

KEB 경계층 유동의 유동특성 해석

이윤용*, 이광원**, 황영규***

Hydrodynamic Stability Analysis of KEB Boundary-Layer Flow

Yun-Yong Lee*, Kwang-Won Lee**, Young-Kyu Hwang***

Key Words : Hydrodynamic Stability(수동력학적 안정성), Instability(불안정성), Rotating Disk Flow(회전원판 유동)

Abstract

The hydrodynamic instability of the three-dimensional boundary-layer over a rotating disk has been numerically investigated for three cases flows using linear stability theory (i.e. Rossby number, $Ro = -1, 0,$ and 1). Detailed numerical values of the disturbance wave number, wave frequency, azimuth angle, radius (Reynolds number, Re) and other characteristics have been calculated for Kármán, Ekman and Bödewadt boundary-layer flows. Neutral curves for these flows are presented. Presented are the neutral stability results concerning the two instability modes (Type I and Type II) by using a two-point boundary value problem code COLNEW that was based upon the adaptive orthogonal collocation method using B-spline. The prediction from the present results on both instability modes among the three cases agrees with the previously known numerical and experimental data well.

1. 서론

회전유동장내 무한 디스크 위의 정상유동에 관한 3차원 경계층 유동은 Navier-Stokes 방정식의 엄밀해 (Kármán, Ekman 그리고 Bödewadt 경계층 유동, 이하 KEB 경계층 유동이라 함)를 얻을 수 있고, 전형적인 3차원 경계층의 하나이기 때문에 많은 이론적 및 실험적 연구에 의해 미소교란의 거동이 밝혀지고 있다. 3차원 경계층이 2차원의 경계층과 본질적으로 다르다. 원판의 회전에 따라 Kármán 경계층 내의 속도분포곡선에서는 변곡점을 가지는 반경방향 성분이 존재하며, 이에 따른 비점성형의 불안정성인 Cross-Flow 불안정성 (이하 C-F라 함)이 형성된다 [1]. 또한, C-F 불안정성의 동일한 표현인 정제된 와도관의 발달과 그 붕괴에 의한 2차적 불안정성 (secondary instability)의 형성으로 난류로의 전이는 회전원판 경계층 유동이나 후퇴익 경계층에서 넓게 관찰되고 있다 [2,3]. 회전원판 경계층과 유사한 속도분포를 가지는 Ekman 경계층에서는 진행파형의 불안정성도 관찰되어, C-F 불안정성 (Type I)에 대한 제 2형 불안정성이라 불리는 Type II 불안정성을 관찰하였다 [4]. 이 불안정성은 Parallel Instability 라고도 불리고 [5], 오랫동안 그 주된 요인이 확실하지 않았다.

정지한 원판상에 형성되는 Bödewadt 경계층 유동은 가스터빈의 냉각과 터보기계류의 임펠러 사이에서 형성되는 3차원 경계층 유동이며 [6], 이들 내에서 회전원판 상의 Ekman 경계층 유동과의 공존을 Owen 과 Roger [7]의 실험과 유동가시화 [6]

에 의하여 조사되었다.

최근, Itoh [8]는 3차원 경계층내에서 벽면에 평행한 부분에 있어서의 외부유선의 곡률에 기인한 원심력형의 불안정성도 존재하는 것을 선형안정성 이론에 의해 밝혀내고, 이것을 유선곡률 (Streamline-Curvature, 이하 S-C라 함) 불안정성이라 부르는 것과 동시에, Type II는 S-C 불안정성에 의한 진행파이며, 후퇴익 경계층이나 회전원판 경계층 등에서도 같은 종류의 불안정성이 생길 수 있는 것을 나타냈다.

본 연구에서는 KEB 경계층 유동내에서 선형안정성 이론에 의한 중립안정곡선을 구하고, 기존에 잘 알려진 결과와 임계점들을 상호 비교하고 유동 불안정성을 설명하고자 한다.

