

# 압전세라믹이 부착된 정방형 판의 동적 모델링

김승록<sup>†</sup>, 허 석<sup>\*</sup>, 콰문규<sup>\*\*</sup>

## Dynamic Modeling of a Rectangular Plate with Piezoelectric Actuators and Sensors

Seung R. Kim, Seok Heo and Moon K. Kwak

### Abstract

This paper is concerned with the dynamic modeling of a rectangular plate with piezoelectric actuators and sensors. The experimental frequency response plots can be used to verify the theoretical modeling. Theoretical analysis will follow.

### 1. 서 론

진동이 심각한 문제를 일으키는 구조물에 있어 수동적인 진동제어 방법으로 이러한 문제를 제어할 수 없는 경우가 발생한다. 이 경우 시스템의 성능 향상을 위하여 능동적으로 진동을 제어할 수 있는 방법을 모색하게 되는데 이와 관련된 연구가 활발히 진행되어 오고 있다. 특히 감지기(Sensor)와 작동기(Actuator)를 구조물의 표면에 부착하거나 구조물의 한 부분으로 삽입하고 제어시스템과 연결한 구조물을 일반적으로 지능구조물(Intelligent Structure 또는 Smart Structure)이라고 부른다. 항공기나 우주구조물은 시스템의 중량이 성능에 미치는 영향이 크기 때문에 끊임없이 경량구조의 개발이 추구하고 있다. 구조물의 경량화는 구조강성의 저하를 수반하게 되고 강성이 작

은 유연구조물은 작은 외란에 대해서도 큰 동적반응을 보인다. 외란에 대하여 능동적으로 반응하는 지능형 구조의 활용은 구조의 고성능화에 큰 기여를 하게 된다. 외란을 감지하여 제어신호를 생성, 작동시킬 수 있는 지능형 구조물 하나가 압전작동기와 감지기가 포함된 구조물이다.

압전재료가 구조물과 결합된 제어 시스템을 일반적으로 지능구조물이라고 부른다. 지능구조물에 대한 이론적인 해석은 간단한 보의 해석으로부터 출발해 여러 가지 복잡한 구조물에 대한 해석이 사용되고 있다. 압전재료를 포함한 지능구조물의 진동제어에 성공적으로 사용된 제어기로서 Fanson과 Caughey[1]가 제안한 PPF제어기와 권[2-5]등이 제안한 MIMO PPF와 수정LQG 제어기 등이 있다. Crawley와 Lazarus[6]는 등방성/비등방성 판 구조물에 대하여 작동 스트레인(actuation strain)에 관한 관계식을 Rayleigh-Ritz방법을 이용하여 개발하고 보행체의 관에 대한 실험을 통하여 이론모델의

<sup>†</sup>, \* 동국대학교 기계공학과 대학원

<sup>\*\*</sup> 동국대학교 기계공학과 교수

정확성을 입증하였다. Lazarus[7]등은 판 구조물에 대한 Rayleigh-Ritz 가정모드 방법을 이용하여 시스템 모델링을 하고 MIMO LQG제어를 수행하였다. 이외에도 수치해석을 통한 작동기 위치의 최적화문제[8-9]나 실험을 통한 판 구조물의 제어 [10-11]에 관한 논문들이 발표되고 있다.

압전체는 근본적으로 전기-기계 연성으로 표현되는 재질이다. 구조물의 강성 및 동적 특성에 결정적으로 영향을 미치는 요인이 바로 이와 같은 전기-기계 연성 효과이다. 이 효과는 가해진 전기장에 의해 압전작동기가 변형되며 압전작동기의 변형은 구조물의 변형에 연결된다. 역으로 구조물의 변형이 압전작동기의 변형에 영향을 주게되어 결국 연성된 효과가 동적 특성에 포함되게 된다. 박판형 압전작동기를 살펴보면 두께가 얇음으로 인해 두께 방향의 전기장 변화를 선형으로 가정하여도 큰 무리가 없다. 그러나 위 면과 아래 면에 전기장이 분포된 것으로 나타나게 되며, 이러한 분포성을 이산화하여 정식화하는 매우 어려운 과제이다. 특히 중립 면을 바탕으로 하는 고차역학 정식화 과정과는 전혀 다른 접근 방법을 요구하게 된다. 지금까지 이론적인 모델링은 포텐셜이 선형으로 변한다는 가정, 포텐셜이 압전연성효과에 미치는 영향의 간략화, 극성과 가해진 전기장의 평행성에 대한 가정을 포함하고 있다.

