

격자볼츠만법을 이용한 2차원 압축성 충격파의 유동현상에 관한 수치계산

강호근*.노기덕**.손강필***.최민선****.이영호*****

Study on Analysis of Two-dimensional Compressible Waves by Lattice Boltzmann Method

Ho-Keun Kang*, Ki-Deok Ro**, Kang-Pil Son***, Min-Sun Choi****, Young-Ho Lee*****

Key Words : Compressible Flow(압축성유체), Computational Fluid Dynamic(전산유체역학), Pressure Wave(압력파), Shock Wave(충격파), Lattice Boltzmann Method(격자볼츠만법), Sound Wave(음파)

Abstract

In this study, simulation of weak shock waves are performed by a two-dimensional thermal fluid or compressible fluid model of the lattice Boltzmann method. The shock wave represents an abrupt change in fluids properties, in which finite variations in pressure, internal energies, and density occur over the shock thickness. The characteristics of the proposed model with a simple distribution function is verified by calculation of the sound speeds, and the shock tube problem. The reflection of a weak shock wave by wedge propagating in a channel is performed. The results agree well with those by finite difference method or by experiment. In the simulation of unsteady shock wave diffraction around a sharp corner, we show a flow field of vortical structure near the corner.

1. 서론

격자볼츠만법(Lattice Boltzmann Method, LBM)은 Navier-Stokes 방정식을 이용한 다른 수치계산법과는 차이가 있으며, 충돌과 이동을 반복하는 다수의 이산적 유체입자의 집합체로 생각해, 이것들의 규칙적인 운동을 계산함으로써 연속체로서의 유체 운동을 표현하는 계산방법이다.^{[1][2]} LBM에서는 공간, 시간, 입자의 이동방향 및 속도의 크기가 격자형상에 의해 이산화된다. 공간의 이산화는 공간의 등방성을 보전하기 위해 규칙적인 격자가 이용되며, 2차원에서의 격자는 동일 변의 격자선을 갖는 정삼각형 격자와 2종류의 정방형은 서로의 변이 교점에서 45°에서 교차하도록 구성된 정방격자로 대별되며, 3차원에서는 입방체 격자가 사용된다.

한편, 입자의 충돌과정에서 입자들의 운동에너지가 보존되는 모델, 즉 압축성 또는 열유체 모델들은 평형분포함수에서 적어도 유속의 3차항의 유체속도를 가져야 한다. Alexander 등^[3]이 제안한 2차원 육각격자상에서의 2속도 모델에서는, 유속의 3차항을 포함한 국소평형분포함수의 형태를 띠고 있다. 그러나 이러한 모델에서는 미지수가 모두 18개나 되며, 이러한 미지수들을 결정하기 위해서는 복잡한 연산을 수행해야하는 어려움이 있다.

또한 Chen 등^[4]이 제안한 1, 2 및 3차원의 각 격자상에서의 입

자분포 모델에서는 \mathbf{u} 의 4차항까지 고려하는 국소평형분포함수를 갖는 형태를 하고 있다. 하지만 이 경우에도 결정해야 할 미지수가 2차원인 경우 32, 3차원인 경우 40개이다.

본 연구에서는 위에서 설명한 모델보다도 더욱 간단한 평형분포함수를 갖는 모델^[5]을 이용하여 2차원 압축성 유체모델에서 충격파의 유동현상에 관해 조사하였다.

2. 열유체 모델

2.1 격자 BGK 모델

LBM에서 입자분포는 실수치의 수밀도를 갖는 분포함수 f_{α} 로 표현된다. 시간 t , 위치벡터 \mathbf{r} 의 격자점에서 일련의 입자운동(충돌과 병진)은 분포함수 $f_{\alpha}(t, \mathbf{r})$ 을 이용하면 다음과 같은 식으로 나타내어진다.

$$f_{\alpha}(t + \tau, \mathbf{r} + \mathbf{c}_{\alpha}\tau) = f_{\alpha}(t, \mathbf{r}) + \Omega_{\alpha}(t, \mathbf{r}) \quad (1)$$

