

큰에디모사법을 이용한 최적 디퓨저내의 난류유동 해석

임석현*·최해천**

Large Eddy Simulation of Turbulent Flow in an Optimal Diffuser

Seokhyun Lim* and Haecheon Choi**

Key Words : Mathematical theory (수학적 이론), Optimality condition (최적 조건), Maximum pressure recovery (최대 압력 회복), Large eddy simulation (큰에디모사법), Zero-skin friction (벽면무마찰력)

Abstract

Using a mathematical theory, we show that the optimality condition of a turbulent diffuser with maximum pressure recovery at the exit is zero shear stress along the wall. The optimal diffuser shape is designed through iterative procedures by using the $k-\varepsilon-v^2-f$ turbulence model for flow simulation. The Reynolds number based on the bulk mean velocity and the channel height at the diffuser entrance is 18,000. We also perform large eddy simulation to validate the shape design results and investigate the flow characteristics near the zero-skin friction wall. Results from large eddy simulation show that the skin friction is slightly higher than zero but is still very small as compared to that of the flat plate boundary layer flow. Although the time-averaged wall shear stress is slightly above zero along the diffuser wall, instantaneous flow reversals occur intermittently. The streamwise mean velocity shows an asymptotic behavior of the half-power-law near the wall where the skin friction is close to zero.

1. 서론

디퓨저는 유체기계나 풍동, 비행기 엔진 등의 중요한 요소로서 단면적을 증가시켜서 유동속도를 줄이고 압력수두를 회복시키는 장치이다. 그러나 디퓨저의 폭을 점점 더 증가시키게 되면 벽면을 따라 심한 역압력구배가 생기게 되므로 운동에너지가 작은 벽근처의 유동은 이 역압력구배를 이기지 못하고 역류를 하게 되면서 유동박리영역이 생기게 된다. 이 유동박리는 디퓨저의 유로를 좁아지게 하는 효과를 가져오게 되므로 이로 인해 압력손실이 오게된다. 따라서 높은 성능의 디퓨저를 설계하기 위하여서는 이러한 유동박리를 방지하면서 최대한 디퓨저의 폭을 증가시켜야 하며, 따라서 최대의 성능을 가지는 디퓨저내의 유동은 유동박리가 생기지 직전의 영역이 된다. 따라서 이러한 영역의 유동, 즉 역압력구배 구간에서 벽면 마찰력이 거의 0에 가까워질 때의 유동특성이 관심의 대상이 되어왔다.

Stratford[1, 2]는 난류경계층유동에서 유동박리가 일어나기 직전인, 벽면마찰력이 0이 되는 영역에서 벽면 가까이 평균 유동속도의 제곱이 벽면에서의 거리에 비례함을 유도하고 경계층이론을 이용하여 모든 영역에서 벽면마찰력이 0일때의 압력분포를 이론적으로 구하였다. 또한 실험적으로 디퓨저의 벽면의 형상을 조금씩 변형시켜가면서 역압력구배가 생기는 구간에서 벽면마찰력이 0이 되도록 하는 형상을 구하였다. Mellor &

Gibson[3]은 벽면마찰력이 0인 난류경계층의 속도분포를 나타내는 상사해를 구하였다. Dengel & Fernholz[4]는 역압력구배가 있는 난류경계층의 벽면마찰력이 0 근처에 있을 때의 난류 유동의 특성을 실험적으로 연구하였고, Rakesh & Ram[5]은 확대각이 8° 인 직선 원추형 디퓨저내의 난류유동의 특성에 대해서 실험적으로 연구하였다.

