

Shannon 엔트로피 개념을 이용한 가보 웨이블릿 최적 형상의 선정

The Selection of the Optimal Gabor Wavelet Shape Factor Using the Shannon Entropy Concept

홍진철* · 김윤영**

Jin-Chul Hong and Yoon Young Kim

Key Words : Gabor wavelet transform (가보 웨이블릿 변환), Optimal shape factor (최적 형상지수), Shannon entropy (샤논 엔트로피)

ABSTRACT

The continuous Gabor wavelet transform (GWT) has been utilized as a useful time-frequency analysis tool to identify the rapidly-varying characteristics of some wave signals. In the application of GWT, it is important to select the Gabor wavelet with the optimal shape factor by which the time-frequency distribution of a signal can be accurately estimated. To find the signal-dependent optimal Gabor wavelet shape factor, the notion of the Shannon entropy which measures the extent of signal energy concentration in the time-frequency plane is employed. To verify the validity of the present entropy-based scheme, we have applied it to the time-frequency analysis of a set of elastic bending wave signals generated by an impact in a solid cylinder.

1. 서론

시간-주파수 해석 기법은 신호를 각 시간대에 따른 주파수의 성분으로 표현하여 분석하는 방법으로서 과도진동, 파동 등과 같이 시간에 따라 주파수 성분이 변하는 신호를 해석하는데 유용하다. 대표적인 기법으로 단시간 푸리에 변환 (STFT), 위그너빌 분포 (WVD), 웨이블릿 변환 (WT) 등이 있다. 웨이블릿 변환은 단시간 푸리에 변환이나 위그너빌 분포와는 달리, 주파수 대역의 크기 대 주파수의 비가 항상 일정하도록 창의 크기가 변하기 때문에, 주파수의 고저에 따른 신호의 변화를 보다 유연하게 표현할 수 있다. 이런 이유로 해서 시간에 따라 급격히 변화하는 신호를 해석하는데 효과적으로 사용되는데, 그 대표적인 예가 초음파를 이용한 결함 진단 분야이다.^[1]

그런데 어떤 신호의 시간-주파수 해석시 가장 중요한 점은 시간에 따라 변화하는 신호의 에너지를 시간-주파수 영역에서 가능한한 국소적으로 표현하여 해상도를 증진시키는 것이다. 예를 들어, Douglas 등^[2]은 고차 통계법 (higher-order statistics)를 이용하여, 단시간 푸리에 변환에 대하여 창함수의 크기를 신호의 특징에 적합하도록 변화시키는 방법을 연구하였고, 위그너빌 분포에서 있어서는 심각한 간섭효과를 해결하기 위해 Choi-William 커널 (kernel) 함수가 제안되기도 했다.^[3] 웨이블릿 변환에 있어서는 비록 분석력이 우수하긴 하지만, 보다 신호를 국소적으로 표현하고 에너지의 집중도를 높이기 위해 주어진 신호에 적합한 최적의 웨이블릿 함수를 설계하는 연구에 관한 관심이 늘어나고 있다.

Heisenberg 의 불확실성 원리 (Uncertainty principle)의 관점에서 시간-주파수 평면에서 분해능이 가장 우수한 가보 (Gabor) 웨이블릿은 급격히 변화하는 신호의 시간-주파수 해석을 위해 널리 사용되어왔다. 최근에 Kim^[4,5] 등은 광대역 가진에 의해 발생하는 탄성파를 이용한 결함진단 기법을 개발하기 위해, 가보 웨이블릿을 이용한 바 있다. 특히 가보 웨이블릿의 형상을 지배하는 무차원 형상 지수

* 서울대 기계항공공학부 대학원, 멀티스케일 설계연구단
E-mail : jchong@idealab.snu.ac.kr
Tel : (02) 880-1688, Fax : (02) 872-5431
서울대 기계항공공학부 교수,
** 멀티스케일 설계연구단장

(shape factor)를 잘 선정하지 않으면 정확한 결함진단을 할 수 없다는 사실을 강조한 바 있다. 이 연구에서는 특정 범위 내에서 시행 착오법으로 최적의 형상 지수값을 찾아, 그 형상 지수값을 갖는 가보 웨이블릿 변환의 우수성을 실험적으로도 검증하였다.

