

Pseudospectra를 이용한 평행 평판 사이 유동에서 가장 불안정한 경우

최상규*·정명균**

The most unstable case in plane Poiseuille flow on transition by using pseudospectra method

Sangkyu Choi* and Myung Kyoon Chung**

Key Words : Stability, Plane Poiseuille flow, Pseudospectra, Fibonacci search

Abstract

The most unstable situation of laminar plane Poiseuille flow for transition to turbulence is investigated by using a pseudo-spectral method. A number of various disturbance modes are tested and it is found that the flow is the most unstable when it is disturbed by an oblique wave with an angle of 29.7°.

1. 서 론

천이란 규칙적이고 완만한 층류로부터 임의적이고 혼돈적인 난류로의 전이를 말한다. 천이의 연구는 1883년 Reynolds⁽¹⁾의 실험에 의해 층류가 난류로 되기 전에 천이과정이 있음을 보여 준 이후 시작되었다. 유동의 속도가 느릴때는 유동이 서로 섞이지 않고 완만히 흐르나 속도가 빨라지면 유동이 서로 섞이게 된다. 앞서 말했듯이 유동이 섞이지 않고 완만히 흐르는 것을 층류라 하고 유동의 속도가 빨라져 유동이 섞이는 것을 난류라 하며 층류에서 난류로의 전이 과정을 천이라 한다. 또한 Reynolds는 이러한 천이과정은 Reynolds 수라 하는 무차원 수가 일정값 이상이 되어야만 일어난다는 사실도 보여 주었다.⁽¹⁾

유동 제어의 측면에서 볼때 이러한 천이 현상을 이해하는 것은 매우 중요하다. 예를 들어 비행기에서는 유동 저항을 줄이기 위해서 비행기 주변의 유동이 층류인 것이 바람직하나, 연소나 화학적 혼합, 혹은 유동의 박리를 방지하기 위해서는 유동이 난류인 것이 바람직하다. 이러한 유동의 제어를 위해서는 유동의 불안정성 및 천이의 정확한 이해가 필수

적이다. 특히 최근에는 경계층 유동장에서의 불안정성과 천이현상에 대한 국제적인 관심이 매우 증폭되고 있다. 그 이유는 가스 터빈 엔진의 베인의 설계와 자동차, 비행기, 잠수함 등과 같은 수송기관의 외형 설계, 아음속과 초음속의 항공기 등의 설계와 밀접하게 연관되어 있기 때문이다. 예로 터빈 날개의 경우 천이 길이가 코드의 약 80%정도를 차지하고 있다. 이 천이영역동안에 마찰계수와 열전달 계수가 몇배로 증가하게 되는데, 이때 열전달이나 압력손실 같은 물리량을 구하기 위해서는 반드시 천이 현상을 고려해야만 한다. 특히 외부유동장의 경우 천이 현상을 이해해야만 aerodynamic loads (양력, 항력 및 모멘트들)와 가열조건을 정확히 예측할 수 있다. 예를 들면 천이현상이 정확히 파악되면 유동 조작성의 방법을 통해서 천이를 지연시킴으로써 낮은 항력을 얻게 되고, 이로 인해 수송기계의 에너지 변환 효율을 향상시킬 수 있다.

Reynolds (1883)의 실험 이후 지금까지 100여년이 넘도록 많은 사람들에 의하여 천이에 관한 연구가 이루어져왔다. 초기 Rayleigh(1880)⁽²⁾에 의해 비점성에 관한 이론이 개발되었다. 그러나 이러한 비점성에 관한 이론은 실제 유동인 점성유동에 관한 근사식으로써는 의미가 있으나 점성유동의 복잡한 현상은 설명할 수 없었다. Orr(1907)와 Sommerfeld(1908)에 의해서 점성유동에서의 선형안정방정식이 정립되었다.⁽²⁾ 그러나 이방정식은 4차의 상미분방정식으로 그해를 구하기가 매우 어려워 오랫동안 풀지 못했

† 한국과학기술원

E-mail : skchoi@kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3054 FAX : (042)869-3095