본 연구에서는 먼저 시행착오에 의한 방법이 아닌 수학적 이론을 이용한 체계적인 형상설계 알고리즘을 이용하여 출구에서의 압력회복값이 최대가 되는 난류 평균 디퓨저의 최적형상을 설계하였다. 형상설계 시 형상변화에 따른 반복계산이 필요하게 되므로, 반복계산 시 유동박리가 존재하는 유동장에서도 비교적 잘 맞다고 알려진 $k-\varepsilon-\overline{v^2}-f$ 난류모델[6]을 사용하여 유동장을 구하였다. 또한 이렇게 해서 구해진 최적형상에 대해서 큰에디모사법(large eddy simulation; LES)을 이용하여 그 결과를 검증하였으며, 이와 같은 방법으로 구현된, 벽면마찰력이 0이 되는 난류유동장의 특성에 대해서 고찰해 보았다.

2. 이차원 난류 디퓨저의 최적형상 설계

2.1 제어이론 및 알고리즘

Fig. 1은 이차원 평균 디퓨저를 도식화한 것이다. 디퓨저의 입구와 출구의 폭은 각각 h_1, h_2 이다. Γ_I, Γ_O 는 디퓨저의 입구와 출구 경계면을, Γ_M 은 디퓨저 벽면 중에서 형상설계 부분으로 가변적인 벽면을, Γ_F 는 디퓨저 벽면의 고정된 경계면을

* 서울대학교 정밀기계설계공동연구소 난류제어연구단, limsh@stokes.snu.ac.kr

** 서울대학교 기계항공공학부, choi@socrates.snu.ac.kr

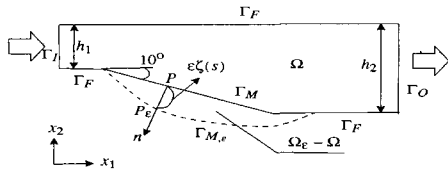


Fig. 1 Schematic diagram of a diffuser

나타낸다. Ω 는 디퓨저의 내부영역을 나타낸다. $\zeta(s)$ 는 Γ_M 을 따른 호의 길이 s 에 대한 임의의 함수이며, 각 점에서 벽면에 수직한 방향으로의 길이를 나타낸다. Γ_M 의 각 점들이 바깥쪽 수직방향으로 $\varepsilon\zeta(s)$ 만큼 움직여서 생긴 새로운 디퓨저의 벽면형상을 $\Gamma_{M,\varepsilon}$ 이라 한다. 이때, ε 은 아주 작은 양수이다.

디퓨저의 내부 난류유동의 평균유동장은 다음과 같은 RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) 방정식을 만족시킨다.

$$U_{i,i} = 0$$

$$U_j U_{i,j} = -P^*_{,i} + [(\nu + \nu_t)(U_{i,j} + U_{j,i})]_{,j} \quad (1)$$

여기서 U_i 는 시간평균속도를, ν 는 동점성계수를, ν_t 는 와류점성계수(eddy viscosity)를, P^* 는 $P/\rho + 2/3k$ 를, P 는 시간평균압력을, k 는 난류운동에너지를, ρ 는 밀도를 나타낸다. 레이놀즈수는 $Re = U_m h_1/\nu$ 와 같이 정의된다. U_m 은 Γ_I 에서의 유량평균속도이다.

본 연구에서는 주어진 초기 형상에 대하여 출구에서의 압력회복을 최대화시키는 디퓨저 벽면의 형상, 즉, Γ_M 의 형상을 찾고자 하는 것이 목적이며, 목적함수를 다음과 같이 정의한다.

$$J(\Gamma_M) = \int_{\Gamma_I} P U_i n_i ds + \int_{\Gamma_O} P U_i n_i ds \quad (2)$$

여기서 n_i 는 면에 대한 바깥쪽 수직방향 단위 벡터이다.

여기서, 식 (2)의 목적함수 $J(\Gamma_M)$ 이 최대가 되도록 하면 출구에서의 압력회복을 최대화시킬 수 있다.

