

속도미분비대칭도를 고려한 초기난류 속도장 생성방법 연구

고범용*, 박승오**

A Study on the Generation of Initial Turbulent Velocity Field with Non-zero Velocity Derivative Skewness

Bum-Yong Koh*, Seung-O Park**

Key Words : Initial turbulent velocity field, Velocity derivative skewness, Isotropic decaying turbulence, Large eddy simulation(LES)

Abstract

It is necessary for the numerical simulation of 3-dimensional incompressible isotropic decaying turbulence to construct 3-dimensional initial velocity field which resembles the fully developed turbulence. Although the previous velocity field generation method proposed by Rogallo(1981) satisfies continuity equation and 3-dimensional energy spectrum, it has limitation, as indicated in his paper, that it does not produce the higher velocity moments(e. g. velocity derivative skewness) characteristic of real turbulence. In this study, a new velocity field generation method which is able to control velocity derivative skewness of initial velocity field is proposed. Brief descriptions of the new method and a few parameters which is used to control velocity derivative skewness are given. A large eddy simulation(LES) of isotropic decaying turbulence using dynamic subgrid-scale model is carried out to evaluate the performance of the initial velocity field generated by the new method. It was shown that the resolved turbulent kinetic energy decay curve and the resolved enstrophy decay curve from the initial field of new method were more realistic than those from the initial field of Rogallo's method. It was found that the dynamic model coefficient from the former was initially half the stationary value and experienced relatively short transition period, though that from the latter was initially zero and experienced relatively longer transition period.

1. 서론

3차원 난류의 등방감쇄유동을 수치적으로 모사하기 위해서는 완전히 발달한 난류에 근접한 3차원 유동장을 인공적으로 구성하여야 한다. 초기 유동장은 Enstrophy나 난류운동에너지(Turbulent Kinetic Energy)의 시간 변화에 영향을 미치며, LES(Large Eddy Simulation)의 경우에는 SGS(Sub-grid Scale) 모델 중 가장 널리 사용되는 Dynamic Model의 계수를 계산하는 데 필요한 인자이다.

Rogallo[1]는 3차원 에너지 스펙트럼과 연속의 식을 만족하는 초기 비압축성 난류 유동을 생성하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 무작위수(Random number)를 이용하여 위상공간에서의 속도 벡터의 위상(Phase)을 결정한다. 그러나, 속도미분비대칭도(Velocity derivative skewness) 등의 난류 특성을 만족하지 못한다.

통계학의 관점에서 비대칭도(Skewness)는 주어진 신호가 평균으로부터 얼마나 엇갈리게 분포하고 있는지를 나타내는 척도이다. 또한 유체역학의 측면에서 불 때에는 속도미분비대칭도가 와류 생성(Vorticity production)에 영향을 미친다고 알려져 있다 [2]. Van Atta[3]는 속도미분비대칭도가 Taylor 미소 레이놀즈수(Micro scale Reynolds number)의 함수임을 보고하였다. 이런 점을 고려하면, 속도미분비대칭도를 제어하는 것은, 완전히 발달한 난

류 유동에 보다 근접한 유동장을 생성하기 위한 필요조건으로 생각할 수 있다.

본 연구에서는 Rogallo의 방법을 바탕으로 속도미분비대칭도를 제어할 수 있는 3차원 속도장 생성 방법을 제안하고자 한다.

2. 3차원 속도장 속도미분비대칭도 제어

2.1 Rogallo의 초기난류 생성방법

3차원 공간 좌표계와 속도 벡터를 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, 이를 3차원 푸리에 변환하면 $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ 라 하자. 이 때 연속의 식과 3차원 에너지 스펙트럼을 만족하는 속도장은 다음과 같이 구할 수 있다[1].

$$\vec{w} = \hat{\alpha} \hat{e}_1' + \hat{\beta} \hat{e}_2' \quad (1)$$

이 때,

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{E(k)}{2\pi k^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\eta_1} \cos \phi$$

$$\hat{\beta} = \left(\frac{E(k)}{2\pi k^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\eta_2} \sin \phi \quad (2)$$

* 한국과학기술원 항공우주공학과, kohby@kaist.ac.kr

** 한국과학기술원 항공우주공학과, sopark@kaist.ac.kr

$$\begin{aligned}\widehat{e}_1' &= \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \widehat{e}_1 + \frac{-k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \widehat{e}_2 \\ \widehat{e}_2' &= \frac{k_1 k_3}{k\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \widehat{e}_1 + \frac{k_2 k_3}{k\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \widehat{e}_2 \\ &+ \frac{-(k_1^2 + k_2^2)}{k\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \widehat{e}_3\end{aligned}\quad (3)$$

이다. 이 때, $\widehat{e}_1', \widehat{e}_2'$ 은 \vec{k} 에 수직한 기저벡터이며, $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$ 는 $\widehat{e}_1', \widehat{e}_2'$ 방향으로의 속도벡터이다. $E(k)$ 는 3차원 에너지 스펙트럼이며, ϕ, η_1, η_2 는 0에서 2π 사이에 균일하게 분포하는 무작위 수이다.