본 논문에서 제시하는 결과는 유한요소법이나 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하여 압전세라믹 작동기와 감지기가 부착된 판 구조물을 해석할 경우 유용하게 이용될 수 있을 것으로 보인다.

## 2. 주파수 응답특성

실험을 위하여 Fig. 1과 같이 실험장치를 구성하였다. 구조물은 400×300×1mm의 알루미늄 판이며 “L”자형으로 된 프레임에 볼트를 통하여 고정된 외관보 형태이다. 작동기는 Piezo Systems, INC. 의 PSI 5H-S3 이며 54.6×54.6×0.191mm,  $d_{31} = 260 \times 10^{-12} \text{m/V}$ ,  $\rho = 7700 \text{kg/m}^3$ ,  $E = 61 \text{GPa}$ ,  $C_p = 470 \text{nF}$  이다. 그림에서와 같이 작동기는 판의 고정단 앞과

뒤에 4개가 부착되어 두 개의 작동기를 구성한다.

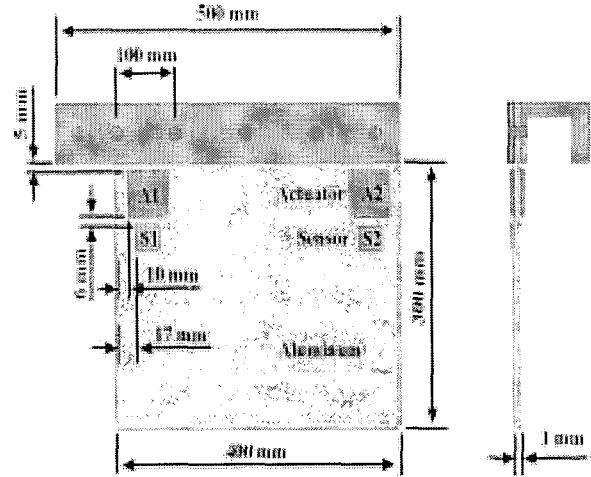


Fig. 1 Plate Model with Piezoelectric Actuators/Sensors.

2개의 감지기는 Morgan Electro Ceramics의 NAVY TypeII PZT-5A 이며 38×32×0.25mm,  $d_{31} = -171 \times 10^{-12} \text{m/V}$ ,  $\rho = 7700 \text{kg/m}^3$ ,  $E = 61 \text{GPa}$ ,  $C_p = 90 \text{nF}$  이다. 압전세라믹과 구리테이프(3M)사이의 실버전극을 연결하기 위하여 Piezo Systems, INC.의 Solder & Flux kit을 사용하였다.

Table 1.은 첫 번째 4차까지의 주파수 응답을 나타낸다.

Table 1. Natural Frequency (Hz)

Type	Freq.	1	2	3	4
A1S1		12	23.5	62.25	85.5
A1S2		12	23.5	62	85.75
A2S1		11.75	23.5	62	85.25
A2S2		12	23.5	62	85

Table 1에서 관찰 할 수 있듯이 첫 번째 4차까지의 고유진동수는 거의 일치함을 알 수 있다. 즉, 4차 모드를 포함한 제어가 실제로 유효함을 말해준다.