2. 지배방정식 및 수치 해법

2.1 기본유동 방정식

반 무한 회전원판 주위에 비압축성이며 균질한 유체속에 형성되는 일반적인 경계층을 로스비 (Rossby) 수로 표현하면 식 (1)과 같다 [9].

$$Ro = \frac{\Delta\omega}{\Omega} \quad (1)$$

여기서, $\Delta\omega = \omega_F - \omega_D$ 이고, 시스템 회전을 Ω 는 Faller [10]가 제시한 $\Omega = \omega_F / (2 - Ro) + \omega_D / (2 + Ro)$ 이다. 비정상 상태의 운동량 방정식을 ω_D 의 속도로 회전하고 있는 원통 좌표계로 표현하고 가속도항을 회전계와 관성계로 나누어 정리한다. 정상상태의 속도들과 압력을 상사 변환하여 무차원 상사함수

* 성균관대 기계공학부 연구원, yylee@mail.metric.or.kr

** 성균관대 대학원 기계공학부, jameslee@lgenc.co.kr

*** 성균관대 기계공학부 교수, ykhwang@yurim.skku.ac.kr

(F, G, H)로 표현된 기본 유동 방정식은 다음과 같이 가정한다.

$$U = \Delta \omega r F(z), V = \Delta \omega r G(z), W = \Delta \omega DH(z). \quad (2)$$

운동량 방정식들의 압력항은 Ro 와 코리올리스 수 Co 를 도입하여 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_t + Ro(F^2 + HF_z - (G^2 - 1)) - Co(G - 1) - F_{zz} = 0, \quad (3.a)$$

$$G_t + Ro(2FG + HG_z) + CoF - G_{zz} = 0. \quad (3.b)$$

연속방정식은

$$H = -2 \int_0^z F(z) dz \quad (4)$$

이고, 경계조건은

$$F(0) = G(0) = H(0) = 0, \quad F(\infty) = 0, \quad G(\infty) = 1. \quad (5)$$

2.2 안정성 방정식

선형 안정성 이론을 적용하여 기본유동의 각 속도 성분에 미소한 교란 항들을 중첩시켜 교란 방정식을 유도하였다. 여기서, 기본유동 항들을 식 (2)와 같이 정상상태로 취급할 수 있으며, 만약 초기유동을 고려한 경우라면, 기본유동 항은 비정상 상태로 처리해야만 한다.

점성 경계층내에서 발생하는 유동의 C-F 와도 표현은 안정성 방정식 r, θ, z 성분을 섭동 와도 ξ, η 로 표현하고 좌표 변환을 한다. 원관 주위 유동의 불안정성을 좌표 변환한 새로운 \hat{x} 축에 C-F 와도가 독립적인 2차원 와도라 가정하면, \hat{x} 에 대한 미분치들은 모두 '0'이 된다.

(r, θ)로 부터 (x, y) 좌표계 그리고 새로운 (\hat{x}, \hat{y})으로 좌표 변환하고 점성경계층 내에서 교란속도 방정식과 안정성 방정식은 Hwang 과 Lee [9]에서 사용한 방법과 같다.

연속 방정식을 교란 유동함수 ϕ 를 사용하여 다음의 식 (6)으로 나타낼 수 있다.

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \xi = \nabla^2 \phi. \quad (6)$$

그리고, 교란 속도 u 와 유동함수 ϕ 를 α_R, C_p 를 사용하여 다음의 식 (7)과 같이 가정하고, 교란방정식에 대입하면 안정성 방정식 식 (8)을 얻으며, 이 식은 복소수 6차인 제차 상미분 방정식이 된다.

$$u(y, z, t) = U(z) \exp[i(\alpha_R y - C_p t)], \\ \phi(y, z, t) = \Phi(z) \exp[i(\alpha_R y - C_p t)]. \quad (7)$$

x 방향의 교란속도 방정식과 안정성 방정식의 실수부와 허수부를 분리하면

$$\Phi_R'''' = Ro H \Phi_R'''' + (Ro H' + Ro F + 2\alpha_R^2) \Phi_R'' \\ + Ro [F' - H \alpha_R^2 - C(F' C + G' S)] \Phi_R'$$

$$- [Ro H' \alpha_R^2 + Ro \alpha_R^2 S(FS - GC)] \\ + Ro \alpha_R^2 C(GC - FS) + \alpha_R^4 \Phi_R \\ + [C_p + Re(FC + GS) \alpha_R] \Phi_I'' \\ - [C_p \alpha_I^2 + Re(FC + GS) \alpha_I^3 + Re(F'' C \\ + G'' S) \alpha_R] \Phi_I - (2Ro G + Co) U_R \\ + Ro [S(F' C + G' S) - 2G'] U_R. \quad (8.a)$$