* 한국과학기술원

다. 그러나 Tollmien(1929)과 Schlichting(1930)에 의해서 독자적으로 그해가 구해졌다.⁽²⁾ 이를 기념하여 이해를 Tollmien-Schlichting wave 또는 TS wave라 한다. 그러나 당시의 실험에 의하면 천이의 시작은 TS wave처럼 2차원적이지 않고 3차원적인 현상을 보였다. 대부분의 인위적 조작을 가하지 않는 실험에서는 streamwise streak이 형성된다. 이와 같은 실험에서 streamwise 속도의 크기만을 살펴보면 oblique wave 형상을 볼 수 있다. 따라서 실험을 중시하던 영미계열에서는 TS wave를 방정식의 해일뿐 실제 현상과는 관련이 없다고 생각했었다. 그러나 1940년 미국 표준국의 Dryden에 의해서 자유유동난류강도가 0.02% 정도인 풍동이 고안되었고 이 풍동에서 Schubauer와 Skramstad(1948)가 vibrating ribbon을 이용하여 TS wave에 의한 천이를 보여 주었다.⁽³⁾ 이후 선형 안정성 이론은 천이를 연구하는데 중요한 도구가 되었다. 이러한 이론은 Lin(1945)⁽²⁾ 등에 의해 보다 발전하게 되었다. 그러나 이러한 이론을 너무 믿었던 관계로 자유유동난류강도가 1% 이상인 경우의 3차원적인 천이현상이 무시되었다. 이러한 때에 Morkovin(1969)은 TS wave를 건너뛰는 'bypass' 천이가 있다고 말했다. 또한 Klebanoff는 천이에서 3차원 교란이 매우 중요함을 보여 주었다.⁽⁴⁾

천이는 크게 두가지로 natural transition과 bypass transition으로 나눌 수 있다. 나누는 기준은 자유유동난류강도가 1% 이하일 때는 natural transition이고 1% 초과일 때는 bypass transition이라 한다.

1950년대 이후 계산에 컴퓨터를 이용함으로써 천이에 관한 이론적 연구의 결과가 많이 나오게 되었다. 이러한 계산은 Jordinson(1970)⁽⁴⁾ 등에 의해서 상당히 정립되었다. Orszag(1971)⁽⁵⁾는 Chebyshev polynomial을 이용한 정밀한 계산을 통하여 plane Poiseuille인 경우 임계 Reynolds 수가 5772 임을 밝혀 내었다. 그러나 이러한 연구는 천이가 TS wave 즉 2차원적 현상에 의해서 시작된다고 가정한 것이다. 그러나 bypass천이 등에서 보듯이 일반적인 천이는 3차원적인 현상이다. 천이가 2차원적 현상에 의해서 시작된다는 이론적 근거는 Squire(1933)⁽²⁾의 정리이다. 그러나 이는 2차원적 교란에 의해서 천이가 일어날 수 있음을 말할 뿐이지 3차원적 교란에 의해서 천이가 일어날 수 없음을 말하는 것은 아니다. 실제 일정 시간 안에 최대의 에너지를 얻을 수 있는 것은 3차원적 교란이며 이러한 교란에 의한 천이가 2차원적 교란에 의한 천이보다 천이에 도달하는데 에너지가 적게 든다.

이러한 3차원적 교란에 의해 천이가 일어날 수 있음을 밝힌 이론은 처음 Ellingsen과 Palm(1975)⁽⁶⁾이 비점성유동에서 유동방향의 3차원 교란이 시간에 따

라 선형적으로 증가함을 밝힌 논문이다. 이후 Landahl(1980)⁽⁷⁾은 유동방향의 적분 운동에너지는 벽면의 직각 방향의 운동량이 0이 아니라면 시간에 따라 선형적으로 증가함을 밝혔다. 또한 Hultgren과 Gustavsson(1981)⁽⁸⁾은 점성경계층유동에서 초기의 늘어진 구조 (elongated structure)의 대수적 성장은 Orr-Sommerfeld식의 연속 스펙트럼과 관련이 있음을 밝혔다.

한편 실험에서는 Carlson(1982)⁽⁹⁾ 등은 plane Poiseuille flow의 임계 Reynolds 수는 1000 근방임을 보였다. 이는 선형 안정성 이론에 의한 5772와 큰 차이가 있다. 실험과 이론이 불일치하는 대표적 예에는 plane Couette flow와 pipe flow (Hagen-Poiseuille flow)가 있다. 이들은 선형안정성이론에 따르면 항상 안정하다. 그러나 실험에 의하면 임계 Reynolds 수는 각각 350, 2000 부근이다.

