

축 방향 왕복운동을 하는 외팔보의 복합변형변수를 이용한 비선형 모델링 및 주파수 응답특성

Nonlinear Modeling Employing Hybrid Deformation Variables and Frequency Response Characteristics of a Cantilever Beam Undergoing Axially Oscillating Motion

김 나 은 * · 현 상 학 ** · 유 흥 희 ***
Na-Eun Kim, Sang-Hak Hyun and Hong-Hee Yoo

Key Words : Axially Oscillating Motion(축방향 왕복운동), Frequency Response Characteristics(주파수 응답특성), Cantilever Beam(외팔보), Nonlinear Modeling(비선형 모델링)

ABSTRACT

A nonlinear dynamic modeling method for cantilever beams undergoing axially oscillating motion is presented in this paper. Hybrid deformation variables are employed for the modeling method with which frequency response characteristics of a axially oscillating cantilever beams are investigated. It is shown that the geometric nonlinear effects of stretching and curvature play important roles to accurately predict the frequency response characteristics. The effects of the amplitude and the damping constant on the frequency characteristics are also exhibited.

1. 서 론

고속재봉틀 바늘과 같이 축 방향 왕복 운동을 하는 구조물에서는 강체운동에 의한 강성변화가 발생한다. 즉 외팔보가 고정단에서 자유단쪽으로 가속될 때는 굽힘 강성이 감소하고 그 반대 방향으로 가속되면 강성이 증가하므로 결과적으로 시스템의 굽힘 강성이 연속적으로 변화하게 된다. 이러한 시스템의 경우 왕복운동의 특정 주파수 영역에서 동적 불안정성이 발생할 수 있으며 따라서 이를 정확히 예측하기 위한 연구가 필요하다.

구조물의 강체 운동에 관한 연구는 주로 회전 운동에 대하여 많이 이루어져 왔다. 가장 널리 알려져 있는 예제는 외팔보가 그 축에 수직방향으로 회전운동을 하는 경우인데 이 때 그 회전에 의한

원심력이 발생하여 강성이 증가하므로 그 결과로 고유진동수가 증가하는 현상이 발생한다. 이와 관련된 연구문헌들은 참고문헌 (1~2)에 잘 정리되어 있다. 참고문헌 (3~5)에는 구조물이 일반적 강체 운동을 하는 경우의 동적 모델링이 제시되었으나 수치적인 예제는 회전운동을 하는 외팔보로 국한하였다. 참고 문헌 (6)에는 참고문헌 (4)에 제시된 동적 모델링을 이용해 축방향 왕복운동을 할 때도 강성이 변화하는 것을 보여주고 안정성 해석을 수행하였다. 그런데 이 연구에서 사용된 동적 모델은 선형 모델이므로 안정성 해석은 주파수와 왕복 운동의 진폭의 변화에 따른 안정 및 불안정 영역을 구하고 그들을 구분하는 천이곡선을 해석적으로 유도하는 내용이 그 요점을 이룬다. 참고문헌 (7)에서도 동적 모델을 선형화 하여 안정성 해석에 관한 내용을 다루었으나 비선형성이 미치는 영향에 대해서는 전혀 다루지를 않았다. 최근 참고문헌 (8)의 연구에서는 기존 연구들에서 다루지 못하던 외팔보의 비선형 효과를 고려한 연구결과를 제시하였다. 이 연구에서는 비선형 모델이 기존의 선형 모델과는 현격한 차이를 갖고 동적 반응을 일으킨다는 것을 보여주고 있다.

* 한양대학교 공과대학 기계설계학과
E-mail : dewy2@unitel.co.kr
Tel : (02)2299-8169

** 한양대학교 최적설계신기술 연구센터

*** 한양대학교 공과대학 기계공학부

본 논문에서는 축방향 왕복운동을 하는 외팔보의 복합변형변수를 이용한 비선형 모델링을 유도하고 이에 근거한 동적 해석과 주파수 응답특성 해석을 수행하여 그 결과의 비교를 통해서 모델링 및 해석결과의 정확성을 규명하였다. 또한 본 논문은 기존 선형 모델링에 의해 얻어진 동적 해석 및 안정성 해석 결과가 선형화 과정을 통해 무시되었던 비선형 효과들이 고려되었을 때 얻어지는 결과와 서로 상당한 차이를 갖는다는 것을 보여주었다는 점에 또 다른 공헌점이 있다. 이와 동시에 비선형 모델링에 영향을 미치는 주요 인자들과 그 영향의 정도를 조사하였다는 점이 본 연구의 중요한 요점이라고 할 수 있다.

