

# 비균질 수정을 사용한 타원완화모형 개발

전건호\*.최영돈\*\*.신종근\*\*\*

## Development of Elliptic Relaxation Model With The Inhomogeneous Correction

Kun Ho Chun\*, Young Don Choi\*\* and Jong Keun Shin\*\*\*

**Key Words :** *Inhomogeneous Correction(비균질수정), Elliptic Relaxation Model(타원완화모형), Reynolds Stress Model(레이놀즈응력모형), Rotating Turbulent Flow(회전난류유동)*

### Abstract

The elliptic relaxation model(ERM) with the inhomogeneous correction intermediate between near wall with and far from the wall. The source of the ERM usually was applied quasi-homogeneous pressure-strain correlation in homogeneous situations. This formulation was easily applied to the linear model or non-linear pressure-strain model. It is observed that the boundary conditions of the relaxation operator dominate the homogeneous pressure-strain model in the near wall region. While looking at high-Reynolds number flows, it was found necessary to modify the effect of the relaxation operator throughout the log region by accounting for gradients of the flatness variable and turbulent length scales. These effects are kinematic blocking of the wall normal velocity fluctuation and pressure reflections from the surface. This model is wall distances and unit vectors which make the model applicable to flows boundary by a complex geometry. Inhomogeneous correction model is computed inertial and non-inertial channel flow. These are compared DNS(Kim et al., Kristoffersen & Andersson) for channel flow. The present model could be predicted well for rotating flows.

### 1. 서론

2차모멘트 난류모형은 전단, 회전, 곡률 그리고 성층화가 있는 유동장에서 엄밀한 난류 생성항을 얻는 것이 가능하며, 복잡한 난류 유동장에서 레이놀즈응력방정식 모형이 와점성계수 모형보다 향상된 예측을 하는 것은 기존의 많은 연구로부터 검증된 사실이다. 그럼에도 불구하고 산업적 응용에 있어서 2차모멘트 난류모형보다 와점성계수 모형이 많이 응용되고 있는 것은 2차모멘트 난류모형이 복잡한 형상이나 높은 레이놀즈수의 유동에서 많은 문제점들을 가지고 있기 때문이다.

2차모멘트 난류모형은 물리적이고 역학적으로 접근하기 위하여 몇 가지 제한조건을 만족시켜야 하며, 이것은 복잡한 형상을 가지는 산업적 응용문제에 적용이 가능한 모형으로 모형화 되어야 한다. 이들 제한조건과 형상에 종속되지 않는 모형의 요건은 (1)벽함수 사용 억제 (2)벽벡터의 사용 억제 (3)이론적 모형계수 선정 (4)벽면극한조건 만족 (5)실행가능성조건 만족 (6)좌표계 불변조건 만족 등이다. 그러나 기존 모형들 중 이와 같은 조건을 모두 만족시키며 보다 정확한 해를 보장해 주는 압력변형률 모형은 찾아보기 힘들다. 예를 들면 SSG 모형[1]의 경우 벽면극한 조건을 만족시키지 못하며, 비선형 모형인 LT 모형[2]은 벽함수와 벽벡터를 사용한다는 것이다. 그리고 최근에 개발되어진 Craft & Launder[3] 모형은 벽벡터를 사용하지는 않지만 모형이

복잡하고 그 모형계수에 벽함수를 인위적으로 DNS자료에 맞추는 모형이 되어 모형의 일반성이 보장되지 못한다.

또한 이와 같은 압력변형률 모형의 공통된 특징은 확산항을 제외한 모든 항들이 대수적으로 해의 국부적인 값과 관련되어지기 때문이다. 국부적인 개념은 유동속도의 비균질성과 벽에 작용하는 매우 큰 난류구조에 정반대의 개념이다. 이런 접근 방법과는 대조적으로 Durbin[4]은 큰 와동들에 있어서 벽 블록킹 현상을 설명할 수 있는 비국부적 모형인 타원완화방정식과 더불어 준균질 압력변형률과 결합시켜 벽면 부근의 특징들을 DNS[5]의 결과와 비교하여 만족스러운 결과를 얻을 수 있었다.