여기서 τ 는 시간간격이다. 식(1)의 우변 제2항의 Ω 는 충돌에 의한 입자분포의 변화를 나타내는 충돌연산자이며, 충돌시에 질량, 운동량 및 에너지가 보존되는 규칙을 따른다. 충돌은 입자간의 상호작용에 의한 운동의 변화이기 때문에, Ω 는 입자분포함수 f 의 합으로 나타낸다. 그러나, 이와 같은 Ω 를 이용한 충돌연산은 복잡하기 때문에 다음과 같이 충돌항을 간략화시킨 방법(격자 BGK 방정식)^[6]이 가장 널리 사용된다.

$$f_{\alpha}(t + \tau, \mathbf{r} + \mathbf{c}_{\alpha}\tau) = f_{\alpha}(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{\phi} [f_{\alpha}(t, \mathbf{r}) - f_{\alpha}^{(0)}(t, \mathbf{r})] \quad (2)$$

여기서 $f_{\alpha}^{(0)}$ 는 국소적인 평형상태에 있어서의 분포함수이며, ϕ 는 단일시간완화계수를 나타낸다. 국소평형분포함수는 다음과

* 경상대학교 수송기계공학부, kang88@gaechuk.gsnu.ac.kr

** 경상대학교 수송기계공학부, rokid@gaechuk.gsnu.ac.kr

*** 경상대학교 대학원, kpson@gaechuk.gsnu.ac.kr

**** 북포해양대학교 기관공학부, cmscms@mail.mmu.ac.kr

***** 한국해양대학교 기계·정보공학부, lyh@hanara.kmaritime.ac.kr

Table 1 Comparison between theoretical and simulated values of sound speed

e_4	e_1	ρ_4	ρ_1	c_s (Present result)	c_s (Theory)
0.26	0.26	12.1	12.0	0.72	0.721
0.3	0.3	12.1	12.0	0.77	0.775
0.32	0.32	12.1	12.0	0.79	0.8
0.4	0.4	12.1	12.0	0.89	0.894
0.5	0.5	12.1	12.0	0.99	1.00
0.263	0.26	12.0	12.0	0.72	0.721
0.303	0.3	12.0	12.0	0.77	0.775
0.404	0.4	12.0	12.0	0.88	0.894
0.505	0.5	12.0	12.0	0.98	1.00

같은 형식으로 나타낸다.

$$f_{\alpha}^{(0)} = F_{\sigma} \rho [1 - 2Bc_{\sigma\alpha} u_{\alpha} + 2B^2 c_{\sigma\alpha} c_{\sigma\beta} u_{\alpha} u_{\beta} + Bu^2] \quad (3)$$

한편, 분포함수와 거시적 유체의 변수들 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} = \rho \quad (4)$$

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} c_{\sigma\alpha} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^{(0)} c_{\sigma\alpha} = \rho u_{\sigma} \quad (5)$$

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{2} f_{\alpha} c_{\sigma}^2 = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} f_{\alpha}^{(0)} c_{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \quad (6)$$

2.2 거시적 흐름의 지배방정식

거시적 및 연속적인 유체의 운동을 직접적으로 알기 위해 Chapman-Enskog 방법을 이용하여 연속적인 유체의 운동방정식을 도출할 수가 있다. 즉, 식(2)을 시간 t 및 공간좌표 \mathbf{r} 을 중심으로 유속에 관해 2차항까지 Taylor전개를 행하면 거시적 흐름에서의 지배방정식을 도출할 수가 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}} (\rho u_{\alpha}) = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial r_{1\beta}} \rho u_{\alpha} u_{\beta} \\ = - \frac{\partial P}{\partial r_{1\alpha}} + \frac{\partial}{\partial r_{1\beta}} \mu \left(\frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{1\alpha}} + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{1\beta}} \right) + \frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}} \left(\frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{1\beta}} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}} \left(\rho e + P + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) u_{\alpha} \\ = - \frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}} \left(k^* \frac{\partial e}{\partial r_{1\alpha}} \right) + \frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}} \left[\mu u_{\beta} \left(\frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{1\alpha}} + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{1\beta}} \right) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}} \left(\lambda \frac{\partial u_{\beta}}{\partial r_{1\beta}} u_{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

한편, LBM에서 이론상의 음속 c_s 는 압력에 관한 식과 이상적인 단원자 기체의 비열비 γ 를 이용해 다음과 같이 정의할 수가 있다.