$$\Phi_I'''' = Ro H \Phi_I'''' + (Ro H' + Ro F + 2\alpha_I^2) \Phi_I'' \quad (10.b)$$

$$+ Ro [F' - H \alpha_I^2 - C(F' C + G' S)] \Phi_I' \\ - [Ro H' \alpha_I^2 + Ro \alpha_I^2 S(FS - GC)] \\ + Ro \alpha_I^2 C(GC - FS) + \alpha_I^4 \Phi_I \\ - [C_p + Re(FC + GS) \alpha_I] \Phi_R'' \\ + [C_p \alpha_I^2 + Re(FC + GS) \alpha_I^3 + Re(F'' C \\ + G'' S) \alpha_I] \Phi_R - (2Ro G + Co) U_I \\ + Ro [S(F' C + G' S) - 2G'] U_I. \quad (8.b) \\ (10.b)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$(10.b)$$

$$U(0) = \Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \\ U'(\infty) = \Phi(\infty) = \Phi'(\infty) = 0. \quad (9)$$

2.3 수치해법

두 점 경계치 문제를 정확하게 만족하는 수치해를 구하기 위해 Orthogonal collocation 기법과 다중사격법(multiple shooting)이 이용되었으며, 컴퓨터 코드 COLNEW를 이용하였다 [11].

안정성 방정식과 경계조건을 실수부와 허수부로 분리하여 4계(order) 12차 방정식으로써 계산한다. 고유벡터로 취한 12개의 경계조건이 모두 '0'일 경우 무용해를 얻을 수 있으므로 수정된 경계 조건을 사용하여 원래의 경계조건을 만족시키는 벡터의 스퀴링이 매우 중요하다. 또한, 뉴턴 방법(Newton's method)을 이용하여 반복 계산함으로써 수렴하는 고유치들을 구한다. 이때 기본유동과 중립평면상의 고유값에 해당하는 중립점의 고유벡터는 B-spline으로 저장되었다가 새로운 계산을 위한 계수로 사용하였다. 본 연구에서 사용된 수치해석 방법은 Hwang 과 Lee [9]에서 사용한 방법과 같다. 위에서 제시한 수치해석 방법은 기본 유동이 정상상태 유동해이고 안정성 방정식이 상미분 방정식인 경우에 잘 적용된다.

3. 결과 및 고찰

3.1 기본유동에 대한 이론해석 결과

비압축성이며 균질한 유체가 무한 원관 주위에 형성될 때 원관의 회전 및 비회전인 로스비 수의 변화에 대한 Coriolis 수, 각속도의 비 그리고 시스템 회전율은 지수함수 또는 포물선적으로 감소하거나 증가하지만, 실제 유동상태는 그 조건이 대단히 상반되며 대표적으로 KEB 경계층 유동의 특성을 내포하고 있다.

로스비 수가 $Ro = -1, 0, 1$ 이 되면 Kármán, Ekman, 그리고 Bödewadt 경계층 유동이 되는데 Coriolis 힘은 Kármán과

Ekman 경계층 유동의 경우 $Co=2$, Bödewadt 경계층 유동에서는 $Co=0$ 으로 취하였다. $Co=0$ 으로 취하여 그 영향력이 없어진다고 해서 유동이 덜 복잡한 것은 아니다. 또한, 시스템 회전율의 크기는 Kármán(=Bödewadt) Ekman 경계층 유동이 된다. 따라서, 이러한 영향을 고려하여 기본유동을 수치모사 한 결과 Fig. 1~3과 같은 결과를 얻었다. 이들 그림에서 로스비 수에 따라 반경방향, 접선방향 그리고 축방향 무차원 속도분포의 크기는 화살표가 가리키는 방향으로 로스비 수가 커질수록 ($Ro=-1 \rightarrow 1$) 각 방향의 속도가 증가함을 볼 수 있다. 이것은 KEB 경계층 유동으로 발전할 경우 또는 유체 자체가 회전하는 경우, 주위유동이 원판의 점성력에 의해 회전하는 유동의 경우보다 훨씬 더 큰 원심력을 가짐을 의미한다. 또한 KEB 유동으로 발전할수록 무차원 속도 분포곡선에 존재하는 변곡점은 더욱 많아지며 상대적으로 크기가 커져 더욱 복잡한 유동이 됨을 알 수 있다. 즉, Kármán 이나 Ekman 경계층 유동보다도 주위 유체의 회전이 기본유동의 불안정을 초래할 가능성이 훨씬 높음을 알 수 있다. 뿐만아니라, 축방향의 유동은 원판 위의 무차원 두께 ζ 가 ∞ 로 갈수록 축방향 무차원 속도의 크기가 다르며, 이것은 원판을 향하여 움직이는 유체의 축방향 속도에 큰 변화가 있음을 알 수 있고, 유동에 계제된 교란의 불안정성을 야기할 동적인 근원이 된다고 판단된다. Fig. 3은 유체 자체의 회전 유동이 존재하는 Bödewadt 경계층 유동의 경우 Kármán 경계층 유동과 정반대의 속도 벡터를 가진다.