Durbin의 모형은 타원완화방정식에 있어서 균질 가정을 적용함으로써 기존의 준균질성 압력변형률을 원천항으로 하고 있으며 벽 부근의 비균질성은 벽조건으로부터 보장된다. 이것은 대수영역과 국부적인 특징을 가지고 있는 벽 경계조건을 적용함으로써 타원완화방정식의 해를 구할 수 있다. 그러나 Durbin의 타원완화모형 뿐만 아니라 이후 발표된 타원완화방정식은 균질유동을 가정하여 모형화 되어져 왔다. 그러나 본 연구에서는 비균질 접근 방법으로 비균질 수정 난류모형을 원천항으로 하는 모형을 도입하였다. 그리고 비균질 수정 모형은 관성유동 및 비관성 회전유동에서 다른 타원완화방정식과 비교 검토되어질 것이다.

### 2. 난류모형

#### 2.1 지배방정식

엄밀히 유도되어진 레이놀즈응력방정식과 완화압력변형률방

\* 고려대학교 대학원, khchun@korea.ac.kr

\*\* 고려대학교 기계공학과, ydchoi@korea.ac.kr

\*\*\* 동해대학교 자동차공학과, jkshin@mail.donghae.ac.kr

정식은 다음과 같은 관계를 가지고 있다.

$$\frac{D \overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} + R_{ij} + D_{ij}^v + D_{ij}^t + F_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon \quad (1)$$

여기서

$$F_{ij} = \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \Phi_{ij} + D_{ij}^b = -\frac{1}{\rho} \left( \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} \right) \\ &= \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{p u_i}{\rho} \delta_{jk} + \frac{p u_j}{\rho} \delta_{ik} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$P_{ij} = - \left( \overline{u_k u_i \frac{\partial U_j}{\partial x_k}} + \overline{u_k u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} \right) \quad (4)$$

$$R_{ij} = -2\Omega_k \left( \overline{u_j u_m e_{ikm}} + \overline{u_i u_m e_{jkm}} \right) \quad (5)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} - \overline{u_i u_j u_k} \right) \quad (6)$$

좌표계에 독립적 형태로 작용하는 타원완화방정식은 완화압력변형률  $F_{ij}$  을 타원완화방정식의 해인  $f_{ij}$ 로부터 얻을 수 있다.

$$f_{ij} - L^2 \nabla^2 f_{ij} = \frac{F_{ij}^h}{k} \quad (7)$$

여기서

$$F_{ij} = k f_{ij} \quad (8)$$

$$L = C_L \max \left( \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_T \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right) \quad (9)$$

$f_{ij}$ 는 매개변수(intermediate variable)로 엄밀하게 구한 벽 경계조건과 벽에서 먼 영역에서의 균질성 난류를 대수영역에서 비선형적으로 연결시켜주는 역할을 한다.

## 2.2 비균질 수정 타원완화방정식

Durbin의 타원완화방정식 모형과 이후 발표된 타원완화방정식의 수정된 모형들이 원천항의 모형을 결정하기 위하여 모두 균질유동 가정을 사용하였기 때문에 타원완화방정식의 원천항에 균질 압력변형률 모형을 적용하는 것이 가능하다. 그러나 비균질유동 상태를 적용하면 타원완화방정식의 원천항에 새로운 비균질 압력변형률 모형이 요구된다. 따라서 본 연구에서는 타원완화방정식에 비균질 유동을 적용하여 타원완화방정식을 수정하였다.

$$\Phi_{ij} - L^2 \nabla^2 \Phi_{ij} = -\frac{L^2}{\rho} \Psi_{ij} \quad (10)$$

$$\Psi_{ij} = - \left( \overline{u_i \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_j}} - \overline{u_j \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_i}} \right) \quad (11)$$

균질 난류를 고려하면, 식(10)의 왼쪽 둘째 항  $\nabla^2 \Phi_{ij} = 0$

이 되고 우변 원천항은 준균질 난류모형으로 대체될 수 있다. 그러나 엄밀히 말해서 타원완화방정식 모형의 원천항은 비균질 모형을 적용하여야 한다. 따라서 본 연구에서는 비균질 가정 ( $\nabla^2 \Phi_{ij} \neq 0$ )을 사용하여 타원완화방정식을 모형화 하였다. 식(11)의  $\Phi_{ij}$ 와  $\Psi_{ij}$ 를 다음과 같이 균질난류와 비균질난류로 나눌 수 있다.

