

압전 공진 선티회로가 부착된 빔의 동적 모델링

Dynamics Modeling of Beams with Shunted Piezoelectric Elements

박철휴* . 박현철*

Chul H. Park and Hyun C. Park

Keywords: piezoelectric material (압전재료), shunt circuit (선티회로), dyanmic modeling (동적 모델링), vibration control (진동제어)

ABSTRACT

General modeling of a resonant shunting damper has been made from piezoelectric sensor/actuator equation. It is found that an additional damping, which is augmented to a system, is generated by the shunt damping effect. The transfer function of the tuned electrical absorber is derived for both series and parallel shunt circuit. The governing equations and associated boundary conditions are derived using Hamilton's Principle. The shunt voltage equation is also derived from the charge generated in PZT due to beam vibration. The frequency response function of the obtained mathematical model is compared with that of the tuned electrical absorber and experimental work. The vibration amplitude is reduced about 15 dB at targeted second mode frequency.

1. 서론

압전 선티 회로를 통한 구조체의 진동 제어는 경량화, 설치의 용이함, 그리고 뛰어난 성능으로 인해 최근에 많은 연구가 수행되어지고 있다. 점탄성체를 이용한 기계적 수동 감쇠 방법과 비교하여 압전 선티를 이용한 전기적 수동 감쇠 방법은 무게가 가벼울 뿐만 아니라 온도에도 덜 종속적이다[1]. 선티 회로의 종류에는 저항성(resistive), 공진성(inductive), 축전성(capacitive) 그리고 다이오드(diode)를 이용한 여러 종류의 선티 회로가 있다[2]. 각각의 선티 회로는 개발 되어진 서로 다른 특성들을 가지고 있다. 본 논문에서는 저항기와 인덕터가 직렬과 병렬로 연결된 공진 선티 회로가 빔의 진동 저감을 위해 적용된다. 그림 1에서 보여진 것과 같이 축전기로 모델링된 PZT의 두 외부 터미널은 (a)직렬 또는 (b)병렬로 연결된 유도기와 저항기 선티 회로와 연결되어 있다. 진동하는 구조물에 부착된 압전체는 압전 효과에 의해 기계적 에너지를 전기적 에너지로 변환시켜 준다. 이 전기적 에너지는 전기적 공진 주파수가 기계적 주파수와 일치할때 선티 저항을 통하여 Joule heating 으로 소산된다.

본 논문에서는, 공진 선티 회로 감쇠기에 대한 일반적인 모델링을 선티 감쇠 효과에 의해 발생하는 부가적인 감쇠항을 표현함으로써 나타내어 진다.

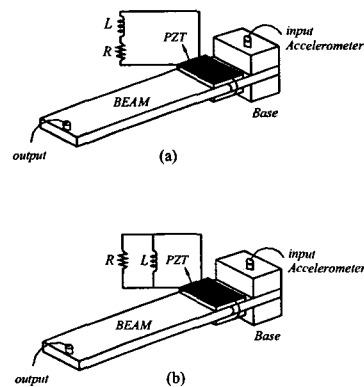


Fig. 1. Schematic drawings of experimental setup for (a) a series R-L and (b) a parallel R-L shunt circuit.

* 포항공대 기계공학과

email: drparkch@postech.ac.kr

튜닝된 전기적 흡진기의 전달 함수는 직렬과 병렬 R-L 선트 회로에 대해 유도 되어지고, 한 쌍의 PZT 를 붙인 외팔보는 공진 감쇠 능력을 이론적으로, 실험적으로 증명하는데 이용되어진다.

2. 공진 선트 회로의 일반적인 모델링

한 쌍의 압전 작동기/감지기의 방정식[3]은 부가적인 선트 감쇠 행렬의 유도에 사용되어진다.