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{D+2}{D} \frac{\rho e}{\rho}} = \sqrt{2e} \quad (10)$$

여기서 D 는 차원수를 나타내며, 2차원인 경우 $D=2$ 의 값을 갖는다.

3. 수치계산

3.1 충격파 관

압축성유체의 특유의 현상인 충격파는, 속도, 압력 및 온도가 불연속으로 변화하는 면이다. 2차원 평면 내에서 얇은 벽면에

Table 2 Comparison between theoretical and simulated values of shock Mach number and pressure ratio

P_4/P_1	e_4/e_1	P_2/P_1 (Present results)	P_2/P_1 (Theory)	Ms (Present results)	Ms (Theory)
4.0	1.0	1.88	1.885	1.28	1.290
3.0	1.0	1.66	1.669	1.21	1.225
2.0	1.0	1.39	1.393	1.11	1.138
3.0	1.5	1.77	1.864	1.27	1.284
2.5	1.5	1.62	1.690	1.21	1.232
1.5	1.5	1.25	1.269	1.08	1.096
3.0	2.0	1.84	2.010	1.28	1.326
2.0	2.0	1.47	1.566	1.16	1.194

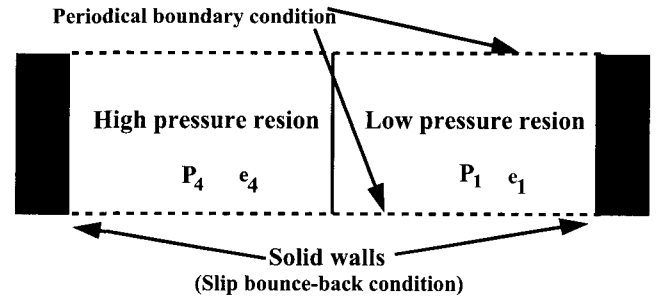


Fig. 1 Definition sketch for the shock-wave problem

의해 고압기체의 영역과 저압기체의 영역으로 나누어져, 계산시 작과 동시에 벽면을 제거하여 급격한 압력구배에 의해 발생하는 충격파를 발생시킨다. 음속은 내부에너지의 함수로서 식(10)와 같이 표현되며, 이러한 식은 내부에너지의 값에 의해 결정된다. 그림 1는 얇은 막에 의해 고압측과 저압측으로 나누어져 있는 충격파 관의 개략도를 나타낸다. 격자수는 400×20 이며, 왼쪽은 고압실, 오른쪽은 저압실에 의해 나누어져 있다. 압력차 (P_4/P_1)가 매우 적을 때는 음파(sound wave)는 양방향으로 전파하지만, 압력차가 매우 클 때는 충격파는 저압실 쪽으로 전파한다. 경계조건은 상·하면 모두 주기조건(periodic), 양쪽 벽면은 슬립조건(slip)을 주어 단열조건이 되도록 설정하였다.

여러 초기조건들의 변화에 의해 얻어진 음속 c_s 은 표 1에 나타나 있으며, 이론에 의해 구해진 값(식(10))과 비교되고 있다. 표1에서 알 수 있듯이 계산에 의한 음속은 이론치와 매우 일치함을 알 수가 있다. 아울러, 경계조건의 변화에 따른 흐름 특성을 살피기 위해 상면과 하면에 non-slip경계조건을 주어 계산을 하였으며, 이 경우의 음속은 이론치보다 약 5%정도 감소함을 알 수가 있었으며, 경계조건의 차이에 의한 유동특성의 차이는 이번의 결과에서는 큰 차이를 보이지 않았다.