본 논문에서는 가보 웨이블릿의 최적 형상 지수를 시행 착오법이 아닌, 체계적인 방법으로 찾아내는 기법을 연구하고자 한다. 이를 위해 Shannon 엔트로피 개념^[6]을 도입하여 주어진 신호의 시간-주파수 에너지 집중도를 최대화함으로써 해상도를 증진시키는 방법을 제안하였다. 엔트로피에 기반한 제안된 방법의 유효성 검증을 위해 광대역 굽힘파(bending wave) 가진에 의한 보에서의 분산 현상의 규명 과 결함 진단 문제에 적용하였다. 본 연구에서 제시한 최적의 형상 지수를 갖는 가보 웨이블릿을 적용한 결과 크게 개선된 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다.

2. 연속 가보 웨이블릿 변환 (GWT)

2.1 연속 웨이블릿 변환

연속 웨이블릿 변환은 신호의 국소적 변화를 추출하는데 매우 효과적인 시간-주파수 기법이다. L_2 공간의 신호 $f(t)$ 에 대하여, 연속 웨이블릿은 변환은 다음과 같이 정의된다.^[7]

$$\begin{aligned} Wf(u, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{u,s}^*(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt \end{aligned} \quad (1)$$

식 (1)에서 $\psi(t)$ 는 다음과 같은 허용조건을 만족하는 모 (mother) 웨이블릿 함수이다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2)$$

여기서 $\hat{\psi}(\omega)$ 는 모 웨이블릿의 푸리에 변환에 해당한다. 식 (2)가 성립하기 위해서 최소한 다음의 조건이 만족되어야 한다.

$$\hat{\psi}(\omega) = 0, \quad \text{즉} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3)$$

함수 $\psi_{u,s}(t)$ 는 모 웨이블릿 $\psi(t)$ 를 스케일 파라미터 s 로 스케일링(scaling) 하고, 위치 이동(translation) 파라미터 u 로 이동하여 얻게 된다.

$\hat{\psi}(\omega)$ 의 중심 주파수를 η , $\psi(t)$ 의 시간과, 주파수의 지지구간을 각각 σ_t, σ_ω 라고 한다면, $\psi_{u,s}(t)$ 의 시간, 주파수

지지구간은 각각 $s\sigma_t, \sigma_\omega/s$ 가 되며, 점 $(u, \eta/s)$ 의 국소 영역에서 신호를 분석하게 된다.

정규 스칼로그램(Normalized scalogram)은 웨이블릿 변환을 이용하여 신호의 국소적인 시간-주파수 에너지의 강도를 표현한 것인데, 다음과 같이 표시된다.

$$N_s f(u, s) = \frac{|Wf(u, s)|^2}{s} \quad (4)$$

이 경우 $N_s f(u, s)$ 가 극대점이 되는 곳에서 $f(t)$ 의 순간 (instantaneous) 주파수에 대한 정보를 파악할 수 있다.

2.2 가보 웨이블릿과 형상 지수

가보 웨이블릿은 시간-주파수 공간에서 국소성이 가장 우수하고, 적절한 파라미터의 선정에 의해 시간에 대한 지지구간을 조절할 수 있다는 장점 때문에 연속웨이블릿 변환에 광범위하게 적용되는데, 대표적인 것으로 Morlet 웨이블릿을 들 수 있다.

가보 웨이블릿은 가우시안(Gaussian) 함수가 변조된 다음의 형태로 주어진다.

$$\psi(t) = \frac{1}{(\sigma^2 \pi)^{1/4}} e^{-t^2/2\sigma^2} e^{i\eta t} \quad (5)$$

여기서 η 는 $\hat{\psi}(\omega)$ 의 중심 주파수이며, σ 는 $\psi(t)$ 의 퍼짐 (spread)을 의미하므로, $\psi(t)$ 의 형상은 σ 와 η 값에 따라 변화하게 된다. 따라서 그 값들을 적절히 선택함으로써 시간-주파수 해석의 성능을 증진시킬 수 있다.