$$\text{작동기 방정식: } M\ddot{w} + C\dot{w} + Kw = f_{ext} + \theta V_{SH} \quad (1)$$

$$\text{감지기 방정식 } q = \theta^T w + C_p V_{SH} \quad (2)$$

여기서 M , C , 와 K 는 일정한 전기장에서의 압전/보 시스템의 질량, 감쇠 그리고 탄성 행렬이다. 탄성 행렬은 구조체의 탄성 계수와 단락회로에서의 압전 탄성 계수로 구성 되어진다. 즉, $K = K_s + K_p^E$ 이다. 감지기 방정식에서, q 는 압전 전하 행렬이고 θ 는 전기기계적 coupling 행렬이다. 전류 방정식은 감지기 방정식을 미분 함으로써 얻을 수 있다. 그림 2로부터 선트 전압 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_{SH} &= -Z_{SH} I \\ &= -Z_{SH} (\theta^T \dot{w} + C_p^T \dot{V}_{SH}) \\ &= -Z_{SH} \theta^T s w - Z_{SH} C_p^T s V_{SH} \end{aligned} \quad (3)$$

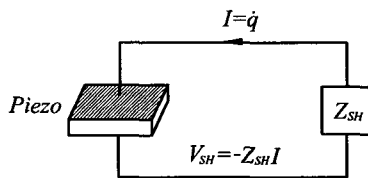


Fig.2 Feedback current into a PZT due to shunt impedance.

여기서 s 는 라플라스 파라미터이다. 방정식(3) 으로부터 선트 전압의 다음과 같이 정의되어진다.

$$V_{SH} = \frac{-Z_{SH} \theta^T s w}{1 + Z_{SH} C_p^T s} \quad (4)$$

방정식(4)를 작동기 방정식(1)을 대입하면 선트 시스템의 지배 방정식은 선트 감쇠 행렬이 추가된 형태로 나타내어 질 수 있다.

$$Ms^2 w + \left(C + \frac{Z_{SH} \theta \theta^T}{1 + Z_{SH} C_p^T s} \right) s w + Kw = f_{ext}(s) \quad (5)$$

방정식(5)에서 양쪽을 시스템 탄성계수 K 로 나누어주면

$$\left(\frac{M}{K} s^2 + \frac{C}{K} s + 1 + \frac{\theta \theta^T Z_{SH} C_p^T s}{C_p K (1 + Z_{SH} C_p^T s)} \right) w(s) = \frac{f_{ext}(s)}{K} \quad (6)$$

선트된 시스템의 전달 함수를 얻기 위해 무차원 파라미터들[4]을 사용하여 방정식(6)을 다시 적으면,

$$\frac{w}{w_{st}} = \frac{1 + \hat{Z}}{\left(1 + \hat{Z} \right) \left(\gamma^2 + 2\xi\gamma + 1 \right) + K_{31}^2 \hat{Z}} \quad (7)$$

여기서 γ 는 무차원 진동수이며, K_{ij} 는 일반화된 전기-기계적 coupling 상수이다. 그리고 $\hat{Z} = Z_{SH} C_p^T s$.

2.1 직렬 유도기-저항기 선트 회로

직렬 R-L 회로의 임피던스는 그림 3(a)로부터 얻어진다

$$Z_{SH}^{se} = Ls + R \quad (8)$$

일반화 되어진 직렬 R-L 선트의 공진 임피던스, \hat{Z} 는 다음과 같이 유도되어진다.

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= Z_{SH}^{se} C_p^T s = \frac{s}{\omega_n^E} Z_{SH}^{se} C_p^T \omega_n^E \\ &= \gamma^2 LC_p (\omega_n^E)^2 + RC_p \omega_n^E \gamma = \frac{1}{\delta^2} (\gamma^2 + r\gamma\delta^2) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $\delta = \frac{1}{\sqrt{LC_p \omega_n^E}}$ 와 $r = RC_p \omega_n^E$. 식(7)에

식(9)의 \hat{Z} 를 넣으면 고유의 구조체 선트 감쇠를 가진 시스템의 최종 전달 함수를 얻을 수 있다.

$$\frac{w}{w_{st}} = \frac{(\delta^2 + r\gamma\delta^2 + \gamma^2)}{(\delta^2 + r\gamma\delta^2 + \gamma^2) (\gamma^2 + 2\xi\gamma + 1) + K_{31}^2 (\gamma^2 + r\gamma\delta^2)} \quad (10)$$

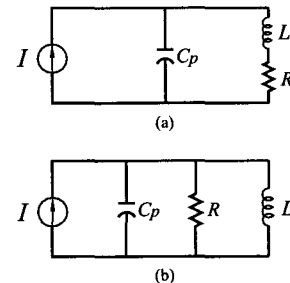


Fig.3 Circuit models of piezoceramic with a series R-L and a parallel R-L shunt circuit.