위에서 보듯이 전통적인 선형안정성이론과 실험은 잘 일치하지 않는다. 그러나 선형의 효과는 천이에서 중심적인 역할을 하게 된다. 이러한 모순은 "pseudospectra"의 개념을 이용하여 Trefethen(1993)⁽¹⁰⁾ 등이 해결하였다. Pseudospectra의 개념은 고유치 문제에 일종의 민감도 문제를 고려하는 것이다. 예를 들면 $Aq = \lambda q$ 에서 행렬 A 에 임의의 작은 교란 ϵ 이 들어 갔을 때 고유치 λ 가 어떻게 변화하는지를 살펴보는 것이다. 유체의 안정성에서 고유치만을 고려하게 되면 유체의 과도상태를 고려하지 못하게 된다. 그러나 고유벡터가 서로 nonnormal한 경우 과도상태에서 큰성장을 보일 수 있다. Navier-Stokes식 또한 nonnormal하기 때문에 과도상태의 성장 여부를 살펴 보아야 하고 이르기 위해서는 pseudospectra 해석이 필요하게 된다.

위에서 말한 것과 같이 pseudospectra의 개념을 유체의 안정성 해석에 처음 적용한 사람은 Trefethen(1993)⁽¹⁰⁾이다. 그는 plane Poiseuille와 plane Couette flow에서 안정성 해석에 pseudospectra 해석이 필요함을 말했다. 그리고 Reddy et al.(1993)⁽¹¹⁾ 등은 plane Poiseuille flow에서 보다 자세한 pseudospectra 해석을 수행하였다. 또한 Trefethen et al.(1999)⁽¹²⁾ 등은 pipe Poiseuille에 대해서도 pseudospectra 해석을 하였다.

이에 우리는 pseudospectra 개념을 plane Poiseuille flow의 천이에서 가정 불안정한 경우를 해석해 보고자 한다.

2. 연구방법

2.1 점성선형안정식

Navier-Stokes 식으로부터 Orr-Sommerfeld 식을 유

도하고 이를 다시 고유치식으로 바꾸어 계산에 사용하였다.⁽¹³⁾

경계조건은 다음과 같다.

$$v = v' = \eta = 0 \quad (\text{벽, far field})$$

여기서 교란을 다음과 같이 가정하자.

$$v(x, y, z, t) = \tilde{v}(y)e^{i(ax + \beta z - \omega t)} \quad (1)$$

$$\eta(x, y, z, t) = \tilde{\eta}(y)e^{i(ax + \beta z - \omega t)} \quad (2)$$

α, β 각각 유동방향과 스펙트럼방향의 파동수(wave number)이고 ω 는 주파수를 나타낸다. (1)과 (2) 식을 Navier-Stokes 식에 대입하면 (이는 수평방향으로 Fourier 변환을 취하는 것과 같다) \tilde{v} 와 $\tilde{\eta}$ 에 대하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\left[(-i\omega + iaU)(D^2 - k^2) - iaU' - \frac{1}{Re}(D^2 - k^2)^2 \right] \tilde{v} = 0 \quad (3)$$

$$\left[(-i\omega + iaU) - \frac{1}{Re}(D^2 - k^2) \right] \tilde{\eta} = -i\beta U \tilde{v} \quad (4)$$

여기서 $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ 이다. 또한 $D = \frac{d}{dy}$ 이다. (3)식은 Orr-Sommerfeld식이라 하며 (4)식은 Squire 식이라 한다.

다음과 같은 벡터량을 도입하자.

$$\begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix}$$

이를 이용하여 Orr-Sommerfeld 식과 Squire 식을 행렬식으로 만들면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & -i\omega \begin{bmatrix} k^2 - D^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} L_{OS} & 0 \\ i\beta U & L_{SQ} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 L_{OS} 와 L_{SQ} 는 다음과 같다.

$$L_{OS} = iaU(k^2 - D^2) + iaU' + \frac{1}{Re}(k^2 - D^2)^2 \quad (6)$$

$$L_{SQ} = iaU + \frac{1}{Re}(k^2 - D^2) \quad (7)$$

고유치 식 (17)은 다음과 같이 될 수 있다.

