Proceedings of
The Second National Congress on Fluids Engineering
August 22-24, 2002, Muju, Korea

잔류내 응집 구조 와류의 생성에 관한 연구

이 승 수*

A Study of Generation of Coherent Vortex in Late Wake

Sungsu Lee*

Key Words : *Coherent Vortex (응집 구조 와류), Late Wake (잔류), Finite Element Method (유한 요소법)*

Abstract

Wake downstream of an object in the stratified flow has been of long-standing interest in fluid dynamics because of its similarity to geophysical flow over topographical terrains and more recently, concerns about the wake left behind a body moving through the ocean thermocline. Decades of studies of geophysical flow have unveiled that the flow downstream of obstacles in stratified flow consists of attached wake and strong internal waves, or separated, fluctuating wake and persistent late wakes, all of which depend on the flow conditions. Among unique and interesting characteristics of the stratified flow past obstacles is the generation of coherent vortex structure in the late wake far downstream of the object. Without the density stratification, the flow field downstream becomes undisturbed after relatively fast diminishing of the near wake. However, no matter how small the stratification is, the flow field downstream self-develops coherent vortex structures even after diminishing of the near wake. This paper present a computational approach to simulate the generation mechanism of the coherent vortex and analysis of the vortical structure.

1. 서 론

응집 구조 (Coherent Structure)를 갖는 와류(Vortex)는 잠수체의 후류에 발생하는 잔류 (Late Wake)나 저고도의 산악 지형 주위에 발생하는 덩어리 형상의 구름, 섬 주위에서 발생하는 해류의 대와동 (Large-eddy)의 형태로 보고된 바 있다[1,2]. 이러한 현상은 유체장의 밀도가 균일한 경우에는 발생하지 않으며, 대기 경계층 (Atmospheric Boundary Layer)이나 해양과 같이 유체 밀도가 연직 방향으로 변화하는 경우에 물체의 후류에 발생하는 것으로 알려져 있다.

밀도 층상류 내의 산악 지형과 같은 지형학적 장애물 또는 이동중인 잠수체의 후류는 그 특성에 따라 두 영역으로 나누어진다. 물체에 가까운 영역은 물체의 교란에 의해 난류의 혼합 (Mixing)이 발생하며, 물체에서 먼 영역은 밀도의 층상화 (Stratification)에 의해 잔류 내에 응집 구조의 와류가 발생하는 것이 관찰된 바 있다 [1,3].

물체에 가까운 영역 내 후류의 특성에 관하여는 지형학적 장애물이나 구와 같은 3차원 물체와 밀도 변화의 연성에 대한 연구에 의해 비교적 많은 정보가 알려져 있다[4,5,6,7,8]. 물체에 근접한 후류는 실험 결과는 층상화가 진행될수록, 즉 밀도의 수직 방향 구배가 증가할수록 연직운동이 제한되어 평면화되고, 더 나아가 평면상에 2차원의 vortex shedding으로 변천한다. 반면 층상화가 적은 경우 물체의 근접 후류는 균일 밀도의 유체장에서의 후류 특성과 큰 차이를 보이지 않았다.

이에 반해 물체로부터 멀리 떨어진 영역의 후류는 밀도의 층상화가 적은 경우에도 중력과 밀도 구배의 연성에 의해 시간이 진행할수록, 또는 거리가 멀어질수록 평면화된 응집 구조의 와류가 생성되고 진행하는 것으로 관찰된 바 있다 [1,3]. 그러나 이 현상의 발생 과정이나 상세한 구조는 아직 분명히 설명되고 있지 않다.

밀도 층상화에 의한 잔류와 응집 구조의 와류 생성에 관한 전산해석은 본 연구를 위한 기초 문헌 조사 결과, 2차원 공간에 대한 계산을 수행한 Karniadakis와 Triantafyllou[9] 와 3차원 해석을 수행한 Fung과 Chang [10]의 연구가 있다. 전자는 2차원 해석을 수행함으로써 밀도 층상류의 3차원적 구조를 명확히 설명하지 못하였고, 후자의 3차원 계산은 자유수면까지 고려함으로써 연성효과의 3차원 구조를 전산 모사 하였으나, 수직방향으로 정압력만을 고려하였으며 정량적인 해석은 보여주지 못하였다.