충격파 관에서의 압력차는 충격파 전후의 압력구배 (P_2/P_1)로부터 다음과 같다.^[7]

$$\frac{P_4}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} \left[1 - \frac{(\gamma_4 - 1)(e_1/e_4)(P_2/P_1 - 1)}{\sqrt{2\gamma_1} \sqrt{2\gamma_1 + (\gamma_1 + 1)(P_2/P_1 - 1)}} \right]^{-\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} \quad (11)$$

또한, 충격 마하수 $Ms = U_s/c_{s1}$ 는 식(12)와 같은 압력비의 관계로부터 표현할 수가 있다.

$$\frac{P_4}{P_1} = \frac{2\gamma_1 Ms^2 - (\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 + 1} \left[1 - \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1} \frac{e_1}{e_4} \left(Ms - \frac{1}{Ms} \right) \right]^{-\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1}} \quad (12)$$

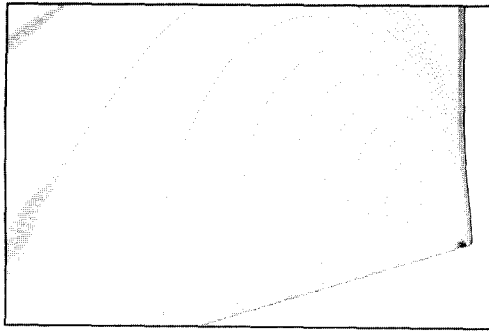


Fig. 2 Shock wave reflection over a wedge (Angles of wedge: 15 degrees, $M_s=1.15$)



Fig. 3 Schlieren photograph of shock reflection on a wedge ($M_s=1.15$)^[8]

식(12)에서 비열비가 ($\gamma_1 = \gamma_4 = 2$)일 때, 여러 압력비 및 내부 에너지 비 (e_4/e_1)에 대한 이론치 및 수치계산 값 사이의 관계가 표 2에 나타나 있다. 초기단계에서 내부 에너지의 차가 크면 클수록, 오차는 무시할 수 없지만, 그 차이가 작다면 오차는 무시할 정도로 작다는 것을 알 수가 있다.

3.2 2차원 충격파의 비정상 반사

비정상 충격파가 저압실의 저면에 설치된 경사면에 입사할 때 충격파의 전파 및 반사파의 현상을 조사하였다. 계산영역의 격자수는 1680×1040 , 경사면의 선단의 좌표는 $(450, 0)$, 경사각도는 15° 를 주었다. 초기조건으로 고압측 밀도 $\rho_1 = 25.41$, 저압측 밀도 $\rho_0 = 12.0$, 초기의 내부에너지 0.4를 주었다. 충격파에 의해 발생된 유체의 속도 u 는 다음 식으로부터 구해진다.

$$\frac{u}{c_s} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \quad (13)$$

식(10)에서 주어지는 음속 $c_s = 0.894$ 로부터 식(13)을 이용한 유속은 $u = 0.167$ 로서, 이 흐름은 아음속 흐름에 속한다.

먼저 그림 2은 선단 경사각도가 $\theta = 15^\circ$ 의 경사면에 입사하는 충격파 선단 및 반사파의 형태를 나타내고 있다. 충격파가 경사를 이룬 면에 입사를 하면, 입사 충격파의 후방에 반사파가 형성되며, 또한 충격파가 전파함에 따라 반사파의 파면이 곡면 형태를 띠고 있는 것을 알 수가 있다. 그림 3은 충격 마하수 $M_s = 1.15$ 를 주었을 때 반사파의 모습을 실험을 통하여 나타내고 있다.^[8]