$$\tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$L\tilde{q} = i\omega M\tilde{q} \quad (9)$$

$$L_1\tilde{q} \equiv M^{-1}L\tilde{q} = i\omega\tilde{q} \quad (10)$$

여기서 M, L 은 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} k^2 - D^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_{OS} & 0 \\ i\beta U & L_{SQ} \end{bmatrix} \quad (12)$$

2.3 Pseudospectra 정의

Orr-Sommerfeld식과 Squire 식의 고유값을 수치적으로 구할 때 안정방정식에서 작은 교란에 대한 그들의 민감도 문제를 고려할 필요가 있다. 이러한 교란의 대표적 두가지 원인은 연속적인 방정식을 차분화 함으로써 생기는 것과 컴퓨터 계산의 유한성 때문에 생기는 것이다.

이전의 연구에 의하면 Orr-Sommerfeld spectrum은 작은 교란에 매우 민감함이 밝혀졌다. 이러한 민감성은 nonorthogonal 한 eigenfunction 때문이다. Nonorthogonal한 eigenfunction을 가지고 있는 계의 특성은 모든 고유값이 안정하더라도 과도상태에서 큰 성장을 할 수 있다. 이러한 가능성을 살펴 볼 수 있는 방법이 pseudospectra 해석이다.

Pseudospectra의 정의는 다음과 같다.

정의 1. 만약 z 가 $\bar{A} = A + E$ 의 고유치라면 z 는 A 의 ϵ -pseudo-eigenvalue라 한다. 여기서 $\|E\| \leq \epsilon$ 이다.

정의 2. 만약 z 가 $\|(zI - A)^{-1}\| \geq \epsilon^{-1}$ 을 만족한다면, z 는 A 의 ϵ -pseudo-eigenvalue이다

정의 1과 정의 2는 같은 것이다. (Reddy et al. (1993))

본 논문에서 우리는 pseudospectra를 살펴보기 위하여 resolvent norm을 구하였다. 이것은 일종의 변환으로써 어떠한 입력에 대하여 출력이 어떻게 되는지를 살펴보는 방법이다. 즉 우리의 연구에서 plane Poiseuille에 임의의 작은 교란이 있을 때 그 결과가 어떻게 나타나는지를 살펴볼 수 있다.

2.4 Fibonacci search

우리는 가장 불안정한 상황을 찾기 위해서 Fibonacci search를 이용하였다. 즉 resolvent norm에서 불안정한 영역($C_i > 0$)으로 넘어가는 최소의 교란값을 찾는다. α, β 를 변화시키면서 불안정한 영역으로 넘어가는 가장 작은 교란값을 Fibonacci search를 이용하여 찾았다.

Fibonacci search의 방법은 다음과 같다.

$$(F_0=1, F_1=1, F_i=F_{i-2}+F_{i-1})$$

① 얼마나 많은 관찰을 할지 정하라. 그리고 이수를 n 이라고 하자.

② 찾고자 하는 범위를 I_0 라 하자. 그리고 I_0 안에 한쪽 끝에서부터 $I_0(F_{n-1}/F_n)$ 의 거리가 되는 곳에 첫번째 관찰을 놓자.

③ 존재하는 관찰에 대칭 되는 한 점에 불확정한 간격 안에 다음 관찰을 놓자. 이러한 관찰들의 상대적인 값에 따라, 오른쪽 점의 오른쪽 영역 또는 왼쪽 점의 외쪽 영역을 버리자. 점을 계속해서 놓고

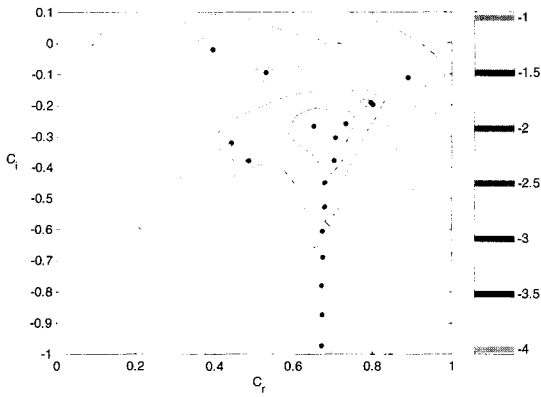


Fig. 1 Resolvent norm contours and spectrum of plane Poiseuille flow at $\alpha=1$, $\beta=0$, $Re=1000$

놓을 점이 하나 남을 때까지 영역을 버리자. 이단계에서 불확정한 간격의 중앙에 한 관찰이 있을 것이다.