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^h + \Phi_{ij}^{inh}, \quad \Psi_{ij} = \Psi_{ij}^h + \Psi_{ij}^{inh} \quad (12)$$

식(10)에 식(12)을 대입하면 다음과 같은 균질 부분과 비균질 부분에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_{ij}^h = -\frac{L^2}{\rho} \Psi_{ij}^h \quad (13)$$

$$\Phi_{ij}^{inh} - L^2 \nabla^2 \Phi_{ij}^{inh} = -\frac{L^2}{\rho} \Psi_{ij}^{inh} \quad (14)$$

여기서  $L^2 \nabla^2 \Phi_{ij}^h = 0$ ,  $L^2 \nabla^2 \Phi_{ij}^{inh} \neq 0$  이다. 식(14)에서  $\Phi_{ij}^{inh}$ 를 구해야 하는데 이와 같은 값을 알기 위해서는 식(14)의 우변항을 모형화하여야 한다. 본 연구에서는 비균질 모형에 대하여 Launder & Li[6]가 완충영역(buffer layer)에서 비균질성 난류를 모형화하기 위하여 사용한 유효속도구배와 같은 형태의 모형을 확장 적용하였다.

$$f_{ij} - L^2 \nabla^2 f_{ij} = \frac{\Phi_{ij}^h + \Phi_{ij}^{inh}}{k} + \frac{2b_{ij}}{T} \quad (15)$$

$$\Phi_{ij}^{inh} = C^{inh} L^2 \frac{\partial f(A)}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_{ij}^h}{\partial x_k} \quad b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (16)$$

여기서 원천항에 대한 압력변형률 조사에서  $\Phi_{ij}^h$ 의 6가지 모형을 평가하였다. 선형 모형으로  $IP+Rotta$ [7],  $LRR$ [8] 그리고 저속항만 비선형 모형인  $SSG$  모형과 저속항과 고속항이 모두 비선형항인  $FLT$ [9],  $LT$ [2] 그리고  $CL$ [11] 조사한 결과 타원완화방정식과 가장 잘 결합되는 모형이  $SSG$  모형으로 조사되어졌다. 따라서 본 조사에서는 원천항으로 압력변형률 모형을  $SSG$  모형으로 적용하였다.  $SSG$  모형이 타원완화방정식의 원천항으로 비선형 모형보다 좋은 결과를 예측하는 것은 비선형 모형들이 벽함수를 사용하여 비균질 모형화 되어졌기 때문이며, 벽함수를 포함하는 모형은 타원완화방정식의 원천항으로 적용하는 경우 경계조건에 의한 비균질성과 충돌하기 때문이다.

## 2.3 경계조건

타원완화방정식의 벽 경계조건은 압력확산을 경계조건이 포함하는 것이다. 기존에는 압력확산을 압력변형률과 분리하여 난류확산과 같이 모형하거나 다른 항에 비하여 작아 무시하는 방법을 택하였다. 그러나 본 연구에서는 압력확산과 압력변형률을 더하여 벽 경계조건을 유도하고 원천항의 적용에서는 압력확산이  $y^+ > 40$ 인 경우 그 영향이 적기 때문에 모형이 따로 요구되지 않는다. 또한 타원완화방정식을 적용함으로써 비균질성 난류가 이론적으로 접근이 가능하다는 것이다. 본 연구에서 적용한 경계조건은 우선 벽 근방에서 레이놀즈응력과 소멸률텐서의 관계식과 이들 항의 벽면거동을 식(2)에 대입하고,  $k$ 와  $\varepsilon$ 의 벽 거동 관계가  $k/\varepsilon = y^2/2\nu$  이므로 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$f_{11} = f_{33} = 0, f_{22} = -5 \frac{\overline{u_2 u_2}}{T k}, f_{12} = -2 \frac{\overline{u_1 u_2}}{T k} \quad (17)$$

$$T = \max\left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right) \quad (18)$$