### 3. 시스템의 운동방정식

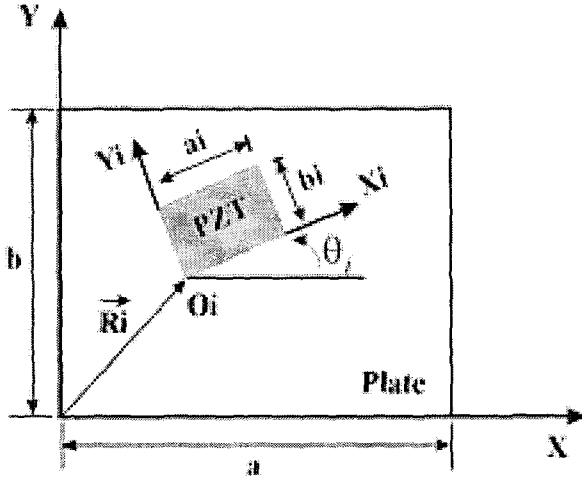


Fig. 2 Configuration of a Plate with Piezoelectric Actuators and Sensors

먼저 Fig. 2의 판에 대한 동적모델을 유도해보자. 여기서 X와 Y는 절대좌표를 의미하며 Xi와 Yi는 PZT의 회전좌표를 나타내며  $\theta_i$ 는 PZT의 회전각을 의미한다.

여기서는 가정모드 방법(Assumed mode method)을 이용하여 시스템의 운동방정식을 근사적으로 정식화하였다.

연속계의 응답을 다음과 같은 급수형태로 가정해보자.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x, y) q_i(t) = \Phi \underline{q} \quad (1)$$

여기서  $\psi_i(x, y)$ 는 가정모드들이며  $q_i(t)$ 는 일반화된 좌표(modal coordinate)이다. n은  $q_i(t)$ 의 개수를 나타낸다.  $\Phi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_n]^T$

$\underline{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$  인 벡터 변수이다.

판의 운동에너지는 다음과 같이 쓰일 수 있다.

$$T_p = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T M_p \dot{\underline{q}} \quad M_p = \rho h \int_0^a \int_0^b \Phi^T \Phi \, dx \, dy \quad (2)$$

여기서  $M_p$ 는 판의 질량행렬,  $\rho$ 는 질량밀도,  $h$ 는

판의 두께이다. 그리고 탄성에너지는 다음과 같이 쓰일 수 있다.

$$V_p = \frac{1}{2} \underline{q}^T K_p \underline{q}$$

$$K_p = D \int_0^a \int_0^b \left[ \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] dx \, dy \quad (3)$$

$K_p$ 는 판의 강성행렬을 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p & \nu_p E_p & 0 & -\frac{d_{31} E_p}{1-\nu_p^2} \\ \frac{\nu_p E_p}{1-\nu_p^2} & E_p & 0 & -\frac{d_{31} E_p}{1-\nu_p^2} \\ 0 & 0 & \frac{E_p}{1+\nu_p} & 0 \\ \frac{d_{31} E_p}{1-\nu_p^2} & \frac{d_{31} E_p}{1-\nu_p^2} & 0 & \epsilon^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

압전세라믹의 구성방정식은 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다. 여기서  $E_p$ 는 압전세라믹의 탄성 계수(Young's modulus),  $\nu_p$ 는 압전세라믹의 포아송 계수(Poisson's ratio),  $d_{31}$ 은 압전상수,  $\epsilon^{33}$ 는 blocked dielectric constant,  $D_z$ 는 z축 방향의 전기적 변위,  $E_z$ 는 z축 방향의 전기장을 의미한다.

k번째 압전세라믹 요소에 대한 운동에너지는

$$T_{sk} = \frac{1}{2} \rho_s h \int_0^{a_k} \int_0^{b_k} \dot{w}^2(x, y) \, dx \, dy \quad (5)$$

i 번째 압전세라믹의 원의 위치의 절대좌표는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_x^i &= R_x^k + x_k^i \cos \theta_k - y_k^i \sin \theta_k \\ R_y^i &= R_y^k + x_k^i \sin \theta_k + y_k^i \cos \theta_k \end{aligned} \quad (6)$$