디퓨저의 경계면이 Γ_M 에서 $\Gamma_{M,\varepsilon}$ 으로 변함에 따른 식 (2)의 목적함수 J 의 변화량을 δJ 라 하자. 다음과 같은 adjoint 방정식을 만족시키는 adjoint 변수 Z_i 를 도입하면,

$$Z_{i,i} = 0$$

$$[(\nu + \nu_t)(Z_{i,j} + Z_{j,i})]_{,j} + U_j(Z_{i,j} + Z_{j,i}) - Q_{,i} = 0 \quad (3)$$

δJ 는 다음과 같이 간단한 형태로 표시될 수 있다.

$$\delta J = \nu \int_{\Gamma_M} \zeta \frac{\partial U_i}{\partial n} \frac{\partial Z_i}{\partial n} ds \quad (4)$$

이때

$$\zeta(s) = w(s) \frac{\partial U_i}{\partial n} / \frac{\partial Z_i}{\partial n} \quad (5)$$

라고 정의하면 δJ 는 항상 양의 값을 가진다. 이때 $w(s)$ 는 음수가 아닌 가중함수(weighting function)이다. 즉, 식 (5)에 의해서 구해진 $\zeta(s)$ 의 크기를 따라 벽면을 움직여 새로운 형상을 얻게되면(Fig. 1), 목적함수 J 는 항상 증가하게 된다. 또한 디퓨저 벽면을 따라 모든 점에서 $\partial U_i / \partial n$ 이 0이 되면 더 이상 목적함수 J 는 증가하지 않으며, 이때의 형상이 최적형상이 된다. 여기서 Z_i 는 adjoint 속도변수를, Q 는 adjoint 압력변수를 나타낸다.

다음은 출구에서의 압력회복이 최대가 되는 디퓨저의 최적형상을 설계하는 알고리즘이다.

(a) 디퓨저의 초기 형상(Obi et al.의 디퓨저[7])을 가정한다.

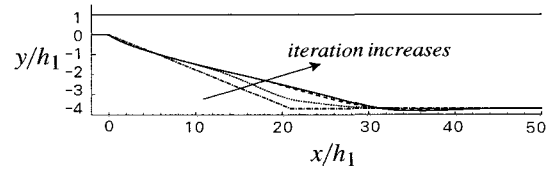


Fig. 2 Evolution of the shape of a diffuser at successive iterations: ···, iteration=0; ---, iteration=20; - · - ·, iteration=100; - - - , iteration=200.

- (b) 디퓨저 내부에 격자를 생성한다.
- (c) RANS 방정식과 adjoint Navier-Stokes 방정식을 풀어서 속도장과 adjoint 속도장을 구한다.
- (e) 디퓨저 벽면을 따라 식 (5)에서 $\zeta(s)$ 를 구한다. 이때, 본 연구에서는 가중함수 $w(s)$ 를 cosine함수로 설정하였으며 디퓨저의 형상설계부분의 양끝에서 $\zeta(s)$ 가 0이 되도록 하였다.
- (f) 디퓨저 벽면의 각 점들을 $\varepsilon\zeta(s)$ 만큼 바깥쪽 수직방향 (n) 으로 움직여 새로운 형상을 얻는다. 본 연구에서 사용된 ε 은 디퓨저입구 폭의 1~5%로 하였다.
- (g) 목적함수 (2)가 수렴될 때까지 (b) 이하를 반복 계산한다.

2.2 형상설계 결과

RANS 방정식을 이차원 비압축성, 정상유동에 대하여 계산을 수행하였다. RANS 방정식과 adjoint 방정식을 엇갈림 격자형태에 대해서 Quick scheme을 사용하여 차분화하였고, 속도와 압력장의 분리방법은 SIMPLER 알고리즘을 사용하였다. 와류점성계수(eddy viscosity)는 $k-\varepsilon-\nu^2-f$ 난류모델을 사용하여 구하였다.