2. 운동방정식

본 절에서는 축방향 운동을 하는 외팔보의 운동방정식을 유도하려 한다. 본 연구에서는 편의상 2 차원 평면 운동을 하는 보를 해석 대상으로 정하였다. Fig.1 은 강체 A 에 고정된 외팔보의 모습을 보여준다. P_0 는 외팔보상 임의 질점의 변형전 위치를 나타내며 P 는 변형후 위치를 나타낸다. 여기서 \vec{a}_1 과 \vec{a}_2 는 강체 A 에 부착된 서로 수직인 단위 벡터들을 나타내며, x 는 보의 고정점 O로부터 변형전 임의점 P_0 까지의 거리를 \vec{u} 는 탄성변위를 s 는 임의 질점의 위치에서 보가 인장된 길이를 각각 나타낸다. 강체운동을 하는 외팔보의 운동방정식을 유도하기 위해 s 와 u_2 를 다음과 같이 근사화한다.

$$s(x,t) = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x)q_{1i}(t) \quad (1)$$

$$u_2(x,t) = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x)q_{2i}(t) \quad (2)$$

여기서 $\phi_{1i}(x)$ 와 $\phi_{2i}(x)$ 는 보의 인장과 굽힘방향 모드 함수들을 나타내며 $q_{1i}(t)$, $q_{2i}(t)$ 는 시간의 함수인 일반 좌표들이고 μ_1, μ_2 는 일반 좌표의 수이다. 보의 변형이 일어날 때 보의 임의 점 P 점의 속도 \vec{v}^P 는 다음의 관계를 이용하여 구한다.

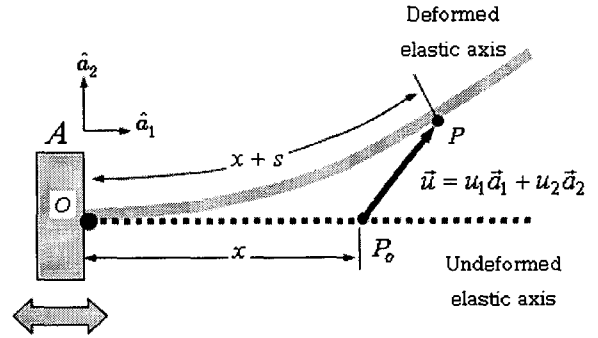


Fig. 1 Configuration of a axially oscillating cantilever Beam

$$\vec{v}^P = \vec{v}^O + \vec{v}^{P/A} \quad (3)$$

여기서 \vec{v}^O 는 외팔보의 축 방향으로 운동을 하는 강체 A 상의(외팔보의 고정단 점) O 점의 속도이며 $\vec{v}^{P/A}$ 는 강체 A 에서 관찰한 P 점의 속도를 나타내는 데 이들은 다음의 식과 같이 \vec{a}_1 과 \vec{a}_2 방향 성분으로 나타낼 수 있다.

$$\vec{v}^O = v_1 \vec{a}_1 + v_2 \vec{a}_2 \quad (4)$$

$$\vec{v}^{P/A} = \dot{u}_1 \vec{a}_1 + \dot{u}_2 \vec{a}_2 \quad (5)$$

따라서

$$\vec{v}^P = (v_1 + \dot{u}_1) \vec{a}_1 + (v_2 + \dot{u}_2) \vec{a}_2 \quad (6)$$