Kim 등^[45]은 가보 웨이블릿의 형상을 결정하는 지수로써 다음과 같은 무차원의 형상 지수 개념을 소개하였다.

$$G_s = \sigma \eta \quad (6)$$

식 (6)의 형상 지수는 시간-주파수 평면에서의 분해능에 큰 영향을 미치므로, 결과적으로 웨이블릿 변환의 성능을 좌우한다. 일반적으로 G_s 는 식(2)의 허용 조건을 만족하기 위해서 상당히 큰 값을 유지해야 하지만, 지나치게 클 경우 시간 분해능이 저하되고 계산 시간이 길어진다. 하지만, 그 값이 상대적으로 작을 경우 허용 조건이 만족되지 않아 웨이블릿 변환 결과의 신뢰성이 떨어지게 된다. 따라서 일정 범위 내에서 G_s 값을 선정하는 것이 타당한데, 본 연구에서는 실제로 의미가 있는 [3.0, 5.5]의 범위 내에서 최적의 G_s 값을 찾아내는 것을 목표로 하였다. 참고로 흔히 사용되는 Morlet 웨이블릿은 대략 $G_s = 5.0$ 에 해당한다.

3. 시간-주파수 국소화와 Shannon 엔트로피

시간-주파수 평면에서 분해능 (resolution)은 기저 함수가 시간과 주파수 영역에서 갖는 퍼짐 (spread) σ_t, σ_ω 의 곱으로 표현되는데, 이렇게 정의되는 국소적인 분석 영역을 Heisenberg 박스라고 하며, 박스의 크기는 함수에 따라 일정하게 정해진다. 따라서, 시간-주파수 영역에서 임의의 신호를 보다 국소적으로 해석하기 위해서는 기저함수가 제공하는 박스의 크기 내에서 그 시간 혹은 주파수의 지지구간을 신호의 특성에 맞게 조절해주어야 한다. 가보 웨이블릿 함수는 불확실성 원리의 관점에서 박스의 크기가 최소가 되므로 시간-주파수의 국소적 분석력이 매우 우수하다. 하지만, 앞서 언급된 형상 지수 G_s 를 잘 조절하지 않는다면 주어진 신호를 정확하게 분석할 수 없다.

시간-주파수 공간 위에서 에너지 집중도 및 국소성은 신호가 기저함수에 투영(projection)될 때 나타나는 계수들의 분포로 추정할 수 있다. 만약, 기저함수가 신호의 특성을 보다 잘 반영하면, 그 신호는 적은 수의 기저함수로도 표현될 수 있으므로, 에너지 집중도가 높아지게 된다. Shannon 엔트로피 함수는 이런 계수들의 분포를 통하여 신호와 기저 함수와의 상관 관계 및 에너지 집중도를 측정하는 데 유용하게 사용될 수 있다.

계수들의 분포를 통하여 에너지의 집중도를 표시할 때, L_2 기반 정규 Shannon 엔트로피 값은 계수의 집합 $E = \{e_i\}_{1 \leq i \leq N}$ 에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$C(E) = - \sum_i P_i \log_2 P_i \quad (7-1)$$

$$P_i = \frac{|e_i|^2}{\|E\|^2}, \quad \sum_i P_i = 1 \quad (7-2)$$

만약, 특정 k 에 대해 $P_k = 1$ 이고 나머지 P_i 가 모두 0의 값을 가지면 $C(E) = 0$ 가 되며, 임의의 i 에 대해 공히 $P_i = 1/N$ 이면, $C(E) = \log_2 N$ 이 되는데, 이는 각각 엔트로피 비용 함수의 하한값과 상한값을 이룬다. 다시 말하면, 계수의 에너지 집중도가 높을수록 엔트로피 값은 작아지게 되며, 넓게 분산되어 있는 경우 그 값은 커지게 된다.

이런 엔트로피 함수는 확률적 의미에서 불확실성을 추정하는 양이기 때문에, Heisenberg의 불확실성 원리의 관점에서 설명될 수 있는 시간-주파수 영역에서의 분해능의 개념과 연관될 수 있다. 즉 어떤 신호에 대해 최적의 웨이블릿 기저는 높은 에너지 집중도를 가지고 시간-주파수 공간에서 신호를 가장 효율적으로 표현하기 때문에 그 엔트로피 함수값은 최소가 된다. 이런 개념을 웨이블릿 변환에 적용한 대표적 사례로 웨이블릿 패킷 변환에서의 최적 기저 선정^[8]에 관한 것을 들 수 있다.