따라서 정리하면

$$T_{ik} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_{ik} \dot{q}$$

$$M_{ik} = \rho_{ps} h_{ps} \int_0^h \int_0^h \Phi^T \Phi dx_k dy_k \quad (7)$$

여기서  $\Phi = \Phi(P_x^k, P_y^k)$ 를 나타낸다.

k번째 압전세라믹 요소에 대한 탄성에너지는 다음과 같다.

$$V_{ik} = \frac{1}{2} D_{ps} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu_{ps} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\ \left. + 2(1-\nu_{ps}) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx_k dy_k \\ + b_{ps} \nu_{ps} \iint \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx_k dy_k \\ - \frac{1}{2} C_{ps} v_{ps}^2 \quad (8)$$

여기서

$$D_{ps} = \frac{E_{ps}}{(1-\nu_{ps}^2)} \left( \frac{1}{4} h^2 h_{ps} + \frac{1}{2} h h_{ps}^2 + h_{ps}^3 \right) \\ h_{ps} = \frac{d_{31}^2 E_{ps}}{2(1-\nu_{ps}^2)} (h + h_{ps}) \quad \nu_{ps} = h_{ps} E_c \\ C_{ps} = \frac{a_p b_p E_c^3}{h_p}$$

여기에 허용함수 식(1)을 적용하여 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V_{ps} = \frac{1}{2} q^T K_{ps} q + \nu_{ps} B_{ps} q - \frac{1}{2} C_{ps} v_{ps}^2$$

$$K_{ps} = D_{ps} \int_0^h \int_0^h \left[ \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right. \\ \left. + \nu_{ps} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \nu_{ps} \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right. \\ \left. + 2(1-\nu_{ps}) \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] dx_k dy_k \\ H_{ps} = h_{ps} \int_0^h \int_0^h \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) dx_k dy_k \quad (9)$$

따라서 판과 압전세라믹의 전체 운동에너지와 위치에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T (M + \sum_j M_{psj}) \dot{q}$$

$$V = \frac{1}{2} q^T (K + \sum_k K_{psk}) q \\ + \sum_j \nu_{ps} B_{psj} q - \frac{1}{2} \sum C_{ps} v_{ps}^2 \quad (10)$$

식 (10)을 Lagrange 방정식을 도입하여 정리하면 아래와 같다.

$$M_t \ddot{q} + (K_t + B_{ps}^T C_{ps}^{-1} B_{ps}) q = -B_{ps}^T v_{ps}$$

$$v_{cs} = G_c C_{ps}^{-1} B_{ps} q \quad (11)$$

위의 식을 보면 작동기에 의해 감지기에 영향이 가해지는데 기존에는 작동기 방정식을 세울 때 감지기의 영향을 무시했었지만 이 영향 정렬을 작동기 방정식에 포함시켰을 때 이 영향에 의해 이론적인 응답곡선의 변화가 생기는지 알아보려고 한다.

이론모형을 바탕으로 추출한 주파수 응답곡선을 실험에 의해 구한 응답곡선과 비교하였다. Fig. 3은 작동기 AI과 감지기 SI사이의 응답을 보여준다. 보이는 바와 같이 실험치와 이론치의 고유주파수는 거의 일치함을 알 수 있지만 초기 시작점이 일치하고 있지 않고 있다.

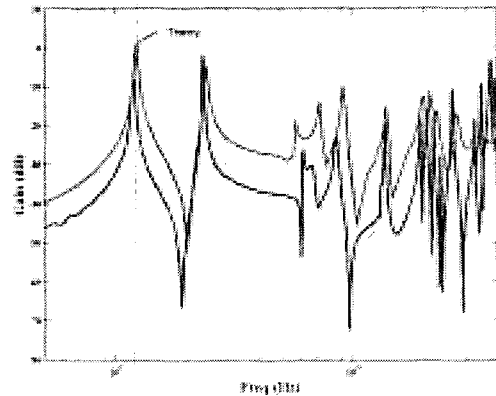


Fig. 3 Frequency Response plot

#### 4. 토의 및 결론

본 논문에서는 관 구조물의 이론적인 해석을 위해 가정모드 방법을 이용하여 운동방정식을 유도하였다. 압전작동기와 감지기를 회전시킬 수 있도록 하고 그 수에 관계없이 일반화하였다.