Fig. 2는 초기 형상에서 계산을 수행함에 따라 최종적으로 최적의 디퓨저 형상으로 변해가는 과정을 보여주고 있다. 디퓨저의 초기 형상을 Obi et al.[7]이 실험한 디퓨저의 형상으로 설정하였으며, 형상설계부분은 디퓨저의 아랫벽면 중에서 $x=0\sim 40$ 인 부분이며 이 부분의 벽면 형상이 매 반복계산횟수마다 변할 때 내부 영역에 격자를 자동생성시켰다. 주유동방향으로는 150개, 벽수직방향으로는 70개의 비균일 격자를 배열하였다. 계산은 출구와 입구의 압력차이가(즉, 목적함수 (2)의 값이) 더 이상 변하지 않을 때까지 수행하였다. 반복계산횟수가 100이상일 때 디퓨저 형상이 거의 수렴함을 볼 수 있다.

Fig. 3에서는 본 연구에서 얻어진 형상이 최적형상인지를 알아보기 위하여 벽면에서의 $\partial U / \partial n$ 분포를 살펴보았다. 초기 형상에서는 벽면마찰력이 음수가 되는 유동박리영역이 넓게 존

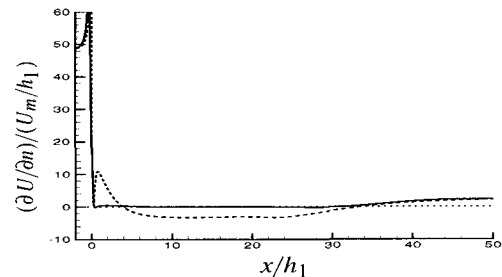


Fig. 3 Distribution of $\partial U / \partial n$ along the lower wall of the diffuser: ···, initial shape; - · - ·, optimal shape.

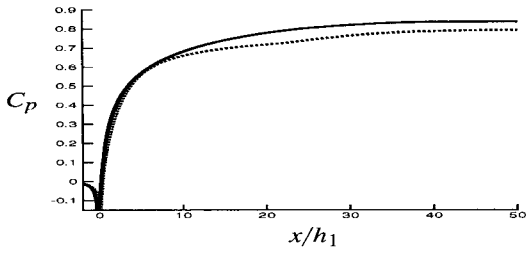


Fig. 4 Distribution of the wall pressure along the lower wall of the diffuser: —, initial shape; ---, optimal shape.

재하는 것을 볼 수 있으며, 최적형상에서는 벽면마찰력이 형상 설계구간의 모든 점에서 거의 0이 됨을 알 수 있다. Fig. 4는 초기형상과 최적형상 디퓨저의 아래쪽 벽면을 따라서 압력분포를 그린 것이다. 최적형상에서는 형상설계구간에서 유동박리를 제거하여 출구에서 보다 높은 압력을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

3. 크에디모사법을 이용한 최적 디퓨저내의 난류유동 해석

3.1 수치해석 방법

본 연구에서 구한 최적 디퓨저에 대해서 크에디모사법을 이용하여 그 결과를 검증하였다.

시간 적분은 점성항의 벽 수직방향은 내재적(implicit) 분할 시간단계 방법인 Crank-Nicholson 방법을, 나머지 항들은 외재적(explicit) 분할 시간단계 방법인 3차의 Runge-Kutta 방법을 사용하였다. 공간적으로는 유동방향과 벽수직방향으로는 2차의 정확도를 갖는 중심 차분법을 적용하였고, 폭방향으로는 Fourier-collocation 방법을 사용하는 복합방법을 사용하였다. 위의 모든 수치해석방법은 Kaltenbach *et al.*[8]의 방법과 동일하다. 계산시간간격은 $\Delta t = 0.02h_1/U_m$ 의 고정된 시간간격을 사용하였다.