2.2 병렬 유도기-저항기 셉트 회로

위의 직렬 경우처럼, 병렬 R-L 셉트 회로에 대한 전달함수 식을 구할 수 있다. 병렬 R-L 셉트 회로의 임피던스는 라플라스 형태로 다음과 같이 표현된다.

$$Z_{SH}^{pa} = \frac{LRs}{Ls + R} \quad (11)$$

병렬 R-L 셉트의 공진 임피던스, \hat{Z} 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= Z_{SH}^{pa} C_p s = \frac{s}{\omega_n^E} Z_{SH}^{pa} C_p \omega_n^E \\ &= \frac{\gamma r L s}{L s + R} = \frac{\gamma^2 r L \omega_n^E}{L \omega_n^E \gamma + R} = \frac{\gamma^2 r}{\gamma + r \delta^2} \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)를 식(7)에 대입하면 병렬 R-L 압전 셉트 회로의 전달함수를 얻을 수 있다.

$$\frac{x}{x^{st}} = \frac{\gamma^2 r + \gamma + r \delta^2}{(\gamma^2 r + \gamma + r \delta^2)(\gamma^2 + 2\xi\gamma + 1) + K_{31}^2(\gamma^2 r)} \quad (13)$$

3. 압전/보 시스템의 운동방정식

공진 셉트 회로가 부착된 외팔보의 진동을 묘사하는 수학적 모델은 해밀턴 원리를 이용하여 구할 수 있다. 직렬과 병렬로 연결된 공진 셉트 회로가 부착된 압전/보의 도식은 그림 1 에 나타내었다. 보의 길이는 l_b , 폭은 b_b , 두께는 h_b , 영률은 E_b , 질량밀도는 ρ_b 이다. PZT-5H 의 두께는 h_p , 일정한 전기장에서 측정된 영률은 E_p^E , 길이 방향의 압전 상수는 d_{31} 이다. 압전/보 시스템의 운동에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = T_b + 2T_p \quad (14)$$

여기서 $T_b = \frac{1}{2} \int_0^{l_b} \rho_b A_b \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx$

$$T_p = \frac{1}{2} \int_0^{l_b} \rho_p A_p \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 [H(x-x_1) - H(x-x_2)] dx.$$

그리고 압전/보 시스템의 변형률 에너지는 다음과 같이 나타내어진다.

$$U = U_b + 2U_p \quad (15)$$

여기서 $U_b = \frac{1}{2} \int_0^{l_b} E_b I_b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx$

그리고 $U_p = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon^T \sigma + ED) dV$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{l_b} \left[E_p^E I_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2bh_{31} D z_n \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_p \beta_{33} D^2 \right] \\ &\quad \times [H(x-x_1) - H(x-x_2)] dx \end{aligned}$$

여기서 H 는 Heavyside 함수이다. 또한 A_b 와 A_p 는 각각 보와 압전층 단면의 넓이고, I_b 와 I_p 는 각각의 층에 대한 중립축에서의 면적 관성 모멘트이다. 위 식에서 $(x_2 - x_1)$ 는 PZT 패치의 길이를 나타낸다. 아래 첨자 b 와 p 는 보와 압전 세라믹을 각각 나타낸다. 가상 일은 세 개의 항으로 구성되는데, 첫번째 항은 압전 공진 감쇠에 의한 일이고 두번째 항은 외부 일에 의한 것이며 세번째 항은 기본 보의 감쇠에 의한 것이다.

직렬의 경우,

$$\begin{aligned} \delta W &= (Ls + R) \dot{Q} \delta Q \Delta H + \int_0^{l_b} f(x,t) \delta w dx \\ &\quad - \int_0^{l_b} c_b \frac{\partial w}{\partial t} \delta w dx \end{aligned} \quad (16)$$

병렬의 경우,

$$\begin{aligned} \delta W &= \left(\frac{LRs}{Ls + R} \right) \dot{Q} \delta Q \Delta H + \int_0^{l_b} f(x,t) \delta w dx \\ &\quad - \int_0^{l_b} c_b \frac{\partial w}{\partial t} \delta w dx \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 ΔH 는 $[H(x-x_1) - H(x-x_2)]$ and Q 는 외부 힘에 의해 발생하는 전하이다.