본 논문에서는 분석하고자 하는 신호에 대해 가보 웨이블릿의 형상 지수 G_s 에 따른 에너지의 집중도를 측정하기 위해 연속 웨이블릿 변환에 의해 얻어진 결과에 대해 2차원 Shannon 엔트로피 함수를 적용하였다. 일반적인 샘플링된 신호를 가보 연속 웨이블릿 변환을 했을 때 얻어진 정규 스칼로그램의 각 원소가 다음과 같이 주어진다 하면,

$$A_{i,j} = N_w f(u_i, s_j) \quad (i=1, \dots, m, j=1, \dots, n) \quad (8-1)$$

2차원 정규 Shannon 엔트로피 함수는 다음의 식으로 주어진다.

$$C(N_w f(u, s)) = - \sum_i \sum_j \left(\frac{A_{i,j}}{\sum_i A_{i,j}} \right) \log_2 \left(\frac{A_{i,j}}{\sum_i A_{i,j}} \right) \quad (8-2)$$

이를 통해 임의의 신호 f 에 대해 최적의 가보 웨이블릿 형상 지수 G_s 는 식 (8-2)를 최소로 함으로써 구할 수 있다. 즉,

$$(G_s)_{op} = \arg \min_{G_s} C(N_w f(u, s)) \quad (9)$$

최적의 형상 지수를 찾기 위해, 일반적으로 최적화 기법에 기반한 서치 알고리즘을 적용할 수 있지만, 본 논문에서는 [3.0, 5.5]의 범위 내에서 0.25 간격으로 선택된 G_s 에 대해서 엔트로피 비용을 계산하고, 계산된 값에 대해 내삽법(interpolation)을 적용하여, 최적의 $(G_s)_{op}$ 를 계산하였다. 참고로, 연속 웨이블릿 변환은 중복(redundant) 변환이므로 식 (8-2)에서 고려된 계수는 각 스케일에서 정규화되었고, 따라서 주파수 분해능보다는 시간 분해능이 보다 강조된 엔트로피 함수 값이 된다. 예를 들어 충격파동의 전파를 통한 결함 진단 문제에서 미세 결함의 위치를 정확하게 파악하고자 할 때에는 시간 축에 따른 분해능이 보다 강조되어야 하기 때문에, 본 연구에서는 각 스케일별로 계수 $A_{i,j}$ 를 정규화하였다.

4. 실험적 고찰 및 검증

Shannon 엔트로피 개념을 이용한 가보 최적 형상 지수를 선정하는 본 연구의 유효성 및 중요성을 확인하기 위해 웨이블릿 변환에 의한 결함 진단을 중심으로 실험적으로 고찰하였다. 이를 위해 본 연구에서는 Fig. 1과 같은 양단단순 지지된 황동 보에 대해서 광대역 진행파의 분산(dispersion) 현상을 잘 파악하는 데 적합한 최적의 $(G_s)_{op}$ 값을 선정하였고, 결함 진단에 있어 최적 형상 지수의 중요성에 대해 살펴보았다.

Fig. 1에서 사용된 원형 보는 황동으로 길이 1.5m, 직

경 2cm 이며, 충격 굽힘파는 점 A에서 쇠 구슬의 낙하에 의해 발생되었다. 굽힘파의 분산(dispersion) 현상을 실험적으로 구하기 위해 특성에 따른 결과를 얻기 위해서 B, C, D 세 점에서 스트레인 게이지로 진행파를 검출하였다. 결합 진단 실험을 위해서는 C 지점에 폭이 1mm, 깊이가 5mm 인 표면 결함을 만들고, B 지점의 스트레인 게이지를 이용하여 입사파 및 반사파를 측정하였으며, 신호의 샘플링 주파수는 1MHz 이다.