하지만 이처럼 위상공간에서 위상(Phase)을 무작위로 설정하면, 중심극한정리(Central limit theorem)에 의하여 Physical space에서의 확률밀도함수는 정규 분포를 갖게 된다[4]. 따라서 Rogallo의 초기 속도장은 정규 분포를 보이며, 속도미분비대칭도는 0이다. 이는 실험으로 측정된 속도미분비대칭도와 일치하지 않는 결과이며, Rogallo의 초기 유동장이 완벽하지 않음을 의미한다.

2.2 위상치환법

Carati[5]는 초기 유동장을 보다 난류에 근접하게 하기 위하여 새로운 방법을 제안하였다. 이 방법은 Rogallo의 초기 유동장을 어느 정도의 계산 시간만큼 수치모사를 수행한 후, 이 시간대에서의 위상 공간에서 속도 벡터에 적당한 상수를 곱하여 3차원 에너지 스펙트럼을 주어진 함수에 일치시키는 방법이다. 이 방법으로 생성한 초기 유동장은 단순히 3차원 에너지 스펙트럼을 만족할 뿐 아니라 실제 난류 유동장에 근접하는 위상을 가지고 있는 장점이 있다.

이와 같은 맥락의 방법으로 위상 치환법을 도입하였다. 이 방법은 Rogallo의 방법에서 무작위로 주었던 ϕ, η_1, η_2 를 완전히 발달한 난류 유동장으로부터 구하여 속도장을 구성한다.

하지만 이 방법은 LES 혹은 DNS의 수치 모사를 수행하여 그 계산 결과가 존재하는 경우에만 가능한 방법으로 엄격한 의미에서 초기 난류 유동장 생성 방법이라고 보기 어렵다. 또한 실제 계산의 관점에서 볼 때에는 Rogallo의 방법으로 생성한 초기 유동을 완전한 난류가 될 때까지 계산을 해야 하기 때문에, 그 계산비용을 고려해야 하는 추가 부담이 있다.

2.3 속도미분비대칭도를 고려한 위상모델

위상공간에서 속도미분을 생각하자.

$$a_i = -I k_i; w_i = A_i \exp(I \theta_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

크기 $A_i = |w_i| |k_i|$ 는 Rogallo의 방법을 이용하여 계산하고, 위상 θ_i 는 1차원과 같은 방식으로 다음처럼 모델링한다.

$$\theta_i = \theta_i' + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

이 때,

$$\theta_i' = \pi + \gamma_i(\vec{k}) \quad (6)$$

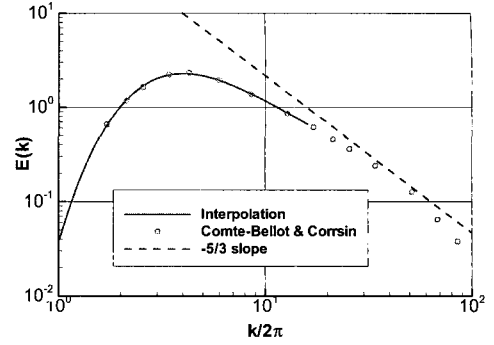


Fig. 1. 3-dimensional energy spectrum

$$\gamma_i(\vec{k}) = \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{j=1}^M \sin(\vec{k} \cdot (\vec{x}_o)_i)}{\sum_{j=1}^M \cos(\vec{k} \cdot (\vec{x}_o)_i)} \right) \quad (7)$$

이다. 여기서 M 은 층의 개수이며, $(\vec{x}_o)_i$ 는 각 층의 최저치 위치로서 $(0, 0, 0) \leq (\vec{x}_o)_i < (1, 1, 1)$ 범위에 위치한다. ε_i 는 연속의 식을 만족하기 위하여 다음과 같이 정한다.