해밀턴 원리를 적용함으로써 셉트 회로에 연결된 보/압전체의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta H = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = 0 \quad (18)$$

여기서 t_1 과 t_2 는 시간영역에서 시작과 끝이고 δ 가상 일의 변수이다.

$$\begin{aligned} &\rho_b A_b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + c_b \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + E_b I_b \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \\ &+ 2 \left[\rho_p A_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + E_p^E I_p \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \right] [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \\ &= f(x,t) - b_p h_{31} D_3 h_p (h_b + h_p) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \right) \end{aligned} \quad (19)$$

외팔 보의 종 방향의 운동은 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) W_i(t) = [\psi]^T [W] \quad (20)$$

여기서

$$\psi_i(x) = \cos \beta_i x - \cos \beta_i x - \sigma_i (\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x)$$

여기서 상수 σ_i 는 모드 형상 계수이다[5]. 모드 형상 함수를 운동 방정식(19)에 적용하면 압전/보 시스템의 다음과 같이 이산화 된 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$M\ddot{W}(t) + C_b \dot{W}(t) + KW(t) = f_{ext} + f_{piezo} \quad (21)$$

여기서 외팔 보의 진동 때문에 PZT 패치에 의해 발생된 전하는 전기적 변위 {D}로부터 결정된다.

$$Q(t) = \int_A D \, dA \quad (22)$$

$$\text{그리고} \quad \{D\} = [d]^T \{T\} + [\varepsilon]^T \{E\}. \quad (23)$$

[d], {T}, [ε] 그리고 {E} 는 각각 압전 변형률 상수, 응력, 유전 상수, 적용된 강성 행렬을 나타낸다[6]. 모드형상 함수를 식(22)에 대입하면 압전 센서의 출력은 다음과 같다.

$$Q_i(t) = (C_0 D_n + C_p^T V_{SH}) [H(x-x_1) - H(x-x_2)] \quad (24)$$

여기서

$$C_0 = d_{31} E_p^E b_p \left(\frac{h_b}{2} + h_p \right)$$

$$D_n = \int_0^l \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} [H(x-x_1) - H(x-x_2)] dx$$

직렬과 병렬의 R-L 션트 전압은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V_{SH}^{sc} = - \frac{Ls + R}{LC_p s^2 + RC_p s + 1} C_0 D_n \dot{W}_i(t) \quad (25)$$

$$V_{SH}^{pa} = - \frac{LRs}{LRC_p s^2 + Ls + R} C_0 D_n \dot{W}_i(t) \quad (26)$$

이러한 션트 전압을 식 (21)에 있는 압전 힘, f_{piezo} , 에 대입하면 최종적인 지배방정식이 주어진다.

$$M\ddot{W}(t) + C_{total} \dot{W}(t) + KW(t) = f_{ext} \quad (27)$$

여기서 $C_{total} = C_b + f_{piezo}$. 식(27)은 식(5)와 일치함을 알 수 있다.

4. 실험

두개의 서로 다른 공진 션트 회로의 특성을

설명하기 위하여 실험을 수행하였다. 압전 세라믹(PZT 5H, 2.54cm x 4.5cm) 한 쌍을 기본 구조물인 알루미늄 보의 양쪽 면에 에폭시를 이용하여 부착하였다. 이때 알루미늄 보의 크기는 길이 20 cm 이고 폭은 2.54 cm 이다. 시스템의 응답을 측정하기 위해 보의 자유단 끝 중앙에 가속도계를 위치하였다. 압전 세라믹은 두께 방향으로 극화 되었으며 transverse 모드에서 작동하기 위해서 길이 방향으로 늘어난다. 보는 접지되어 있으며 압전 세라믹의 윗면과 아래면에서 반대의 전압을 생성시키기 위해서 평행하게 연결되어 있다. 이러한 형상은 아래면의 압전 세라믹이 늘어나고 윗면의 압전 세라믹이 줄어들음에 의해서 보에 제어 모멘트를 유발시킨다. 표 1은 알루미늄 보와 압전 세라믹의 물성치를 나타낸다.