여기서 P 점의 가속도 \vec{a}^P 는 \vec{v}^P 를 시간으로 미분하여 구할 수 있다. 그런데 식 (6)에 나타난 \dot{u}_1 은 앞에서 u_1 이 근사화된 것이 아니므로, s 와 u_2 로 표시되어야 한다. 이를 위해 필요한 s 와 u_1 그리고 u_2 의 관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$x+s = \int_0^x [(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial \zeta})^2]^{1/2} d\zeta \quad (7)$$

Taylor 급수전개를 이용해 식 (7)을 2 차항까지 전개하여 정리하면

$$s = u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x (\frac{\partial u_1}{\partial \zeta})^2 d\zeta \quad (8)$$

따라서

$$\dot{u}_1 = s - \int_0^x \left[\frac{\partial u_2}{\partial \zeta} \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \zeta} \right] d\zeta \quad (9)$$

위 식은 u_1 이 s 와 u_2 에 의해 구해질 수 있음을 보여준다. 식 (9)를 이용하여 편속도를 구하면 다음과 같다

$$\frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_{1i}} = \phi_{1i} \bar{a}_1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_{2i}} = - \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^x (\phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta}) d\zeta q_{2j} \bar{a}_1 + \phi_{2i} \bar{a}_2 \quad (11)$$

이상에서 구한 식들과 다음 식을 이용하여 운동방정식을 구할 수 있다.

$$f_r^* + f_r = 0 \quad (r=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \quad (12)$$

이 운동방정식에서는 비선형 항들이 고려되는데 이들은 인장 변형에 관한 기하학적 조건으로부터 비롯되는 관성항들과 굽힘 변형에 관한 기하학적 조건으로부터 얻어지는 강성 항들로 구성된다. 일반 관성력은 보 구조물의 단면관성 효과를 무시하면 다음 식에 의해 구해질 수 있다.

$$f_r^* = - \int_0^L \frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_r} \cdot m \bar{a}^P dx \quad (13)$$

$(r=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2)$

여기서 L 과 m 은 각각 보의 길이와 단위길이당 질량을 나타내며 \bar{a}^P 는 P점의 가속도를 나타낸다. 외력이 작용하지 않는 경우에 운동방정식의 일반 작용력은 탄성에너지에 의해서만 결정되는데 보의 인장과 굽힘 효과만 고려한 탄성에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E_0 A_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E_0 I_{ZZ} (k_3)^2 dx \quad (14)$$

여기서 E_0 는 영률 A_0 는 단면적을 각각 나타내고 I_{ZZ} 는 2 차 면적모멘트를 k_3 는 \bar{a}_3 방향 곡률을 나타낸다. 본 운동방정식에서는 k_3 를 3 제곱 비선형 항까지 고려하여 나타내면 (곡률의 비선형성은 참고문헌[9] 참조) 다음과 같다.

$$k_3 = u_{2,xx} \left(1 - 2s_{,x} + \frac{1}{2} u_{2,x}^2 \right) - s_{,xx} u_{2,x} \quad (15)$$

식(15)와 함께 식(14)를 이용하여 일반작용력을 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$f_r = - \frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (r=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \quad (16)$$