3.2 안정성 이론해석 결과

안정성 평면에 존재하는 다양한 방위각에 대하여 최외각 지점을 연결한 중립안정곡선은 Fig. 4~6에 나타내었다. 이 곡선의 내부는 불안정한 영역이 되며 외부는 어떠한 물리적인 조건하에서도 항상 안정한 영역을 유지하는 유동특성을 나타내고 있다.

Kármán 경계층 유동의 중립안정성해석으로부터 교란의 파수가 0.75이상에서는 항상 안정하다고 보고되었으며[9], 유동이 불안정할 수 있는 영역은 기존 연구자의 결과에 비해 약간 더 넓은 범위를 가지며, 보다 작은 레이놀즈 수에서 불안정해 질 수 있다. 그러나 두 경우 모두 선형안정성 이론에 근거한 합리적인 결과에 속하며, 원판의 회전으로 인한 경계층 내의 불안정성 영향은 미미하다 할 수 있는데 다만 Type II 형을 결정 짓는 상한의 범위는 다소 차이가 있다.

Ekman 경계층 유동의 Type I 과 Type II 불안정성은 Kármán 경계층에서의 그것과 유사하게 확연히 구별된다. Ekman 경계층에서의 기존 연구자의 결과와 본 연구의 결과는 거의 일치하고 있으며 이를 Fig. 5에 나타내었다.

Lilly [5]는 임계 레이놀즈 수 55와 방위각 -23° 에서 빠르게 전파해 가는 Type II 불안정성을 제시했고, Faller [10]는 $Re=54.3$, $\epsilon=-23.1^\circ$ 와 $\alpha_R=0.312$ 를 제시하였는데, 본 연구에서는 $Re=54.16$, $\epsilon=-23.4^\circ$ 와 $\alpha_R=0.32$ 이다.

Bödewadt 경계층 유동의 경우 Type I 과 Type II가 발생하는 임계 레이놀즈 수는 거의 구별되지 않지만 파수의 크기와 방위각은 반대인 구별되는 유동특성을 가지고 있다. 본 연구의 연구 결과는 기존 연구 결과보다 오히려 큰 레이놀즈 수를 갖는데 이는 유동 자체의 회전으로 인하여 내재된 유동 불안정성의 묘사가 평행유동 가정의 선형 안정성 이론의 접근에 많은 어려움을 대변하고 있다. 즉, 수렴을 시키기 위한 기본 유동의 무차원 경계층 두께를 무한히 길게 잡을 수 없고, 교란의 크기를 나타내는 증폭함수들이 커져 유한한 값으로 다루기 힘들기 때문이다.

Table 1은 KEB 경계층 유동에 대한 Type I wave의 임계

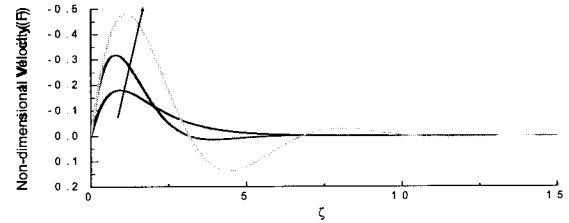


Fig. 1 Numerical solutions of radial direction of Base flow equations for the Kármán, Ekman and Bödewadt boundary-layer flow; $Ro=-1, 0$ and 1 , respectively. (The arrow indicates the direction of increasing Ro)