3.2 계산영역, 격자계 및 경계조건

크에디모사법(LES)을 사용하여 검증하고자 하는 최적 디퓨저의 형상은 디퓨저의 출구 폭(h_2)이 $4.7h_1$, 디퓨저의 길이(L)는 $40h_1$ 이다. 디퓨저의 계산영역은 유동방향으로는 $x/h_1 = -2.5 \sim 50$, 폭방향 길이는 $z/h_1 = 4$ 인 영역에 대해서 계산을 수행하였다. 계산에 사용된 격자수는 유동방향, 벽수직방향, 폭방향으로 각각 376, 64, 128개의 격자를 사용하였다. 계산 영역의 폭방향길이 및 격자수는 Kaltenbach *et al.*[8]이 Obi 디퓨저에 대해서 크에디모사법을 사용하여 계산한 결과를 참조하여 결정하였다. 디퓨저의 입구유동은 완전발달된 난류 채널유동이 들어오게 되며, 이때, 평균유량속도와 채널반폭으로 정의된 레이놀즈수 $Re = U_m h_1/\nu$ 는 18,000이다.

3.3 결과 및 토의

Fig. 5는 최적 디퓨저 형상에 대해서 $k-\epsilon-\nu^2-f$ (V2F) 난류모델을 이용하여 계산한 결과와 크에디모사법을 이용하여 계산한 결과와 비교한 그림이다. 그림에서 볼 수 있듯이, 벽마찰

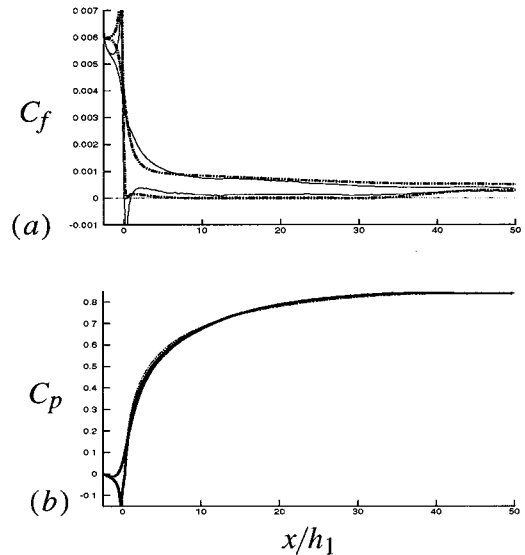


Fig. 5 Comparison with V2F results: (a) skin friction coefficient; (b) pressure coefficient. ---, LES; - · -, V2F.

력과 벽 압력 분포의 두 결과가 비교적 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 벽마찰력의 경우, 난류모델을 이용하여 계산한 결과는 디퓨저의 아랫벽면을 따라서 $x/h_1 = 0 \sim 32.5$ 인 영역에서 거의 0인 반면에 크에디모사법을 사용하여 계산한 결과는 전체적으로 0보다 약간 큰 양수의 값을 가지는 것을 볼 수 있다. 그러나 여전히 매우 낮은 값의 벽마찰력을 가지는 것을 볼 수 있다. 또한 LES를 이용한 결과에서는 디퓨저가 시작되는 지점인 $x/h_1 = 0$ 인 부근에서 매우 작은 구간($x/h_1 = 0 \sim 1$)에서 벽마찰력이 0보다 작은 값을 가짐으로써 아주 작은 크기의 유동박리가 존재한다는 것을 볼 수 있는데, 이는 난류모델을 이용하여 계산한 결과에는 나타나지 않는다. 채널과 디퓨저가 만나는 지점에서 디퓨저 벽면의 갑작스런 확대로 이러한 유동박리영역이 생겨나는 것을 알 수 있다. 그러나 압력분포의 경우, 난류모델을 써서 계산한 결과와 LES를 이용한 결과가 거의 정확히 일치하는 것을 볼 수 있다. 따라서 난류모델을 써서 계산한 결과가 비교적 정확한 결과임을 확인할 수 있었다.

지금부터는 디퓨저벽면에서 거의 모든 점에서 벽마찰력이 0에 가까운 작은 값을 가질 때 난류유동장은 어떤 성질을 가지는지에 대해서 LES를 이용하여 얻은 결과를 바탕으로 고찰해보기로 하겠다. Stratford[1]는 벽면마찰력이 0인 난류유동장에서 벽면근처에서의 평균 속도는 다음과 같이 벽면으로부터의 거리의 제곱근에 비례함을 보였다.

$$U = \left(\frac{4}{\rho K_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

이 식을 다음과 같이 무차원화 하면,

$$u_p^3 \equiv \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u^+ \equiv \frac{U}{u_p}, \quad y^+ = \frac{\nu u_p}{\nu} \quad (7)$$

식 (6)은 다음과 같이 된다.

$$u^+ = \frac{2}{K_0} (y^+)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

여기서, K_0 는 0.5이다.