여기서  $C_T = 6.0$ 이 일반적으로 사용된다. 이 값은  $y^+ < 6$  보다 작은 경우는  $C_T(\nu/\varepsilon)^{1/2}$ 이  $k/\varepsilon$  보다 크며  $y^+ \geq 6$ 인 경우는  $k/\varepsilon$ 에 의해서 지배된다. 본 연구에서는  $f_{22}$ 와  $f_{12}$ 를 벽면의 첫 번째 격자 값 보다 작은 값을 사용하여 벽면에서 특이 점을 피하기 위한 목적으로 사용하였다.

### 3. 결과 및 고찰

본 연구는 산업적 응용 열유체 문제에 있어서 복잡한 형상에 적용이 가능하며, 높은 레이놀즈수에서 안정성을 보장하고, 벽면 근방에 발생하는 비균질성과 비등방성 난류 특징을 예측할 수 있는 2차모멘트 난류모형 개발을 목적으로 하였다. 그리고 이와 같은 2차모멘트 난류모형은 앞서 제시한 모형이 가져야 하는 제한조건을 만족하여야 된다. 이런 측면에서 이들을 잘 만족시키는 압력변형률 모형이 타원완화방정식이다.

그러나 본 연구에서 타원완화방정식을 균질 가정을 사용하여 타원완화방정식의 원천항에 준균질 모형을 적용하는 경우, 벽면 근방에서 레이놀즈응력  $\overline{uu}$ 가 작게 예측되었으며 벽에 수직한 성분인  $\overline{vv}$ 와 벽에 평행한 성분인  $\overline{ww}$ 의 차이가 작게 예측되는 현상을 보였다. 이것은 타원완화방정식의 원천항에 준균질 모형을 적용하였기 때문으로 조사되었다. 그러나 본 연구에서는 비균질 가정을 적용하여 원천항에 비균질 수정항을 추가함으로 벽면 근방에서의 레이놀즈응력과 회전유동에서 향상된 결과를 얻을 수 있었다.

Figure 1은 Durbin의 원형모형[4]과 Manceau 등[13] 그리고 본 연구에서 개발한 비균질 수정 모형을 평판 채널 유동장에서 비교한 것이다. 여기서 타원완화방정식 모형의 영향만 고려하기 위하여 소멸률방정식을 풀지 않고 DNS[5] 자료를 보간하여 적용한 결과이다. 본 모형이 벽면에서 원형모형보다 레이놀즈응력이 향상되어진 것을 알 수 있으며, Manceau 등의 모형은 벽면 근방에서는 좋은 예측을 보이나 벽에서 먼 영역에서 DNS[11] 보다 높게 예측하였다. Figure 2는  $Re_\tau = 590$ 에 대한 평판 채널유동을 회전이 없는 경우에 대하여 레이놀즈응력을 조사한 것이다. 원형모형이 주요동방향의 응력에 대하여 작게 예측하고 있으며,  $u_2$ 와  $u_3$ 의 차이가 DNS와 비교하여 작게 예측하는 반면 본 비균질 수정 모형은 DNS와 잘 일치하는 결과를 보였다.

회전유동장에 대한 모형의 평가에서 Figure 3은 Durbin의 원형모형과  $Ro = 0.2$ 에서 비교한 것이다. 원형모형이 흡입면에서 층류화 현상을 과다하게 예측하고 있으며 압력면에서 낮은 레이놀즈응력을 보이고 있다. 그러나 비균질 수정을 통한 결과에서 DNS[12]와 비교하여 향상된 결과를 얻을 수 있었다. Figure 4-5는 비균질 수정 모형을 이용하여 회전수에 대한 주유동속도와 전단응력을 DNS와 비교한 것으로 높은 회전수  $Ro \geq 0.2$ 에서는 좋은 결과를 보이나 보다 낮은  $Ro \sim 0.05$  영역에서는 흡입면에서 층류화 현상을 잘못 예측하였다.