충격파면은 충격파 상류측과 하류측 밀도의 평균치가 되는 등밀도선과 격자선 교점의 좌표로부터 최소자승법에 의해 구해

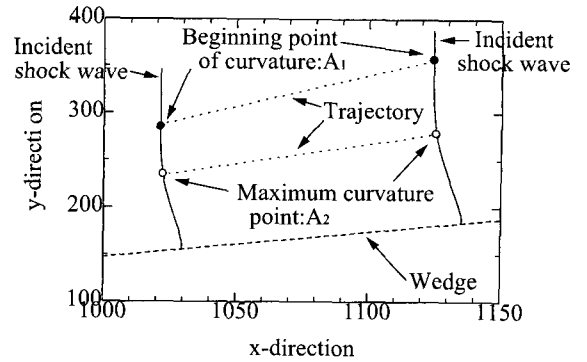


Fig. 4 Trajectory of incident shock wave

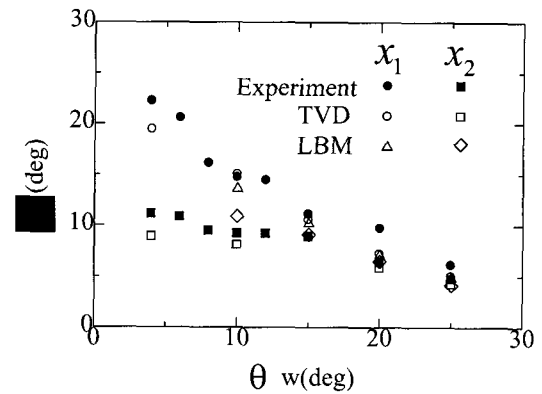


Fig. 5 Relationship between x_1 , x_2 and θ_w for various θ_w

진 곡률로 대표되며, 이 곡선으로부터 각 점에서 미분계수를 계산하여 곡률을 구하였으며, 실험결과 및 차분법에 의한 수치해석 결과와의 정량적인 비교를 행하였다. 그림 4는 충격파면 상에서 곡률이 발생하기 시작하는 점 A_1 및 최대 곡률을 갖는 점 A_2 의 궤적이 경사면이 되는 각도 (x_1, x_2)를 θ_w 에 대하여 나타내었다. 그림 5는 LBM, 차분법 및 실험결과와의 비교를 나타낸 것으로, 매우 잘 일치함을 알 수가 있다.

3.3 충격파의 회절

충격파가 복잡한 와 구조를 수반하는 요철벽을 통과할 때, 각 모서리부근에서의 비정상 평면충격파의 회절현상에 관해 수치해석을 행하였다. 충격파는 2개의 고체벽에 갇혀진 공간을 고압측에서 저압측으로 전파하며, 각각의 급확대부를 통과할 때 회절하며, 벽의 모서리부분에서 와가 발생한다.

계산조건은 각 모서리점을 중심으로 좌측 부분의 격자수는 1200×200 , 우측 부분의 격자수는 1100×1300 , 초기의 격벽의 위치는 $i = 800$, 각부의 정점은 $(i, j) = (1200, 1100)$ 에 위치하고 있다. 또한, 초기조건은 저압측의 초기밀도 $\rho_0 = 12.0$, 고압측의 밀도 $\rho_1 = 25.41$, 초기의 내부에너지 $e_1 = e_4 = 0.4$ 를 주었다. 경계조건은 전체의 벽면에서 Solid wall 조건을 주었으며, 온도에 관해서는 단열조건을 채용하였다.

그림 6는 충격파가 각부를 통과하면서 각 모서리를 중심으로 하는 형태로 회절하며, 그 형태를 그대로 유지하면서 각각의 방향으로 전파하는 모습을 나타내고 있다. 또한 충격파가 회절하면 동시에 각 모서리로부터 팽창파가 발생하여 거의 대칭형상을 가지면서 x축의 음의 방향으로 전파한다. 충격파가 각 모서리에서 회절한 후, 각 모서리부근에서는 와가 발생하며, 시간경과와

동시에 성장하는 모습을 알 수가 있다.

그림 7은 충격 마하수 $M_s=1.5$ 인 경우, 실험에 의한 충격파의 회절현상, 팽창파의 발생 및 각 모서리 근방에서 와가 형성하는 것을 나타내고 있다.^[9] 충격 마하수 등의 여러 파라메타가 다르기 때문에 LBM에 의한 수치해석 결과와 엄밀한 비교는 행할 수는 없으나 전반적인 유동패턴이 일치하는 것을 잘 보여주고 있다.

4. 결론

열·유체 모델을 보다 실제적인 흐름의 수치해석에 적용하기 위해 충돌연산자를 갖는 이전의 모델보다도 간단한 형의 평행분포함수를 갖는 격자 BGK모델을 이용하여, 거시적 흐름의 지배방정식을 도출하여 압축성 유체에 특유의 현상인 비정상 충격파의 수치해석을 행하였다.

먼저, 간단한 충격파관을 통한 이론치와의 비교계산에서 초기의 내부에너지의 차가 클수록 오차는 무시할 수 없을 정도이었으나, 그 차가 작으면 오차는 무시해도 좋을 정도로 작았다.

또한, 경사면에 입사하는 평면 충격파의 반사파의 유동패턴을 조사하였으며, 차분법 및 실험결과와 비교를 통하여 정량적으로 일치하는 것을 알 수가 있었다.