따라서 밀도 층상류에 의한 잔류내 응집 와류 구조에 관한 전산해석은 큰 의의를 갖는다고 할 수 있다. 본 논문에서는 연구책임자가 이미 확보하고 있는 균일 밀도류와 물체의 상호작용 전산 해석 기술[11,12]을 바탕으로 밀도 층상류의 영향을 해석함으로써 물체에서 멀리 떨어진 약한 층상화의 상태에서 잔류내의 응집 구조 와류의 생성을 전산 모사하였다. 이동하는 물체에 의한 잔류의 변화를 해석하기 위하여 전산 영역을 고정하였으며 이동중인 물체는 Karniadakis와 Triantafyllou[9]가 도입한 용출점을 이용하여 근접 교란을 모델링하여 물체가 전산 영역에서 사라진 이후의 유체장 변화를 해석하였다. 수치해법으로는 유한요소법을 이용하였으며, 수정된 외재적(explicit) 방법에 의해 시간적분을 수행하였다. Boussinesq 가정에 의한 밀도 변화는 운동방정식의 부력항에만 영향을 미치며, 이와 연계되어 추가된 밀도 전송방정식은 Crank-Nicolson 방법에 의해 수치해석을 수행하였다.

* 충북대학교 구조시스템공학과,
joshua@trut.chungbuk.ac.kr

2. 문제의 정식화 및 수치 해법

2.1 지배 방정식

비압축성의 점성유체가 연직 방향 (x_3)으로 밀도의 변화가 있는 경우, 무차원화된 지배 방정식은 Boussinesq 가정을 고려하여 다음과 같이 표현된다 [13].

$$u_{j,j}=0 \tag{1}$$

$$u_{i,t}+u_j u_{i,j}=-p_{,j}-\delta_B \rho/Fr^2+\tau_{ij,j} \tag{2}$$

$$\rho_{,t}+u_j \rho_{,j}=u_3 \tag{3}$$

이때 레이놀즈수 Re와 내부 프루이드수 Fr는 각각 다음과 같다.

$$Re=\frac{U_o D}{\nu},\quad Fr=\frac{U_o}{ND},\quad N^2=-\frac{g}{D}\left(\frac{d\rho_b}{dx_3}\right)_{-\infty} \tag{4}$$

여기서 N은 부력 주파수이다. 위 식의 아래 첨자 중 $_t$ 과 $_j$ 는 각각 시간과 x_j 방향에 대한 편미분을 나타낸다. 식 (3)의 밀도 전송 방정식에서 확산항은 무시하였다. 여기서, x_1, x_2, x_3(혹은 x, y, z)는 각각 주유동방향(streamwise), 횡방향(spanwise), 수직방향(normal)의 좌표축을 나타내고, u_1, u_2, u_3(혹은 u, v, w)는 각각 x_1, x_2, x_3 방향으로의 속도성분을 나타낸다. 또한 p는 압력, μ는 동점성 계수, δ_{ij}는 Kroenecker Delta 함수, g는 $-x_3$ 방향의 중력 가속도를 나타낸다. 또한 ρ_b와 ρ는 각각 배경 밀도와 섭동 밀도를 나타내며, 기준 밀도에 의해 무차원화되었다.