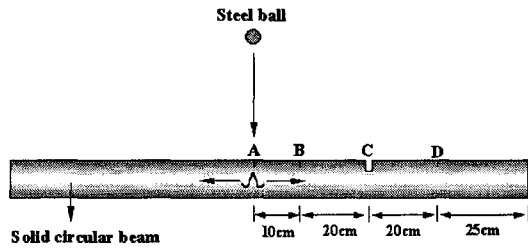
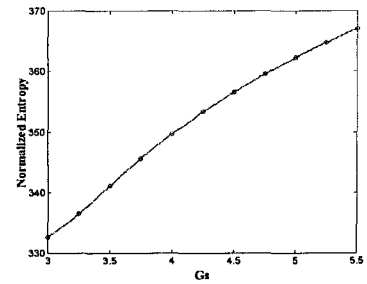


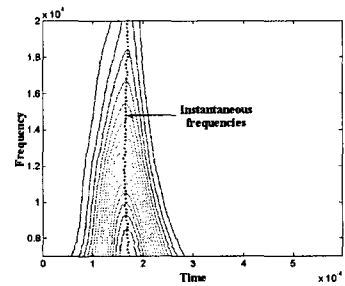
Fig. 1. Experimental setup

4.1 굽힘파의 분산 현상과 최적 형상 지수

Fig. 1의 장치에서 가진되는 충격파의 주 주파수 대역이 30kHz이하이기 때문에 티모셴코(Timoshenko) 보 이론으로도 비교적 정확하게 모델링할 수 있다.^[9] 티모셴코 보 이론에서도 쉽게 알 수 있듯이, 보에서는 군속도 (Group velocity) C_g 가 주파수에 의존하는 현상, 즉 분산 현상이 심하게 나타난다. 그러므로 측정 위치에 따라 검출되는 파의 형태가 상당히 변화한다. 만약 이렇게 측정된 신호를 시간-주파수 평면 위에서 정확하게 분석하기 위해서는, 각 위치에서 측정된 신호에 따른 최적 형상의 가보 웨이블릿을 선정해야만 한다. Fig. 2, 3, 4에서 B, C, D 점에서 측정되는 굽힘파의 정확한 시간-주파수 분석을 위해 최적의 G_s 를 갖는 가보 웨이블릿을 이용하여 변환을 수행하였다. 그림에서 알 수 있듯이 파동이 측정점 B, C, D를 지나면서 분산 특성이 두드러지며, 이에 적합한 최적의 $(G_s)_{op}$ 값도 점점 증가함을 확인할 수 있다. 이는 분산이 진행될수록 파동의 에너지가 시간-주파수 공간에서 넓게 분포하기 때문에, 신호의 에너지를 국소적으로 정확하게 포착하기 위해서는 시간축으로의 지지구간이 더 긴 웨이블릿이 해석에 유리함을 의미한다.

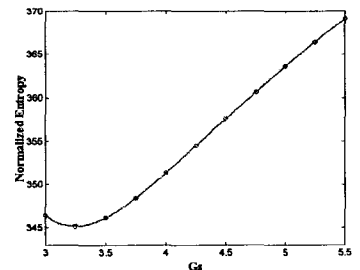


(a)

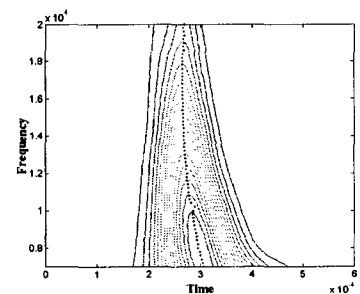


(b)

Fig. 2 GWT for the wave measured at B. (a) Entropy variation for varying G_s ; (b) GWT with $(G_s)_{op}$.



(a)



(b)

Fig. 3 GWT for the wave measured at C. (a) Entropy variation for varying G_s ; (b) GWT with $(G_s)_{op}$.

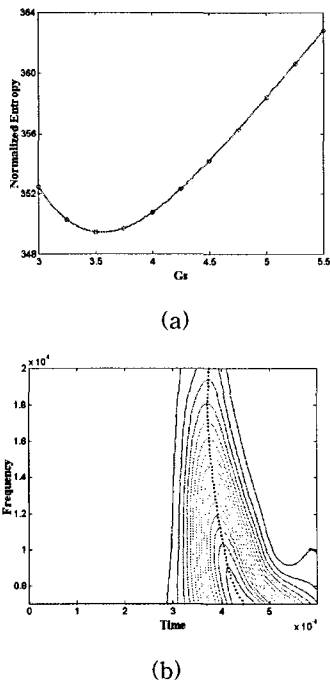


Fig. 4 GWT for the wave measured at D. (a) Entropy variation for varying G_s ; (b) GWT with $(G_s)_{op}$.

