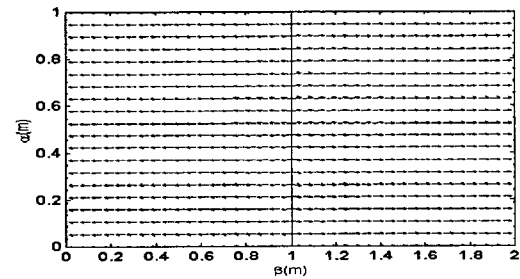
(c) Flexural wave energy density



(g) Shear wave energy density



(d) Flexural wave intensity



(h) Shear wave intensity

Fig 2. Power reflection and transmission coefficient by flexural wave incidence when $R_1=3m, R_2=5m$
 $f=2000Hz, h_1=h_2=0.001m, \phi_{xint}=120^\circ$
 $\eta=0.01$