2.2 이동중인 물체의 모델링

본 연구에서는 Fig. 1에 보는 바와 같이 직교 좌표계를 이용한 3차원 격자계를 이용하였다. 물체의 크기를 D라고 할 때, 전산 영역은 40Dx20Dx10D의 크기를 갖도록 하였으며 총 격자의 수는 216000개로 하였다. 구로 대체된 물체는 전산영역의 중앙, 즉 y=0, z=5D의 위치에서 ($-x$) 축으로부터 출발하여 일정속도 U로 ($+x$) 축을 향해 진행하도록 하였다. 계산 영역의 측면 및 입출구면에서는 traction-free ($\sigma_{ij}n_j=0$) 조건을 적용하였으며 초기 조건으로 전산 영역내의 유속과 섭동 밀도는 0으로 가정하였다

본 연구의 목적은 물체에 근접한 후류의 변화보다는 물체가 지나간 잔류의 변화이므로 물체는 Karniadakis와 Triantafyllou[9]가 도입한 물체의 근접 교란 모델을 다음과 같이 이용하였다. Fig. 2는 물체의 x-y 평면상의 단면을 나타낸다. U_0와 V_0는 각각 미리 설정된 속도로서 본 논문에서는 $U_0=U$와 $V_0=U/4$를 이용하였다. 이때 V_0는 물체의 안으로 향하는 방향을 갖도록 함으로써 후류의 수렴하는 유체장을 재현하도록 하였다. 이와 같은 물체의 속도장은 각 시간 단계에서 설정된 속도 U로 이동하는 물체의 내부에 해당되는 절점의 방정식에 용출점으로 부가되었다. 즉, 해당 절점의 운동량 방정식은 이를 고려하여 식 (2)로부터

$$u,t+u_j u_{,j}=-p_{,1}+\tau_{1j,j}-\lambda(u-U_0) \tag{5}$$

$$v,t+u_j v_{,j}=-p_{,2}+\tau_{2j,j}-\lambda(v-V_0) \tag{6}$$

로 대체되었다. 이때 λ는 $1/\Delta t$로 정하였다. 수직방향 유속 w는 식 (1)의 연속 방정식에 의해 계산되어 물체 앞에서는 발산하고 물체 뒤에서는 수렴하는 유장을 형성한다.

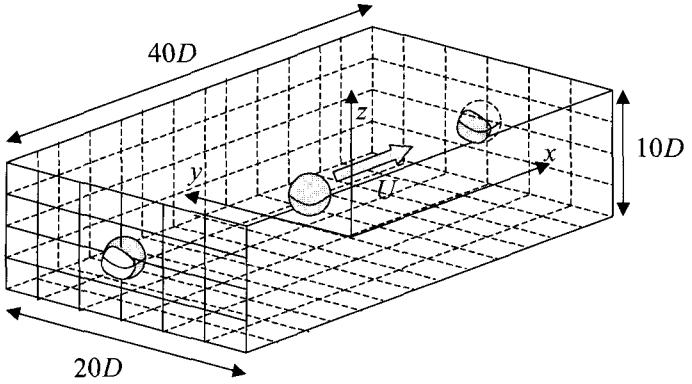

Fig. 1 Schematic Diagram of Computational Domain and Moving Object

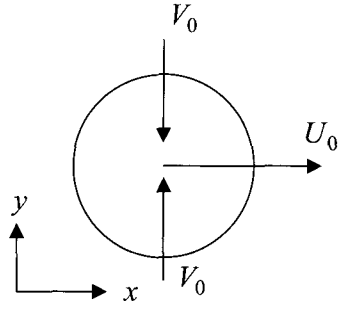

Fig. 2. Modeling of Moving Object

2.3 유한요소법에 의한 이산화 및 시간 적분

임의의 유한 요소 Ω에 대해 지배방정식을 유한요소법을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \phi u_{j,j} d\Omega=0\\
&\int_\Omega (\phi u_{i,t}+\phi u_j u_{i,j}+\phi_{,j}\tau_{ij,j}-\phi_{,i}p+\lambda\phi u_i)d\Omega\\
&=-\frac{\delta_B}{Fr^2}\int_\Omega \phi\rho d\Omega+\int_\Gamma \phi\sigma_{ij}n_j d\Gamma-\lambda\int_\Omega \phi U_{0i} d\Omega\\
&\int_\Omega (\phi\rho_{,t}+\phi u_j\rho_{,j})d\Omega=\int_\Omega \phi u_3 d\Omega
\end{aligned} \tag{7}$$