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{r_1 \Delta\theta_{12} - r_3 \Delta\theta_{23}}{1 + r_1 + r_3} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 - \Delta\theta_{12} \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_2 + \Delta\theta_{23}\end{aligned}\quad (8)$$

여기서 r_1, r_3 는 Skewness의 방향성을 조정하는 가중치이며, 모두 1인 경우 등방성 유동을 얻을 수 있다. $\Delta\theta_{12} = \theta_{12} - \theta_{12}'$ 는 위상의 차를 의미하며, θ_{12} 와 θ_{12}' 은 각각 $\theta_{12} = \theta_2 - \theta_1$, $\theta_{12}' = \theta_2' - \theta_1'$ 로 정의된다. $\Delta\theta_{12}$ 와 $\Delta\theta_{23}$ 는 A_i 와 모델식으로부터 계산할 수 있다.

2.4 적용 예

새로운 모델을 이용한 3차원 속도장을 확인하기 위하여 Comte-Bellot과 Corrsin[6]의 3차원 에너지 스펙트럼을 내삽하여 사용하였다. 이 때 최고 파수(Wave number)는 $k_{peak} = 4 \times 2\pi$,

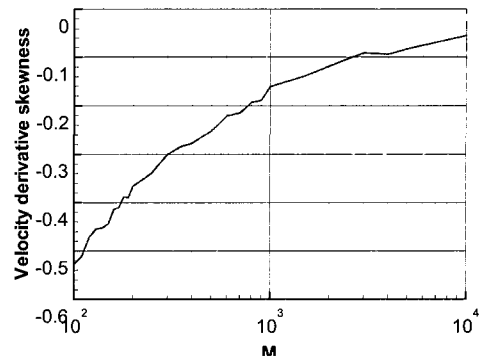


Fig. 2. Control of velocity derivative skewness using parameter M

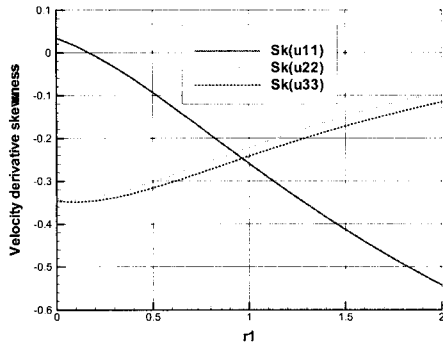


Fig. 3. Anisotropy control of velocity derivative skewness using parameter r_1

절삭(Cut-off) 파수는 $k_{cut} = 16 \times 2\pi$ 로 결정하였다. 사용된 격자의 개수는 $32 \times 32 \times 32$ 이다.

그림 2는 M 을 100에서 10000으로 변화시킬 때, 속도미분 비대칭도가 -0.5에서 0으로 비례하여 변하는 경향을 확인할 수 있다.

각 방향 가중치의 영향은 $M=500, r_3=1$ 로 고정하고, r_1 을 변화한 결과인 그림 3에서 확인할 수 있다. r_1 을 증가시키면 $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ 의 비대칭도는 점차 감소하고, $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ 의 비대칭도는 점차 증가하는 경향을 보인다.

3. LES를 통한 등방감쇄유동 해석

3.1 수치 기법

본 연구에서 개발된 3차원 유동장의 성능을 확인하기 위하여 등방감쇄유동의 LES를 수행하였다. 수치적인 안정을 위하여 Filterd Navier- Stokes 식의 비선형 항을 Skew-symmetric 형태로 처리하였다. 시간 적분에는 2차 정확도의 Runge-Kutta 기법을, 공간 차분에는 Spectral 기법을 사용하였다. 경계조건으로는 주기경계조건을 사용하였다. LES에 필수적인 SGS model로는 Lilly[7]가 제안한 Dynamic model을 사용하였다. 이 밖에 Filter의 종류, Test filter의 크기 등 자세한 수치 기법은 [8]을 참고 바란다.

3.2 계산 결과 비교

그림 4의 x축은 Eddy turn over time으로

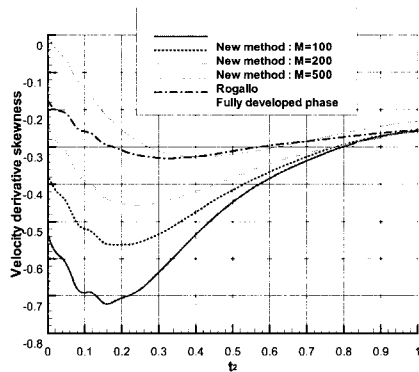


Fig. 4. Time evolution of velocity derivative skewness

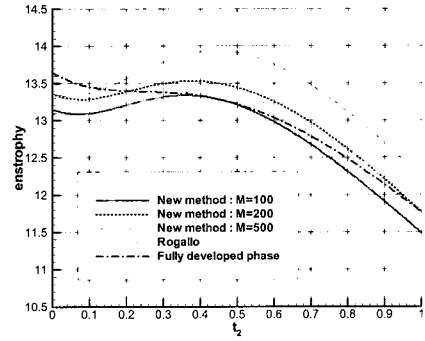


Fig. 5. Time evolution of resolved enstrophy

$t_2 = t \cdot \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle^{1/2}$ 으로 정의된다. 이 그림을 보면, 각