Fig 6은 디퓨저 내부의 속도분포를 식 (8)과 비교한 그림이다.

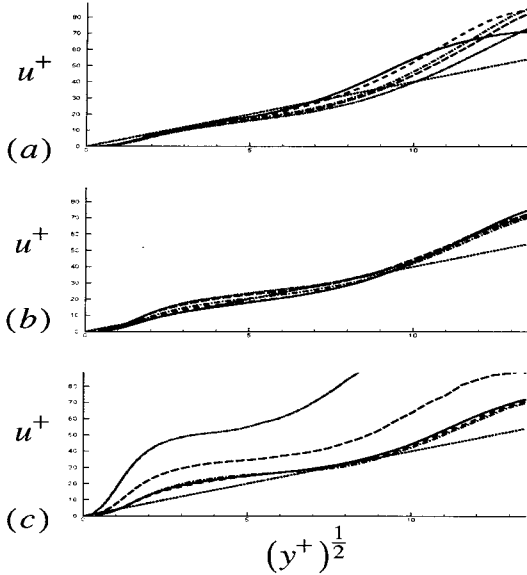


Fig. 6 Comparison with the half-power law (....., $u^+ = \frac{2}{K_0} (y^+)^{\frac{1}{2}}$): (a) ---, $x/h_1 = 2.5$; ----, $x/h_1 = 5$; - - -, $x/h_1 = 7.5$; - · - ·, $x/h_1 = 10$; - · - ·, $x/h_1 = 12.5$; (b) ---, $x/h_1 = 15$; ----, $x/h_1 = 17.5$; - - -, $x/h_1 = 20$; - · - ·, $x/h_1 = 22.5$; - · - ·, $x/h_1 = 25$; (c) ---, $x/h_1 = 27.5$; ----, $x/h_1 = 30$; - - -, $x/h_1 = 32.5$; - · - ·, $x/h_1 = 35$; - · - ·, $x/h_1 = 37.5$.

그림에서 볼 수 있듯이 $x/h_1 = 32.5$ 인 지점까지는 식 (8)에 근접하는 분포를 가지는 영역이 존재함을 알 수 있다. 그러나 그 이상에서는 벽면마찰력이 0에 가까운 값에서 점점 커지게 되므로 식 (8)의 선으로부터 상당히 떨어져 감을 볼 수 있다.

Fig. 7은 역류비율(γ)을 디퓨저의 벽면을 따라서 그린 그림이다. 역류비율은 전 시간에 대해서 유동이 역류하는 비율을 나타내는 것으로 그림은 벽면 마찰력이 음이 되는 비율을 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 디퓨저 입구의 아주 작은 영역을 제외하고는 평균유동장에서의 벽면마찰력이 모두 양임에도 불구하고 전 시간에 대해서 유동장을 살펴보면 디퓨저 입구인 $x/h_1 = 0$ 인 근처에서 아주 작은 유동박리영역이 존재하므로 이 부근에서는 유동박리비율이 70%에까지 달하며 이 비율은 급격히 줄어들어 이후에 40%정도를 유지하다가 서서히 감소함을 알 수 있다. 또한 벽면마찰력이 비교적 큰 윗벽면에서도 10%미만의 유동박리가 생기는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 난류평판 디퓨저에서 디퓨저 출구에서의 압력이 최대가 되도록 하는 디퓨저의 형상을 수학적 이론을 이용하여 설계하였다. 형상설계 시, 유동장의 계산은 $k-\epsilon-v^2-f$ 난류모델을 사용하여 연구를 수행하였다. 디퓨저의 초기형상은 실험 및 LES를 통하여 이전에 연구되어진 비대칭 디퓨저를 설정하였으며, 디퓨저 입구에서는 완전발달된 난류 채널 유동이 들어오며 이때의 평균 속도와 디퓨저의 입구쪽으로 정의된 레이놀즈수는 18,000이다. 본 연구에서는 이 형상을 초기형상으로 하여 최적형상을 설계하였다. 최적 디퓨저에서는 초기 형상에 존재하던 유동박리 영역이 완전히 제거되고 디퓨저의 벽면을 따라 벽면 마찰력이 거의 0이 됨을 확인할 수 있었고, 그 결과 최대의 압력회복을 가지는 디퓨저의 최적형상을 설계할 수 있었다.