Table1. Physical and geometrical properties of the beam and PZT-5H

	영률 (pa)	Density (Kg/m ³)	포아송비 (ν)	두께 (m)
Al.	7.1E10	2700	0.33	0.8E-3
PZT -5H	6.2E10	7800	0.3	2.6E-4

스펙트럼 분석기의 내부 함수 발생기를 이용하여 0.125Hz의 스펙트럼 해상도를 가지는 1 Hz ~ 200 Hz의 랜덤 신호(Random Base Acceleration)를 생성하였다. 이 랜덤 신호는 파워 증폭기를 통해 구동 되는 electro-magnetic shaker에 고정된 보를 가진 시커 준다. 입력신호는 APS shaker에 부착되어 있는 가속도계로 측정한다. 보의 출력신호 또한 가속도계를 이용하여 측정하게 된다. 이 신호는 공진 주파수를 결정하기 위하여 스펙트럼 분석기로 보내여진다. 이러한 과정으로 입력신호와 출력신호의 주파수 응답 함수를 얻을 수 있다.

5. 결 과 및 토 의

직렬 및 병렬 공진 션트 감쇠기는 모두 외팔 보의 두번째 모드를 감쇠 시키는데 실험적으로 적용하였다. 그림 4(a)는 직렬 R-L 션트 회로에 대한 실험 결과를 보여주고 있다. 진동의 크기가 션트 저항이 감소함에 따라 같이 줄어들고 있다. 이와 반대로 병렬 R-L회로에서는 저항이 증가함에 따라 진동 감쇠가 증가하는 것을 그림 4(b)에서 보여주고 있다. 이러한 현상들은 직렬, 병렬 공진 션트 회로의 특징을 잘 나타내고 있다. 직렬 R-L 션트

회로에서 셉트 저항 값이 무한대로 증가하게 되면 전류는 흐르지 못하게 된다. 이것은 개회로로 간주할 수 있다. 그러나, 병렬 셉트 회로에서는 저항 값이 영으로 가면 에너지 소산이 없는 개회로임을 알 수 있다. 주파수 응답 함수에서 피크점이 평편해질 때 이 때를 최적의 상태로 정한다. 그리고 전자적 감쇠가 증가함에 따라 두개의 피크점이 동시에 올라가게 되는데, 이것은 기계적 흡진기의 경우와 같다. 그림 5로부터 수동적 전기적인 셉트 감쇠는 개회로에서의 최고 진동 크기로부터 15dB의 감소를 얻을 수 있었다. 그림 5(a)와 (b)는 직렬[식(10)] 과 병렬[식(13)] 셉트회로에 대한 일반적인 모델의 전달함수를 보여준다.

Table 2. Comparison between theoretical and experimental shunting resistor values

Series R-L Shunt Circuit		
Experiment	Tuned Electrical Model (10)*	Theoretical Model
Open (1)**	500,000 Ω	500,000 Ω
9,190 Ω (2)	9,190 Ω	9,500 Ω
3,553 Ω (3)	3,553 Ω	4,000 Ω
1,359 Ω (4)	2,500 Ω	2,500 Ω
687 Ω (5)	1,500 Ω	1,500 Ω

Parallel R-L Shunt Circuit		
Experiment	Tuned Electrical Model (13)*	Theoretical Model
Open (1)**	1,000 Ω	1,000 Ω
8,030 Ω (2)	8,030 Ω	8,030 Ω
18,430 Ω (3)	18,430 Ω	18,430 Ω
48,100 Ω (4)	40,100 Ω	35,000 Ω
98,300 Ω (5)	75,300 Ω	70,500 Ω

* (10) and (13) are equation numbers in this paper.

** (1), (2), (3), (4), and (5) are the numbers in Fig. 4, 5, and 6.

압전/보 시스템의 지배방정식(27)의 주파수 응답함수는 그림 6에 나타내었다. 이론적인 모델에 의해서 예측되는 셉트 저항 값들은 실험에 의해 얻어진 값과 거의 일치한다. 표 2은 셉트 저항의

이론값과 실험값의 비교를 나타낸다. 실험과 조정된 전기적인 흡진기 모델사이의 오차 범위는 평균적으로 7%의 값을 가지며, 실험과 가정된 직렬방법을 사용한 이론적인 해석사이의 오차범위는 15% 미만이다.