각 $r_1 = r_3 = 1$ 이면서, $M=100, M=200, M=500$ 인 경우와, Rogallo의 방법을 사용한 경우 모두 같은 경향을 확인할 수 있다. 즉 Skewness는 초기값보다 급격히 감소하였다가 일정한 값으로 수렴하고 있다. 만약 초기 난류 유동장이 충분히 발달된 난류 유동이라면, skewness 같은 통계치는 이러한 천이 구간이 나타나지 않아야 한다. 새로 제안된 초기 유동장은 이런 관점에서는 기존의 방법(Rogallo)보다 큰 효과를 보이지 않고 있다.

그림 5는 Resolved enstrophy의 시간에 따른 변화를 보여주고 있다. Enstrophy는 와도 교란 성분($\vec{\omega}$)의 분산을 의미한다. 완전히 발달된 난류 유동의 경우에는 Enstrophy가 완만하게 감소하는 곡선의 형태를 보인다. Rogallo의 초기 유동장의 경우에는 Enstrophy가 초기 값으로부터 약간 감소하다가 다시 증가한 후 $t_2 = 0.5$ 근처에서 최고값에 도달한 후 다시 감소하는 형태를 보인다. 이 때 흥미로운 점은 Enstrophy의 최고값이 초기 값보다 증가하였다는 점이다. 이 현상은 Vortex 성분이 평균전단이 있는 유동장에 갑자기 놓였을 때 Vortex가 축방향으로 늘어나면서 생기는 현상으로 알려져 있다[4]. 이는 Rogallo의 초기 유동장이 천이 구간을 거치고 있음을 의미한다. 새로 제안한 방법을 살펴보면, 역시 마찬가지로의 경향을 보이나, Rogallo의 초기 유동장보다 완만하게 감소하는 Enstrophy 곡선을 보여주고 있다.

그림 6은 Resolved 난류 운동 에너지의 감쇄 곡선이다. 난류 운동에너지도 완전히 발달된 난류 유동의 경우에는 완만하게 감소하는 곡선을 그려야 한다. Rogallo의 방법으로 생성한 초기

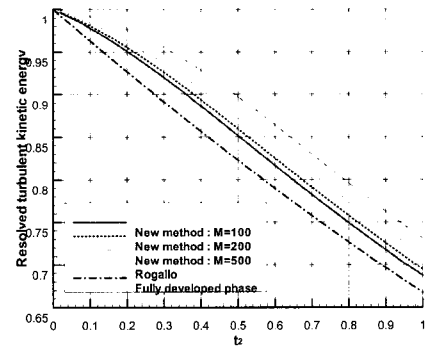


Fig. 6. Time evolution of resolved turbulent kinetic energy

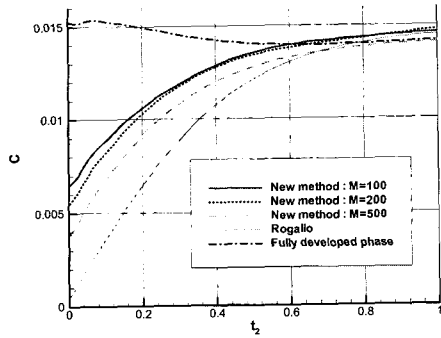


Fig. 7. Time evolution of dynamic model coefficient

유동장의 경우에는 초기에 천이 구간을 거치고 있다. 그러나 새로 제안한 방법은 보다 자연스러운 감쇄 곡선을 보여주고 있다. 특히 M 의 값이 100인 경우에 가장 좋은 결과를 보여주고 있다. 이 경우는 Velocity derivative skewness가 가장 작은 경우였다. 따라서 0이 아닌 Velocity derivative skewness의 초기 난류 유동장은 등방감쇄유동 계산에 매우 중요함을 알 수 있다.