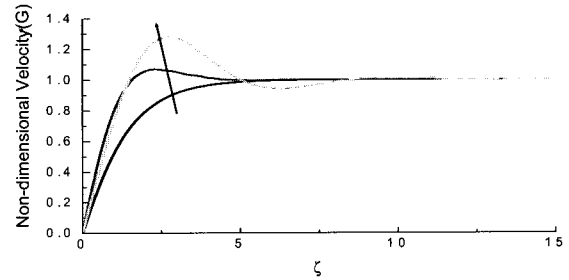


Fig. 2 Numerical solutions of tangential direction of Base flow equations for the Kármán, Ekman and Bödewadt boundary-layer flow; $Ro=-1, 0$ and 1 , respectively. (The arrow indicates the direction of increasing Ro)

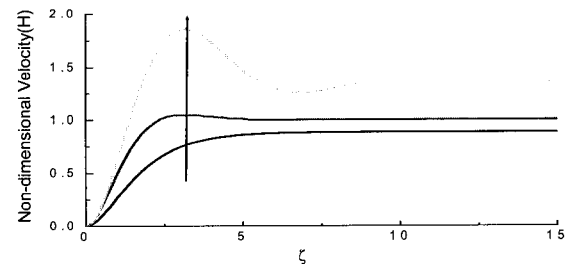


Fig. 3 Numerical solutions of axial direction of Base flow equations for the Kármán, Ekman and Bödewadt boundary-layer flow; $Ro=-1, 0$ and 1 , respectively. (The arrow indicates the direction of increasing Ro)

점들을 기존의 결과와 비교한 표이며 정성적으로 일치한다고 말할 수 있다. 다만, 본 연구의 결과 중 Ekman 유동의 방위각들이 상대적으로 좀 더 작은 값에서 불안정성이 관찰될 수 있음을 나타낸다. 이것은 Orr-Sommerfeld 방정식 ($Re=110$, $\alpha_R=0.5$, $\epsilon=6^\circ$)과 Lilly [5]의 수치해석결과 ($Re=110$, $\alpha_R=0.53$, $\epsilon=7.5^\circ$)와 거의 유사하다.

4. 결론

비압축성이며 균질한 유체가 무한 원판 주위에 형성될 때 원판의 회전 및 비회전인 KEB 경계층 유동에 대하여 유동의 불안정성 특성을 수치모사를 통하여 연구하고 다음과 같은 결론을

Table 1. Comparison of the values at the noses of the marginal curves for Type I instability.

Author	Ro	Re	α_R	ϵ
Faller [10]	-1	285.30	0.378	13.9
Lingwood [12]		290.10	0.381	11.4
Hwang & Lee [9]		270.22	0.386	13.3
Faller [10]	0	113.10	0.548	11.5
Lingwood [12]		116.30	0.528	14.5
Present		112.76	0.550	7.2
Faller [10]	1	-	-	-
Lingwood [12]		27.4	0.487	13.3
Present		34.5	0.470	8.2