이상의 결과를 종합하면 축방향 운동을 하는 외팔보의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_1} \int_0^L m \phi_{1i} \phi_{1j} dx \ddot{q}_{1j} + \int_0^L E_0 A_0 \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx q_{1j} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \int_0^L m \phi_{2i} \int_0^x \phi_{2j,\zeta} \phi_{2k,\zeta} d\zeta dx \ddot{q}_{2j} \ddot{q}_{2k} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \int_0^L m \phi_{2i} \int_0^x \phi_{2j,\zeta} \phi_{2k,\zeta} d\zeta dx q_{2j} \ddot{q}_{2k} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \left[\int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{1i,xx} \phi_{2j,x} \phi_{2k,xx} dx q_{2j} q_{2k} \right. \\ & \quad \left. + 2 \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{1i,x} \phi_{2j,xx} \phi_{2k,xx} dx q_{2j} q_{2k} \right] \\ & = -\dot{v}_1 \int_0^L m \phi_{1i} dx \quad (i=1,2,\dots,\mu_1) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^L m \phi_{2i} \phi_{2j} dx \ddot{q}_{2j} + \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx q_{2j} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} [-\dot{v}_1 \int_0^L m \left(\int_0^x \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \right) dx] q_{2j} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_1} \int_0^L m \int_0^x \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \phi_{1k} dx q_{2j} \ddot{q}_{1k} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,x} \phi_{1k,xx} dx q_{2j} q_{1k} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{2i,x} \phi_{2j,xx} \phi_{1k,xx} dx q_{2j} q_{1k} \\ & - \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} 4 \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} \phi_{1k,x} dx q_{2j} q_{1k} \\ & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} \phi_{2k,xx} \phi_{2l,xx} dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^L E_0 I_{ZZ} \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} \phi_{2k,x} \phi_{2l,x} dx \right) q_{2j} q_{2k} q_{2l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L m \int_0^x \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \int_0^x \phi_{2k,\zeta} \phi_{2l,\zeta} d\zeta dx \right) \\
 & \quad \cdot q_{2j} q_{2k} \ddot{q}_{2l} \\
 & + \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} \sum_{l=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L m \int_0^x \phi_{2i,\zeta} \phi_{2j,\zeta} d\zeta \int_0^x \phi_{2k,\zeta} \phi_{2l,\zeta} d\zeta dx \right) \\
 & \quad \cdot q_{2j} \dot{q}_{2k} \dot{q}_{2l} \\
 & = -\dot{v}_2 \int_0^L m \phi_{2i} dx \quad (i=1, 2, \dots, \mu_2)
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

3. 수치해석

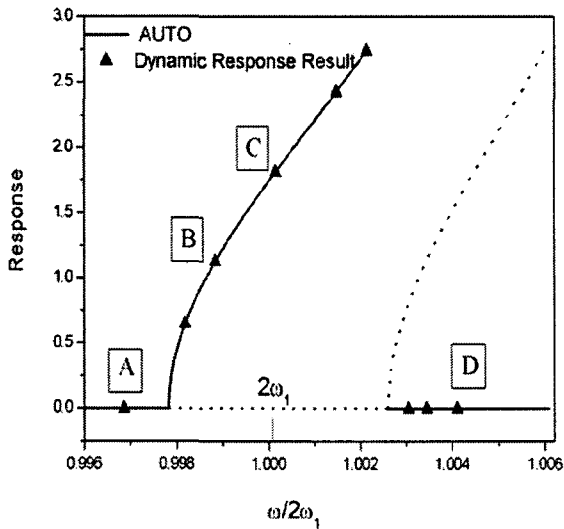
본 절에서는 앞 절에서 유도된 운동방정식을 이용하여 축 방향 왕복운동을 하는 외팔보에 대한 주파수 응답특성 해석을 수행하였다. 축방향 왕복운동 v_1 을 다음과 같은 함수로 나타낸다.

$$v_1 = v(1 - \cos \omega t) \tag{19}$$

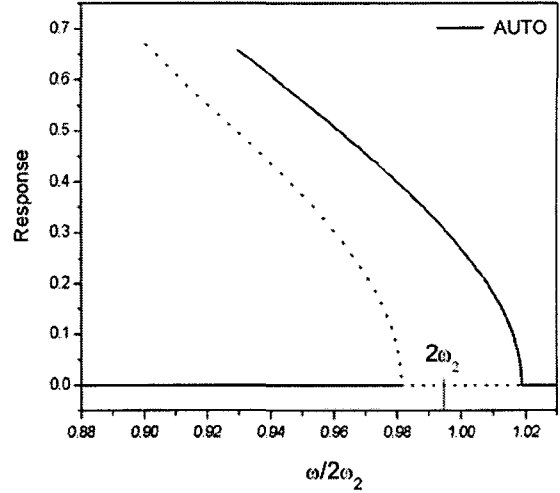
따라서

$$\dot{v}_1 = v\omega \sin \omega t \tag{20}$$

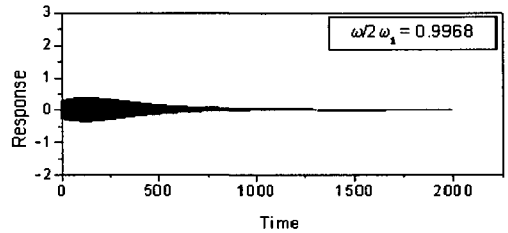
식 (19)와 (20)에서 ω 는 보의 축 방향 왕복운동주파수를 나타낸다.