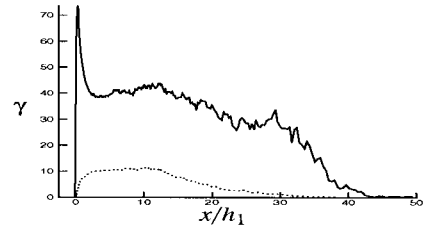


Fig. 7 Distribution of the reverse flow factor along the walls: ---, lower wall; —, upper wall.

본 연구에서 구한 디퓨저의 최적형상결과를 검증하기 위하여 얻어진 최적형상에 대해서 LES를 사용하여 연구를 수행하였다. 벽면 마찰계수 및 압력 분포 등이 V2F를 이용한 결과와 비교적 잘 일치함을 볼 수 있었다. LES 결과 난류모델을 이용하여 계산한 결과와 달리 형상설계구간에서 벽면 마찰력이 0보다 약간 높은 값이 나왔으나 여전히 매우 낮은 값을 나타내고 있었다. 벽면 마찰력이 0에 가까운 영역에서는 벽근처의 속도가 벽면으로부터의 거리의 제곱근에 비례함을 확인할 수 있었다. 시간평균한 유동장에서 유동박리가 존재하지 않는 부분에서도 벽면 근처에서 순간적으로 역류가 발생하였다. 벽면마찰력이 거의 0에 가까운 부분에서는 이 비율이 40%이하로 유지되면서 서서히 감소함을 알 수 있었다.

후 기

이 연구는 과학기술부 창의적연구진흥사업의 지원 하에 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] Stratford, B. S., "The prediction of separation of the turbulent boundary layer", J. Fluid Mech., Vol. 5, (1959), pp. 1 - 16.
- [2] Stratford, B. S., "An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise", J. Fluid Mech., Vol. 5, (1959), pp. 17 - 35.
- [3] Mellor, G. L. & Gibson, D. M. "Equilibrium turbulent boundary layers", J. Fluid Mech., Vol. 24, (1966), pp. 225 - 253.
- [4] Dengel, P. & Fernholz, H. H. "An experimental investigation of an incompressible turbulent boundary layer in the vicinity of separation", J. Fluid Mech., Vol. 212, (1990), pp. 615 - 636.
- [5] Rakesh, K. S. & Ram, S. A., "Asymptotic velocity defect profile in an incipient separating axisymmetric flow", AIAA J., Vol. 33, (1995), pp. 94 - 101.
- [6] Durbin, P., "Separated flow computations with the k-e-v2 model", AIAA J., Vol. 33, (1995), pp. 659 - 664.
- [7] Obi, S., Ohimuzi, H., Aoki, K., & Masuda, S., "Experimental and computational study of turbulent separating flow in an asymmetric plane diffuser", 9th Symposium on Turbulent Shear Flows, Kyoto, Japan, Aug. (1993), pp. P305-1 - P305-4.
- [8] Kaltenbach, H.-J., Fatica, M., Mittal, R., Lund, T. S. & Moin, P., "Study of flow in a planar asymmetric diffuser using large-eddy simulation", J. Fluid Mech. Vol. 390, (1999), pp. 151 - 185.