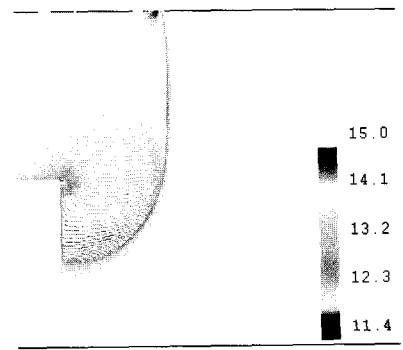
마지막으로, 급확대관을 갖는 충격파관에서 각모서리에서 충격파의 회절현상에 관해 수치계산을 행하여 흐름장의 형태와 각부 근방에서의 와의 형성을 재현하였다.

후 기

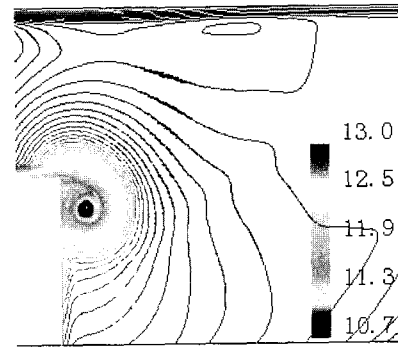
이 논문은 2002년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

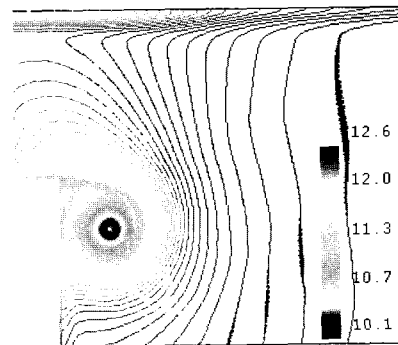
- [1] Rothman, D.H. and Zaleski, S., Lattice-Gas Automata Simple Models of Complex Hydrodynamics, Cambridge University Press (1997), pp.73-90.
- [2] Wolf-Gladrow, D.A., Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Model, Lecture Notes in Mathematics, Springer (2000), pp.159-247.
- [3] Alexander, F.J., Chen, S. and Sterling, D.J., Lattice Boltzmann Thermodynamic, Phys. Rev., E. 47(1993), pp.2247-2252.
- [4] Chen, Y., Ohashi, H. and Akiyama, M., Thermal Lattice Bhatnagar Gross Krook Model without Nonlinear Deviations in Macrodynamic Equations, Phys. Rev., E.50(1994), pp.2776-2783.
- [5] Tsutahara, M. and Kang, H.K., A discrete effect of the thermal lattice BGK model, J. Stat. Phys., Vol. 107 (2002), pp.479-498.
- [6] Qian, Y.H., d'Humieres, D., and Lallemand, P., Lattice BGK models for Navier-Stokes equation, Europhys. Lett. 17(1992), pp479-484.
- [7] Liepmann, H.W. and Roshko A., Elements of Gasdynamics, Wiley, NY(1957), pp.81
- [8] Sasoh, A., Takayama, K. and Saito, T., A Weak Shock Wave Reflection over Wedge, Shock Waves 2(1992), pp.277-281.
- [9] 内山直樹, 井上督, 圧縮性流体における渦構造の数値解析, 第6回数值流体力学シンポジウム講演論文集, 東京(1992), pp.81-84.



(a) 500 time steps



(b) 1000 time steps



(c) 1500 time steps

Fig. 6 Unsteady shock wave passing through the corner with angle 90 degrees. Density distribution, $M_s=1.15$

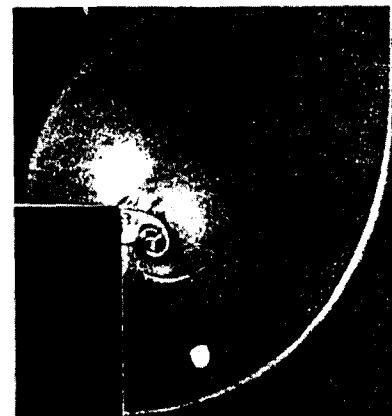


Fig. 7 Unsteady shock wave diffraction by experiment, $M_s=1.5$ ^[9]