결과를 살펴보면 외관보와 같은 단순한 구조물에 대한 실험결과와 이론결과를 비교한 응답곡선은 너무나 잘 맞는데 마하야 원구조물에 대한 응답곡선에 있어서 초기 시작위치가 맞지 않는 문제점을 찾아냈다. 그래서 본 실험을 통하여 그 시작점의 위치를 맞추기 위하여 작동기에 의한 감지기의 영향을 첨가하여 조사를 하였다.

구조물에 사용할 감지기는 그림에서처럼 너무나 작고 응답곡선에 의한 실험치와 이론치의 비교결과 그 영향이 거의 없음을 알 수 있었다. 이 시작점의 위치를 결정하는 것은 질량행렬이나 강성행렬이 아닌 작동기와 감지기의 영향 행렬에서 나오는 계일의 영향이 더 크다고 할 수 있겠다. 따라서 FEM에 의한 해석을 할때 작동기에 의한 감지기의 영향을 고려해야 한다면 감지기의 수가 굉장히 많은 경우를 제외 하고는 그 영향을 무시해도 좋을 것 같다.

#### 후 기

본 연구는 국방과학연구소 위탁과제(UD010008AD)의 지원에 의하여 이루어졌다. 관계자 여러분께 감사 드린다.

#### 참 고 문 헌

[1] Fanson, J. L. and Craighey, T. K., 1987, "Positive Position Feedback Control for Large Space Structures," AIAA Journal, Vol. 28, No. 4, April 1990, pp. 717-724

[2] 각문규, "압전재료를 이용한 지능구조물의 능동진동제어", 한국소음진동공학회지, 제 5권 제 3호, 1995년 9월, pp. 292-302.

[3] 라완규, 각문규, 윤광준, "압전감지기와 작동기를 이용한 복합재료 적재구조물의 능동진동제어", 한국항공우주학회지, 제25권, 제5호, 1997, pp. 76-85.

[4] 각문규, 라완규, 윤광준, "PPF와 SRF 조합제어 기법을 사용한 지능구조물의 능동진동제어," 한국소음진동공학회지, 제7권 제5호, 1997, pp. 811-817.

[5] 각문규, "지능구조물의 능동진동제어를 위한 다중 PPF 제어기와 수정 LQG 제어기의 비교 연구", 한국소음진동공학회지, 제 8권 제 6호, 1998, pp. 1121-1129.

[6] Crawley, E. F., and Lazarus, K. B., " Induced Strain Actuation of Isotropic and Anisotropic Plates," AIAA Journal, Vol. 29, No. 6, 1991, pp. 944-951.

[7] Lazarus, K. B., Crawley, E. F., and Lin, C. Y., "Multivariable High-Authority Control of Plate-Like Active Structures," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 19, No. 6, 1996.

[8] Dimitriadis, E. F., Fuller, C. R., and Rogers, C. A., "Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates," Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 113, 1991 pp.100-107

[9] Kim, Y. D., Kum, D. J., and Nam, C. H., "Simultaneous Structural/Control Optimum Design of Composite Plate with Piezoelectric Actuators," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 20, No. 6, 1997 pp. 1111-1117

[10] Aditi Chaturghalhyay, Haozhong Gu, and Dan, D. D., "Dynamics of Delaminated Composite Plates with Piezoelectric Actuators," AIAA Journal, Vol. 37, No. 2, 1999, pp. 248-254

[11] Falangas, E. T., Dworak, J. A., and Koshigoe, S., "Controlling Plate Vibrations Using Piezoelectric Actuators," IEEE Control Systems, 1994, pp. 34-41