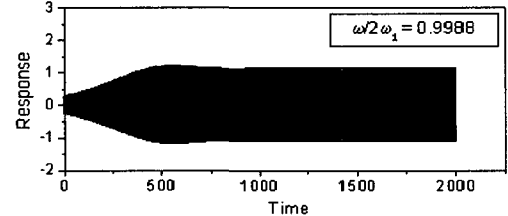
(a) Near twice the first natural frequency



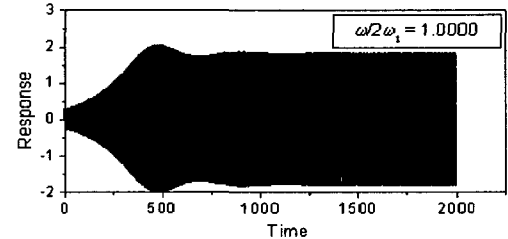
(b) Near twice the second natural frequency
Fig. 2 Frequency – Response curves



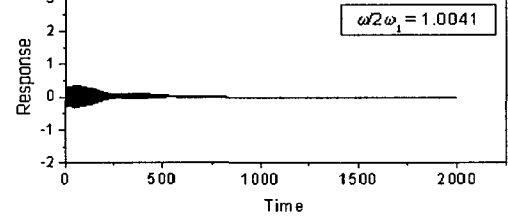
(a) Simulation result obtained at Position A



(b) Simulation result obtained at Position B



(c) Simulation result obtained at Position C



(d) Simulation result obtained at Position D

Fig. 3 Dynamic response simulation results

Fig. 2 는 축방향 왕복운동을 하는 외팔보의 왕복 주파수의 변화에 따른 동적 반응 진폭의 크기를 도시한 것이다. 이 그림에서 실선은 안정 평형점 및 주기해를 점선은 불안정 평형점 및 주기해를 각각 나타낸다. 불안정 평형점 및 주기해는 해석적으로는 구할 수 있으나 아주 특수한 조건에서만 발생하는 특해로서 실제적으로는 거의 발생하지 않는다. 따라서 Fig.2 에 나타난 안정 주기해는 Fig. 3 에 그의 해당 동적 반응을 제시하였으나 불안정 주기해는 제시하지 않았다. Fig. 2 (a)는 왕복주파수가 첫번째 고유진동수의 2 배 근처에 있을 때, 왕복 주파수의 변화에 따른 동적 반응 진폭 크기를 도시한 것이다. 이 결과는 널리 사용되는 Shooting Method 방법을 통해 (참고문헌 (10) 참조) 구한 것이고 삼각형 썰기로 그림에 표시한 결과는 수치 적분을 통해 동적 해석으로 구한 결과로서 두 결과는 정확히 일치하는 것을 알 수 있다. 따라서 이 결과들은 동적 해석 및 주파수 응답특성 해석 결과의 정확성을 보여준다. 이 결과에서는 또한 왕복주파수가 첫번째 고유진동수의 2 배 근처에서 때 주파수 응답곡선이 오른쪽으로 흰 모양을 갖는 특성도 볼 수 있다. Fig. 2 (b)는 왕복 주파수가 두 번째 고유진동수의 2 배 근처에 있을 때, 왕복 주파수의 변화에 따른 동적 반응의 진폭 크기를 도시한 것이다. 이 경우에는 주파수응답곡선이 왼쪽으로 흰 모양을 일으키는 특성을 나타내며, 동적 응답 진폭이 Fig. 2 (a)의 결과에 비해 상대적으로 작게 나타나는 것을 볼 수 있다.