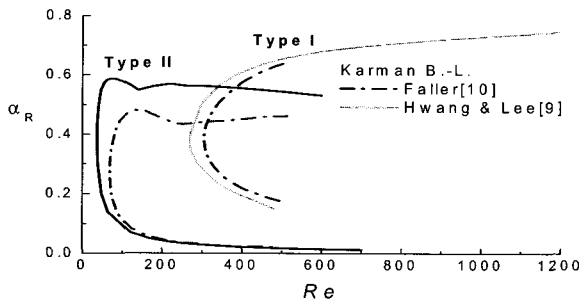


Fig. 4 Comparison of the neutral curves for the Kármán boundary-layer flow

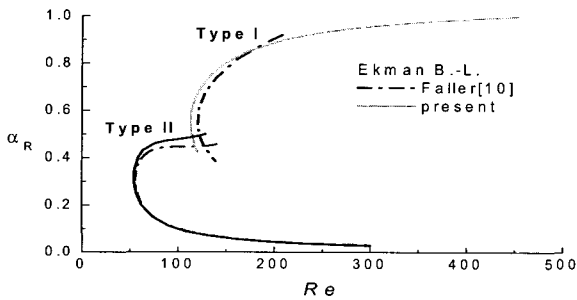


Fig. 5 Comparison of the neutral curves for the Ekman boundary-layer flow

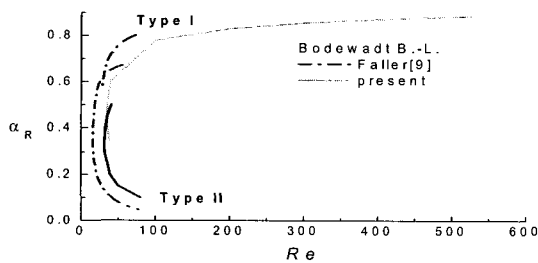


Fig. 6 Comparison of the neutral curves for the Bödewadt boundary-layer flow

얻었다.

로스비 수 $Ro = -1, 0$, 그리고 1 로 표시되는 KEB 경계층 유동의 중립안정곡선으로부터 제 1형의 불안정성에 대한 교란의 파수가 각각 $0.75, 1.0$ 그리고 0.9 이상에서는 항상 안정하며 기존의 결과와 비교할 때 정성적으로 잘 일치한다고 말할 수 있다.

Kármán 경계층 유동의 제 1형 불안정에서는 보다 큰 범위의 불안정 구간을 가지며, 보다 작은 레이놀즈 수에서 불안정해 질 수 있다.

Ekman 경계층 유동의 제 1형 불안정성은 Kármán 경계층 유동보다 더 작은 레이놀즈 수와 방위각에서 일어나며 임계파수의 크기는 상대적으로 증가한다.

Bödewadt 경계층 유동에 대하여는 제 1형 및 제 2형의 유동 불안정 임계점들은 더욱 작아져 제 1형과 제 2형의 구별이 확실치 않은 위치에서 발생한다.

KEB 경계층 유동에 대한 제 2형의 불안정성은 제 1형에 비해 파수의 크기가 상대적으로 작고 방위각이 음의 방향으로 이동하는 파형을 갖는다.

후 기

이 논문은 2002년도 두뇌한국사업 핵심분야사업비에 의하여 지원되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] Gregory, N., Stuart, J. T. and Walker, W. S., On the Stability of Three-dimensional Boundary Layers with Application to the Flow due to a Rotating Disk, Phil. Trans. Roy. Soc., Vol.248 (1955), pp.155-199.
- [2] Reed, H. L. and Saric, W. S., Stability of Three-Dimensional Boundary Layers, Ann. Review of Fluid Mechanics Vol.21 (1989), pp.235-284.
- [3] Kohama, Y. and Suda, K., Crossflow Instability in a Spinning Disk Boundary Layer, AIAA Journal, Vol.31 No.1 (1993), pp.212-214.
- [4] Faller, A. J., An Experimental Study of the Instability of the laminar Ekman Boundary Layer, J. Fluid Mech. Vol.15 (1963), pp.560-576.
- [5] Lilly, D. K., On the Instability of Ekman Boundary Flow, J. of the Atmospheric Science, Vol.23 (1966), pp.481-494.
- [6] Savas, ö., Stability of Bödewadt Flow, J. Fluid Mech. Vol.183 (1987), pp.77-94.
- [7] Owen, J. M. and Rogers, R. H., Flow and Heat Transfer in Rotating-Disc Systems, Vol.1:Rotor-Stator Systems, Ed. Morris, W. D., RSP, (1995), pp.1-6.
- [8] Itoh, N., Simple Cases of the Streamline-Curvature Instability in Three-Dimensional Boundary Layers, J. Fluid Mechanics, Vol.317 (1996a), pp.129-154.
- [9] Hwang, Y.-K. and Lee, Y.-Y., Theoretical Flow Instability of the Kármán Boundary Layer," KSME International J., Vol.14 No.3 (2000), pp.358-368.
- [10] Faller, A. J., Instability and Transition of Disturbed Flow over a Rotating Disk, J. Fluid Mech., Vol.230 (1991), pp. 245-269.
- [11] Bader, G. and Ascher, U., A New Basis Implementation for a Mixed Order Boundary O.D.E. Solver, Tech. Rep. 85-11, Dept. of Computer Science, U. of British Columbia, Vancouver, Canada, (1985).
- [12] Lingwood, R. J., Absolute Instability of the Ekman layer and related rotating Flows, J. Fluid Mech., Vol.331 (1997), pp. 405-428.