$t_2 = 1.0$ 에서의 결과를 살펴보면, Rogallo 방법의 경우에는 난류운동에너지가 약 0.73인데 반하여, $M = 100$ 인 경우 0.68, 완전히 발달한 유동의 경우에는 0.66이다. 최대 10% 정도의 오차를 보여주고 있다. 난류 운동 에너지는 LES 및 DNS에서 수치 모사의 정확성을 판별하는 기준으로 종종 사용된다. 동일한 에너지 스펙트럼의 초기 난류 유동이라 할지라도, 그 계산 결과는 상이하게 나타날 수 있음을 알 수 있다.

그림 7은 Dynamic model coefficient의 시간에 따른 변화를 보여준다. Dynamic model coefficient는 완전히 발달된 난류 유동의 경우, 일정한 값으로 수렴한다. 이 값은 수치 정확도, Test filter width, Filter 종류 등에 의하여 결정된다[9]. Rogallo의 방법에서는 초기 Dynamic model coefficient가 0에서 시작하여 일정한 값으로 수렴하는 데 $t_2 = 0.8$ 의 시간이 소요되고 있다. 이에 비하여 새로 제안한 방법의 결과는 초기 Dynamic model coefficient가 0이 아닌 값에서 시작하여 보다 빨리 일정한 값으로 수렴한다. 특히 $M = 100$ 인 경우에는 가장 좋은 결과를 보여주고 있다. Dynamic model coefficient는 Filtered Navier-Stokes 식에서 인공 점성 계수로 작용한다. 따라서 Filtered 난류 운동 에너지에서 $M = 100$ 인 경우 가장 자연스러운 결과를 보인 것은 이 경우의 Dynamic model coefficient가 가장 높은 값을 유지하고 있기 때문으로 판단된다.

4. 결론

본 연구에서는 완전히 발달한 난류 유동에 근접한 3차원 유동장 생성법을 제안하였다. 이 방법에서는 속도미분비대칭도를

제어할 수 있을 뿐만 아니라, 각 방향으로 방향성 제어를 통한 비등방성 유동 생성도 가능하게 한다.

Dynamic model을 이용한 등방감쇄유동의 LES 수행 결과 결과, 새로 제안한 방법으로 생성한 초기 유동장의 경우, Resolved 난류운동에너지는 좀 더 자연스러운 감쇄 곡선을 보여주었고, Dynamic model 계수는 초기값이 0이 아닌 결과를 보여주었다. 이는, 새로운 방법이 기존의 방법과 비교할 때, 완전히 발달한 난류 유동에 근접하는 3차원 유동장을 생성함을 암시한다.

위 수치모사 결과로부터 초기 난류 유동의 속도미분비대칭도를 제어함이 중요함을 확인할 수 있으며, 이 점에서 이번 연구에서 제안한 3차원 유동장 생성 방법의 의미를 찾을 수 있다.

후 기

본 연구는 과학기술부 국책연구사업(99-N- NS-05-A-07)의 지원을 받아 수행되었습니다.

참고문헌

- [1] R. S. Rogallo, "Numerical experiments in homogeneous turbulence," NASA technical memorandum, Vol. 315, 1981.
- [2] R. Betchov, "An inequality concerning the production of vorticity in isotropic turbulence," Journal of fluid mechanics, Vol.1, pp. 497-504, 1957.
- [3] C. W. Van Atta and R. A. Antonia, "Reynolds number dependence of skewness and flatness factors of turbulent velocity derivatives," Physics of fluids, Vol. 23, No. 2, pp.252-252, 1980.
- [4] H. Tennekes and J. L. Lumley, "A First course in turbulence," The MIT Press, 1972.
- [5] D. Carati, S. Ghosal and P. Moin, "On the representation of backscatter in dynamic localization models," Physics of fluids, Vol. 7, No. 3, pp.606-616, 1995.
- [6] G. Comte-Bellot and S. Corrsin, "Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated, 'isotropic' turbulence," Journal of fluid mechanics, Vol. 48, No. 2, pp. 273-337, 1971.
- [7] D. K. Lilly, "A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method," Physics of fluids, Vol. 4, No. 3, pp. 633-635, 1992.
- [8] 박승오 외, "병렬 3차원 Computational Fluid Dynamics 소프트웨어 개발 최종 보고서," 한국과학기술원, 2000
- [9] E. T. Spyropoulos and G. A. Blaisdell, "Evaluation of the dynamic model for simulations of compressible decaying isotropic turbulence," AIAA Journal, Vol. 34, No. 5, pp. 990-998, 1996.