④ 마지막 관찰은 가능한 이 중심점에 가까이 놓자. 그리고 간격의 반을 제거하자.

3. 결론

Fig. 1는 $Re=1000$, $\alpha=1$, $\beta=0$ 일때의 plane Poiseuille flow의 resolvent norm과 Orr-Sommerfeld Spectrum을 보여주는 그림이다. resolvent norm은 작은 가진을 주었을때 spectrum이 변할 수 있는 범위를 나타내 주는 것이다. 좌표축으로 phase velocity를 잡아 주었다. 우리는 교란을 식 (1)과 같이 가정하였었다.

$$v(x, y, z, t) = \tilde{v}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad (1)$$

여기서 $\omega = \alpha C$, C 는 phase velocity이다. 따라서 시간에 따른 안정성을 살펴보는 temporal stability의 경우 α 와 β 는 실수이고 ω 는 복소수 즉 C 는 복소수이다.

$$C = C_r + iC_i \quad (13)$$

식 (25)를 식 (13)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} v(x, y, z, t) &= \tilde{v}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \alpha(C_r + iC_i)t)} \\ &= \tilde{v}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \alpha C_r t)} e^{-\alpha C_i t} \end{aligned} \quad (14)$$

따라서 $\alpha > 0$ 인 경우 $C_i > 0$ 이면 시간에 따라 교란이 계속 성장함으로 불안정하게 된다.

Fig 1을 보면 Orr-Sommerfeld spectrum에서는 안정된 조건이라 하더라도 pseudospectra 해석으로 살펴보면 불안정 해 질 수 있음을 볼 수 있고 이는 기존의 실험과 이론이 불일치했던 모순을 해결해 줄 수 있었다.

그리고 평행 평판 사이의 유동이 난류로 전이 과

정에서 가장 불안정한 경우는 교란의 파가 29.7° 의 엇갈린 파의 형태임을 알았다.

참고문헌

- [1] Frank M. White, "Viscous fluid flow," McGraw-Hill, 2nd ed., 1991.
- [2] P. G. Drazin and W. H. Reid, "Hydrodynamic stability," Cambridge university press, 1981.
- [3] G. B. Schubauer and H. K. Skramstad, "Laminar-boundary-layer oscillations and transition on a flat plate," NACA Rep. 909, 1948.
- [4] R. Jordinson, "The flat plate boundary laryer. Part 1. Numerical integration of the Orr-Sommerfeld equation," J. Fluid Mech., Vol. 43, part. 4, pp. 801-811, 1970.
- [5] Steven A. Orszag, "Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation," J. Fluid Mech., Vol. 50, part 4, pp. 689-703, 1971.
- [6] T. Ellingsen and E. Palm, "Stability of linear flow," The Physics of Fluids, Vol. 18, No. 4, 487-488, 1975.
- [7] M. T. Landahl, " A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flow," J. Fluid Mech., Vol. 98, part 2, pp. 243-251, 1980.
- [8] Lennart S. Hultgren and L. Hakan Gustavsson, "Algebraic growth of disturbances in a laminar boundary layer," Phys. Fluids 24(6), 1000-1004, 1981.
- [9] D. Carlson, S. E. Widnall and M. F. Peeters, "A flow-visualization study of transition in plane Poiseuille flow," J. Fluid Mech. Vol. 121, 487-505 1982.
- [10] L. N. Trefethen, A. E. Trefethen, S. C. Reddy and T. A. Driscoll, "Hydrodynamic stability without eigenvalues," Science, Vol. 261, 578-584 1993.
- [11] S. C. Reddy, P. J. Schmid and D. S. Henningson, "Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator," SIAM J. APPL. MATH. Vol. 53, No. 1, 15-47, 1993.
- [12] A. E. Trefethen, L. N. Trefethen and P. J. Schmid, "Spectra and pseudospectra for pipe Poiseuille flow," Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1926, 413-420, 1999.
- [13] P. J. Schmid and D. S. Henningson, "Stability and transition in shear flows," Springer, 2001.