Fig. 3 에서는 Fig. 2 에 표시된 4 개의 점들의 주파수에 대한 동적 반응 수치해석 결과들이 나타나 있다. 이 때 감쇠는 $c = 0.01$ 로 고려되었으며 Fig. 3(a)는 Fig. 2 의 A 점의 주파수에 대한 동적 반응 수치해석 결과를 보여주는데 예측한대로 A 점이 안정 영역상에 있으므로 동적 반응이 시간이 지남에 따라 0 에 수렴함을 볼 수 있다. Fig. 2 의 B 점과 C 점의 주파수의 경우는 불안정 영역으로 Fig. 3(b)와 (c)에서 보면 동적 반응이 0 에 가까울 때는 불안정성 때문에 동적 반응이 지수적으로 증가하다가 비선형 효과에 의해 다시 그 값이 줄어 들고 시간이 지남에 따라서 일정 진폭을 갖는 안정된 주기해로 수렴함을 보이며, 또한 그 최대 진폭과 Fig 2 의 B 점과 C 점의 결과가 일치하는 것도 확인 할 수 있다. Fig. 3(d)는 주파수가 안정 영역의 Fig. 2 의 D 점으로 동적 반응이 시간이 지남에 따라 0 에 다시 수렴함을 볼 수 있다. 대표적인 비선형 시스템의 주파수 응답특성을 나타내

는 Fig. 2(b)의 결과는 만일 주파수가 아래로부터 올라갈 때는 0.98 까지 안정된 반응을 보이다 그보다 커지면 진폭이 도약하는 현상을 보여주나 다시 내려올 때는 0.98 이하로 감소해도 진폭이 계속 증가하는 현상을 나타내는 것이다. 이러한 비선형 특성은 참고문헌(6)에서 보여주는 선형 모델에 의한 결과들과 비교해볼 때 커다란 차이를 보인다. Fig.4 는 선형 모델의 안정성 해석 결과를 보여주는데 이에 따르면 첫번째나 두번째 고유진동수의 2 배의 위치에서는 항상 발산하는 동적 반응이 발생해야 하는 것으로 예측하고 있다 이는 본 논문에서 제시된 비선형 효과를 고려한 모델링에 의한 수렴된 결과들을 얻는 것과 상당한 차이를 보이는 것을 알 수 있다.