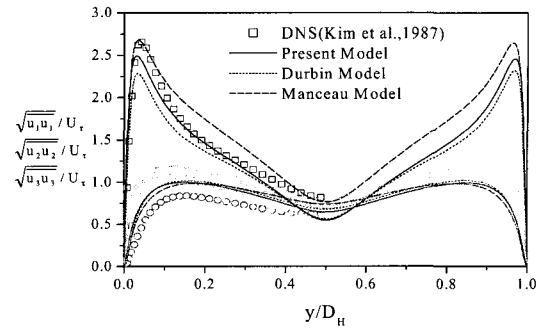


Figure 1. Normal Reynolds stress distribution predicted by elliptic relaxation equation in channel flow for  $Re_\tau = 180$ .

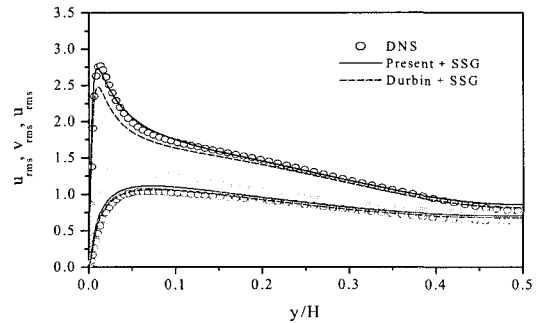


Figure 2. Normal Reynolds stress distribution predicted by elliptic relaxation equation in channel flow for  $Re_\tau = 590$ .

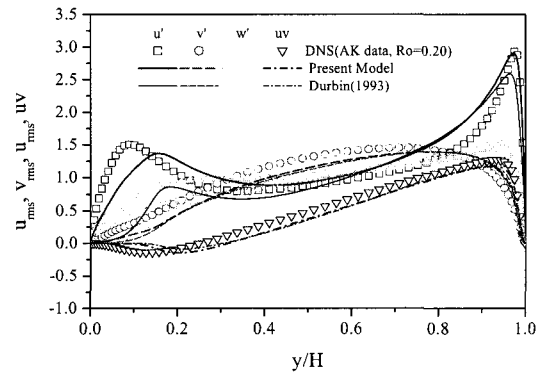


Figure 3. Reynolds stresses with elliptic relaxation equation in rotating channel flow for  $Re_\tau = 194, Ro = 0.20$ .

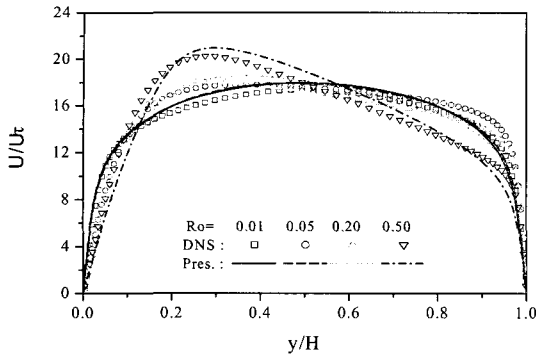


Figure 4. Mean velocities for increasing rotating rates with elliptic relaxation equation in rotating channel flow for  $Re_{\tau} = 194$ .

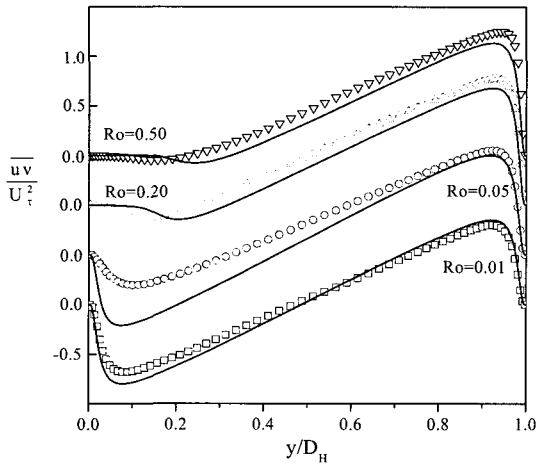


Figure 5. Shear stresses for increasing rotating rates with elliptic relaxation equation in rotating channel flow for  $Re_{\tau} = 194$ .