6. 결론

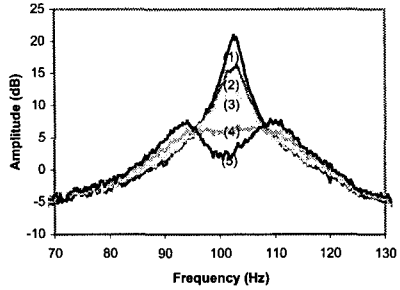
전기적인 흡진기의 일반적인 모델링은 압전/보 시스템의 운동 방정식에 부합할 수 있는 추가적인 감쇠를 나타냄으로써 표현되었다. 셉트된 보/압전체의 수학적 모델은 변위 형상함수를 사용하여 외팔형태의 시스템의 급힘 진동을 나타내기 위해서 유도 되었다. 셉트 진압은 보의 진동으로 인한 압전 세라믹에 의해서 발생하는 전하로부터 유도 되며, 직렬 R-L과 병렬 R-L 공진 셉트 회로의 효과는 이론적, 실험적으로 비교, 검증되었다. 진동의 효과적인 감쇠는 직렬 R-L 셉트회로의 셉트 저항값을 감소시킴으로써 얻어졌고 병렬 R-L 셉트 회로의 셉트 저항값을 증가시킴으로써 얻어졌다.

후 기

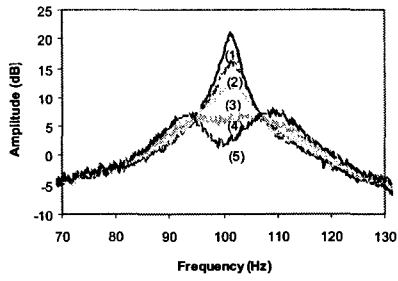
저자는 이 연구를 수행함에 있어서 두뇌한국21 프로그램으로부터 재정적인 지원을 받았음.

REFERENCES

1. C. H. Park and D. J. Inman 1998, "A Comparison of Passive Electronic and Mechanical Damping Treatments", Int. Conf. on Adapt. Struct. Tech. pp. 94-104..
2. G. Lesieutre, 1998, "Vibration Damping and Control using Shunted Piezoelectric Materials", Shock Vib. Digest Vol. 30, pp. 187-95..
3. N. Hagood, W. Chung and A. von Flotow, 1990, "Modeling of Piezoelectric Actuator Dynamics for Active Structural Control", J. Intell. Mater. Syst. Struct. 1, 327-54.
4. N. Hagood and A. von Flotow, 1991, "Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks", J. of Sound Vib. Vol. 146, pp. 243-68..
5. Inman D. J., 1996, Englewood Cliffs: Prentice-Hall Engineering Vibration.
6. IEEE Std 176-1978, IEEE Standard on Piezoelectricity.

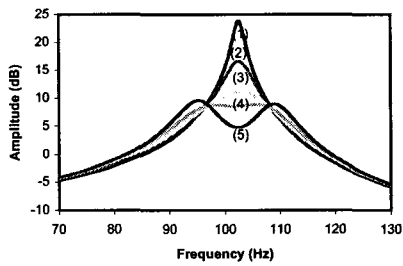


(a)

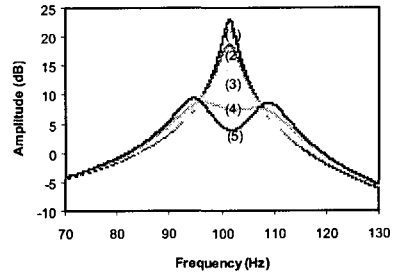


(b)

Fig. 4. Experimental transfer response of the piezo/beam system: (a) a series R-L and (b) a parallel R-L shunt circuit.

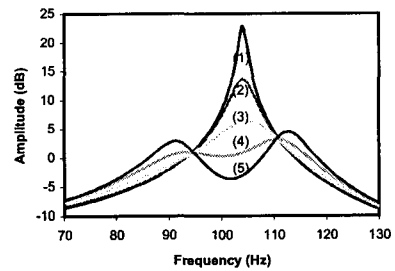


(a)



(b)

Fig. 5. Transfer response of the tuned electrical absorber by using equations (10) and (13): (a) a series R-L and (b) a parallel R-L shunt circuit.



(a)

Fig. 6. Analytical transfer response function by using equation (27): (a) a series R-L and (b) a parallel R-L shunt circuit.