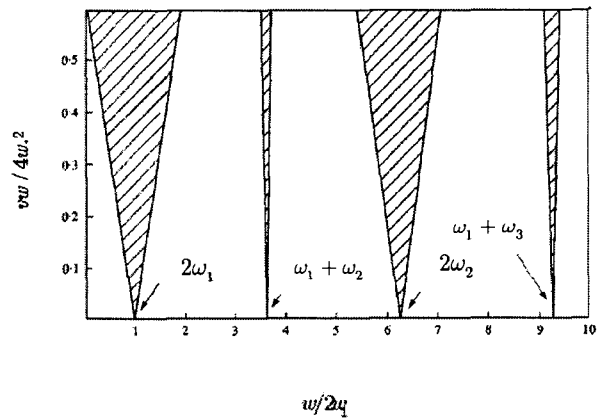


Fig. 4 Dynamic stability diagrams

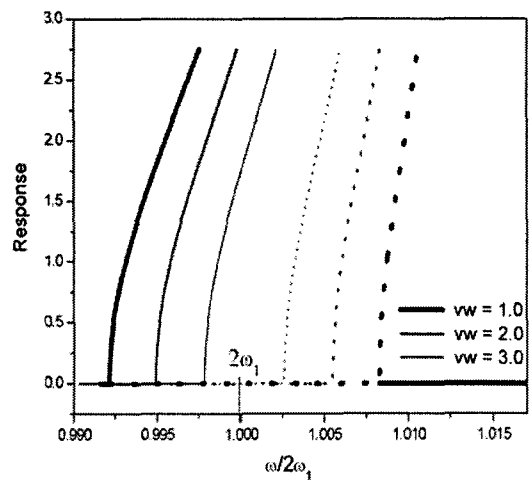


Fig. 5 Frequency response curves with various values of vw

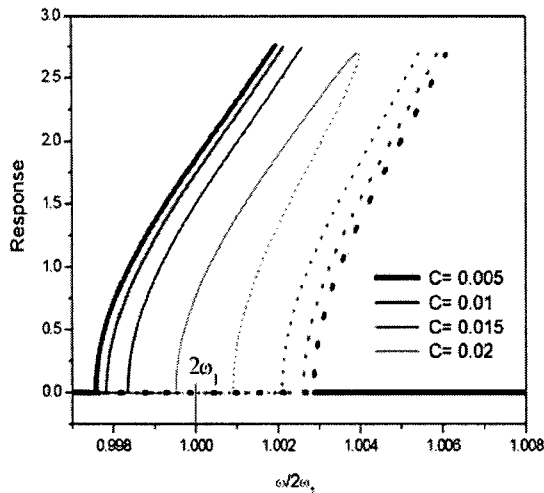


Fig. 6 Frequency response curves with various values of damping constants

Fig. 5 는 왕복운동 주파수가 첫 번째 고유진동수의 2 배 근처에 있을 때 가속도의 진폭변화에 따른 주파수 응답곡선 이다. 그림에서 보면 왕복 가속도 진폭이 점차 커짐에 따라 불안정 영역이 저주파 영역으로 확대되어 이동함을 알 수 있다.

Fig. 6 은 왕복 주파수가 첫 번째 고유진동수의 2 배 근처의 값이 될 때 감쇠 크기의 변화에 따른 주파수 응답 곡선이다. 감쇠의 크기가 작아질수록 주파수 응답곡선이 역시 좌측으로 이동하는 것을 확인할 수 있었다. 그러나 그 변화 크기는 진폭에 의한 영향보다 미소함을 확인할 수 있었다.

4. 결론

본 논문에서는 축방향 왕복운동을 하는 외팔보의 비선형 모델링을 복합 변형변수들을 이용하여 유도하고, 이를 이용해서 동적 해석 및 주파수 응답특성 해석을 수행하였다. 왕복 운동 주파수가 첫 번째와 두 번째 고유진동수의 2 배 근처에서 불안정 영역이 존재함을 주파수 응답 곡선을 통해 알 수 있었으나 이들은 선형 모델링에서 얻어진 결과들과는 큰 차이가 있음을 확인할 수 있었다. 또한 왕복 운동의 크기가 증가할수록 주파수 응답 특성곡선들이 좌측으로 이동함을 확인할 수 있었으며 감쇠의 크기가 감소하는 경우도 그 정도는 상대적으로 미소하나 역시 주파수 응답특성 곡선들이 좌측으로 이동하는 것을 확인할 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계기술센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Leissa, A., 1981, "Vibration Aspects of Rotating Turbomachinery Blades," Applied Mechanics Reviews, Vol.34, pp.629-635.
- (2) Rao, J., 1987, "Turbomachine Blade Vibration," Shock and Vibration Digest, Vol.19, pp.3-10.
- (3) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1978, " Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 10, pp. 139~151.
- (4) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, " Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," J. of Sound and Vibration, 181(2), pp. 261~278.
- (5) Yoo, H. and Chung, J., 2001, " Dynamics of Rectangular Plates Undergoing Prescribed Overall Motions," J. of Sound and Vibration, 239(1), pp. 123~137.
- (6) Hyun, S. and Yoo, H., 1999, " Dynamic Modelling and Stability Analysis of Axially Oscillating Cantilever Beams," 228(3), pp.543-558.
- (7) Nayfeh, A., and Mook, D., 1979, Nonlinear Oscillation, John Wiley & Sons, Inc.
- (8) Crespo da Silva, M. R. M., and Glynn, C. C., 1978, " Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. I. Equations of Motion," Journal of Structural Mechanics, Vol. 6, pp. 437~448
- (9) Kim, J., Hyun, S. and Yoo, H., " Nonlinear Modeling and Dynamic Analysis of Flexible Structures Undergoing Overall Motions Employing Mode Approximation Method, KSME International J. 16(7), pp.896-901.
- (10) E. J. Doedel, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Yuri A. Kuznetsov, B. Sandstede, X. J. Wang, AUTO97 : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations, 1997, (www.indy.cs.concordia.ca/auto).