Fig. 5에서 점 D에서 검출된 신호를 가장 잘 포착하기 위해 사용된 $G_s=3.56$ 를 갖는 가보 웨이블릿 형상과 연속 웨이블릿 변환에 가장 보편적으로 사용되는 Morlet 웨이블릿 형상을 비교하였다. Fig. 5에서 알 수 있듯이 $G_s=3.56$ 인 가보 웨이블릿은 Morlet 웨이블릿 함수보다 시간에 대한 지지구간이 짧아서 시간 분해능이 매우 우수함을 확인할 수 있다. D에서 최적값으로 얻어진 $(G_s)_{op}=3.56$ 은 시행 착오법으로 구한 기존의 연구 결과^[4,5]인 $(G_s)_{op} \approx 3.5$ 와 거의 같은 결과이다.

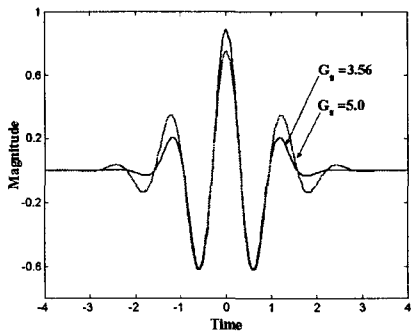


Fig. 5 The real part of the Gabor wavelets with $G_s=3.56$ and $G_s=5.0$ (Morlet wavelet)

Table. 1 The optimal values of G_s at various points.

	Point B	C	D
$(G_s)_{op}$	3.00	3.25	3.56

4.2 최적형상 가보 웨이블릿을 이용한 결함진단

결함 진단에 있어 최적 형상의 웨이블릿 선정의 중요성을 살펴보기 위해 표면 결함이 C에 존재하는 보에 대해, 점 B에서 입사파 및 결함에 의한 반사파를 측정하였다

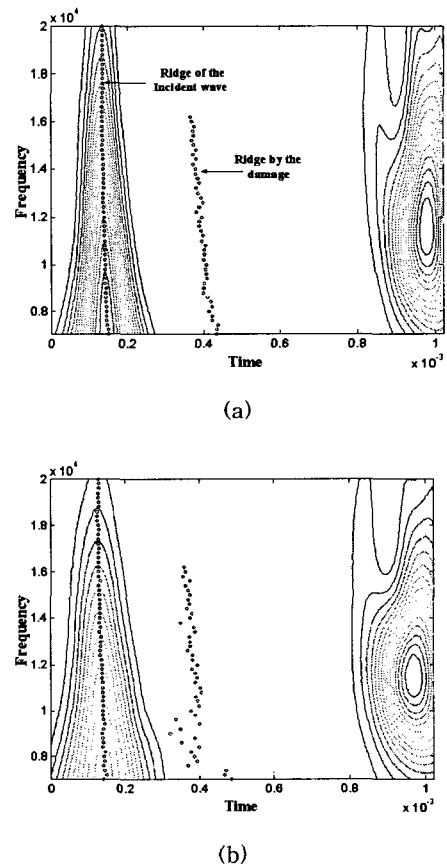


Fig. 6 The normalized scalogram for the strain signal measured at B. (a) with Gabor wavelet of $G_s=3.56$; (b) with Gabor wavelet of $G_s=5.0$.