#### 4. 결론

본 연구는 기존 타원완화방정식이 가지는 균질 가정을 통한 접근 방법이 아닌 비균질 접근을 통하여 비균질 수정 타원완화방정식 모형을 개발하였다. Durbin의 타원완화방정식과 이후 수정된 모형들이 원천항으로 준균질 압력변형을 모형을 사용하고 길이척도와 그 구배를 이용하여 종속변수가 포함된 Helmholtz 방정식의 항을 변형하거나 추가하는 것은 좋은 결과를 얻을 수 없으며, 원천항을 비균질 모형으로 처리하였을 경우 보다 향상된 결과를 얻을 수 있었다. 이것은 압력변형률 모형이 지수함수를 사용하여 Helmholtz 방정식으로부터 유도된 타원완화방정식 보다는 원천항의 적용시 균질 가정을 적용하여 준균질 모형을 사용한 것이 전체 해에 미치는 영향이 크다는 것을 의미한다.

회전유동에서 본 연구에서 개발한 비균질 수정 타원완화방정식이 원형모형보다 압력면과 흡입면에서 DNS[12]와 잘 일치하는 결과를 얻었다. 또한 회전수를 증가시키며 회전효과에 대한 영향을 조사한 결과 높은 회전수( $Ro \geq 0.2$ )에서 좋은 결과를

예측하였으나 낮은 회전수(0.05) 영역에서는 흡입면에서 층류화 현상을 잘 못 예측하였다. 이에 대한 원인은 본 논문에는 조사되지 않았으며 등방성 소멸률방정식이 원인인 것으로 고려되어진다.

#### 후기

본 연구는 “고려대학교 특별연구비에 의하여 수행되었음 (2001-2002)”, 이에 대하여 고려대학교 관계자 여러분께 감사드립니다.

#### 참고문헌

- [1] Speziale, C. G., Sarkar, S. and Gatski T. B., "Modeling the pressure-strain correction of turbulence : an invariant dynamical system approach," J. Fluid Mech., Vol. 227(1991), pp. 245-272.
- [2] Launder, B.E. and Tselepidakis, D.P., "Progress and paradoxes in modelling near-wall turbulence", Proc.8th Turbulent Shear Flow Symposium, Munich, 2(1991),29.1.1.
- [3] Craft, T. J. & Launder, B. E., "A Reynolds stress closure designed for complex geometries," J. of Heat and Fluid Flow Vol.17(1996), pp. 245-254.
- [4] Durbin P.A., "A Reynolds stress model for near-wall turbulence," J. Fluid Mechanics, Vol.249(1993), pp. 465-498.
- [5] Kim, J., Moin, P. and Moser, R., "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number," J. Fluid Mech., Vol.177(1987), pp. 133-166.
- [6] Launder, B.E. and Li S.-P., "On the elimination of wall-topography parameters from second-moment closure", The Physics of Fluids, 6(1994), p. 999.
- [7] Naot, D., Shavit, A. and Wolfshtein, M., "Two point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses", Phys. Fluids, Vol.16(1973), pp. 738-743.
- [8] Launder, B.E., Reece, G.J. and Rodi, W., "Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure", Journal of Fluid Mechanics, 68(1975), p. 537.
- [9] Fu, S. Launder B. E. and Teselepidakis, P. D., "Accommodation the effects of high strain rates in modelling the pressure strain correlation," Report. TDF/87/5, Mech. Engineering Dept, UMIST, Manchester.(1987)
- [10] Craft, T. J. & Launder, B. E., "Computation of impinging flows using second moment closures," 8th Symp. TSF, Munich, 8-5(1991).
- [11] Moser, R. D., Kim, J. and Mansour, N. N., " Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_{\tau} = 590$ ," Phys. Fluids, Vol.11(1999), pp. 943-948.
- [12] Kristoffersen, R and Andersson, H., "Direct simulation of low-Reynolds number turbulent flow in a rotating channel," J. Fluid Mech., Vol. 256(1993), p. 163.
- [13] Mancau, R., Wang, M. and Laurence D., "Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in Reynolds-averaged Navier Stokes modeling," J. Fluid Mech., Vol. 437(2001), pp. 307-338.