일반적으로 결함의 위치를 추정하기 위해서는 결함에

의한 미세 에너지의 반사파를 정확하게 포착하는 것이 중요하다기 때문에, 앞절에서 설명했던 것처럼 반사파의 분산 현상을 고려한 최적 형상의 가보 웨이블릿 함수를 적용하는 것이 유리하다. Fig. 1에 보이는 것처럼 동일 입사파에 대해 점 C에 존재하는 결함에 의해 반사되어 점 B에서 검출되는 신호는 점 D에서 측정되는 신호와 동일량의 거리를 이동하기 때문에 그 분산 특성이 매우 유사하다. 따라서 결함 검출을 위해서 본 문제에서는 $G_s=3.56$ 인 가보 웨이블릿을 사용하였다. Fig. 6, 7은 $G_s=3.56$ 과 $G_s=5.0$ (Morlet wavelet) 인 가보 웨이블릿을 이용하여 변환을 수행하고, 능선 해석(ridge analysis)을 통해 결함의 위치를 추정된 결과이다. (추정 절차는 Kim 등^{14,5} 참조)

Fig. 6에서 알 수 있듯이 관심 주파수 영역에서 $G_s=3.56$ 의 가보 웨이블릿을 사용한 경우, 결함에 의한 능선이 보편적으로 사용되는 Morlet 웨이블릿 함수를 적용한 경우에 비해 매우 뚜렷하게 포착됨을 확인할 수 있다. 이는 에너지의 집중도를 표현하는 엔트로피 함수를 통해 분산 특성을 고려한 최적 형상의 가보 웨이블릿을 이용할 경우, 시간-주파수 공간에서 신호의 에너지를 가장 국소화시킴과 동시에 왜곡을 최소로 하여 신호를 표현할 수 있음을 의미한다. Fig. 7에서 실제 결함 위치에 대한 G_s 에 따른 결함 위치 추정값의 rms 오차를 표시하였는데, 최적의 가보 웨이블릿을 사용할 경우 결함 진단의 정확성이 크게 향상됨을 확인할 수 있다.

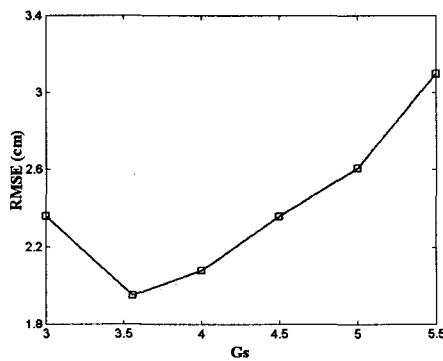


Fig. 7 Rms error for the estimated distance for varying values of G_s (Exact damage distance=20cm)

5. 결론

본 연구에서는 Shannon 엔트로피 개념을 이용하여 시간-주파수 공간에서 신호를 높은 에너지 집중도를 가지고 국소적으로 표현할 수 있는 최적 형상의 가보 웨이블릿 함수의 선정하는 방법을 제안하였다. 본 기법을 광대역 굽힘

파 가진에 의한 보에서의 분산 현상 규명 및 결함 진단 문제에 적용해 보았으며, 파동의 분산 특성을 고려한 최적의 가보 웨이블릿을 적용할 경우에 결함 검출력을 크게 향상시킬 수 있음을 확인하였다.

참고 문헌

- (1) Inoue, H, Kishimoto, K. and Shibuya, T., 1996, "Experimental wavelet analysis of flexural waves in beams," *Experimental Mech.*, 36, 212~217.
- (2) Douglas, L. J. and Thomas W. P., 1990, "A High Resolution Data-Adaptive Time-Frequency Representation," *IEEE Trans. acoust. speech and signal proc.*, 38(12), 2127~2135.
- (3) Choi, H. I. and Williams, W. J., 1989, "Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals Using Exponential Kernel," *IEEE Trans. acoust. speech and signal proc.*, 37(6), 862~871.
- (4) Kim, Y.Y and Kim, E.H, 2000, "A New Damage Detection method based on a wavelet transform," in *Proce. of 18th IMAC*, 1207~1212.
- (5) Kim, Y.Y and Kim, E.H, 2001, "Effectiveness of the Continuous Wavelet Transform in the Analysis of Some Dispersive Elastic waves," *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(1), 86~94.
- (6) Shannon, C., 1948, "A Mathematical Theory of Communication," *Bell Syst. Tech. J.*, 27, 379~656.
- (7) Mallat, S., 1998, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, New York.
- (8) Coifman, R. R., AND Wickerhauser, M. V., 1992, "Entropy-Based Algorithms for the Best Basis Selection," *IEEE Trans. Info. Theory*, 38(2), 713~718.
- (9) Doyle, J. F., 1997, *Wave Propagation in Structures*, Springer-Verlag, New York.