이때 Γ는 유한요소의 경계를 나타내며, ϕ는 유속과 밀도 변수에 대한 가중함수(weight function)이며, ψ는 압력에 대한 가중함수이다. 식 (6)에서 σ_{ij}는 $-p\delta_{ij}+\tau_{ij}$로서 응력을 나타내고, n_j는 경계의 수직방향 단위 벡터이다. 본 연구에서는 유속 및 밀도에 대

하여는 선형 유한요소를 이용하였고, 압력은 각 유한요소 내에서 일정한 것으로 가정하였다. 운동량방정식은 수치해석의 안정성을 위하여 유선상류도식 (Streamline Upwind Method)[14]을 이용한 Petrov-Galerkin 형식을 적용하였다.

본 연구에서는 속도항 보정 방식[15]에 의해 시간 적분을 수행함으로써 식 (6)의 이산화된 지배방정식의 비정상해를 구하였다. 그 과정은 다음과 같다. 각 시간 단계에서 Poisson 방정식에 의해 압력을 얻는다. 이때, 이전 단계에서 얻은 유속과 밀도를 이용한다. 유한요소법의 특징인 요소들의 비구조적 연계성(unstructured connectivity)에 의해 행렬은 매우 sparse하며, 이를 위해 본 연구에서는 행렬 해법으로 PCG(Preconditioned Conjugate Gradient)를 이용하였다. 이때 압력을 위한 Poisson 방정식의 행렬은 Hermitian 이므로 행렬 요소의 연산은 계산의 초기에 한 번 만이 요구된다. 압력이 계산되면, 밀도 방정식을 시간 적분하게 되는데 식 (6)은 확산항이 없는 순 대류방정식의 형태를 갖고있어, 수치해석의 안정성을위해 Crank-Nicolson 방법을이용하였다. 이 방법은 구 주위의 균일 밀도류에 대한 전산 해석에 의해 유용성이 확인된 바 있다[11,12].

유속은 계산된 압력 및 밀도를 이용하여 운동량 방정식을 수정된 외재적 방법(Modified Explicit Method)을 이용하여 시간 적분을 수행함으로써 얻을 수 있다. 주어진 시간 단계는 수치 해석의 안정성의 기준이 되는 CFL 수에 의해 결정되는 더 작은 준 시간 단계들로 세분되고, 각 세분된 준 시간단계에서 운동량 방정식을 외재적 방법에 의해 시간 적분하였다.

3. 결과 및 고찰

본 연구에서는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 물체가 ($-x$) 축으로부터 출발하여 계산 영역에 들어서는 순간부터 전산 모사를 시작하여 U로 ($+x$) 축을 향해 진행하도록 하였다. 또한 ($+x$)축을 따라 계산영역을 빠져나간 순간을 t=0으로 정하였다. 부력 주파수 N은 0.01/sec로 약한 층상화를 가정하였으며, Re는 500으로 고정하였다.

Fig. 3은 직선 운동을 하던 물체가 계산영역을 벗어난 이후의 영역내의 유체장 변화를 나타낸다. x-y 평면, 즉 수평면상에서의 유속 벡터에 의해 유속의 변화가 나타나고 있으며, 수직방향 와도 (vorticity)의 등가 표면에 의해 잔류내 응집 구조의 생성과정이 나타나고 있다. 이때 와도의 수직방향 성분은 다음과 같이 정의되었다.

$$\zeta_z=\frac{1}{2}(u_{,y}-v_{,x}) \tag{8}$$

물체의 직접적인 교란이 사라진 이후 유체장은 밀도에 의해 층상화가 이루어져 계산 영역 내에 유속의 수직 방향성분은 매우 작게 나타나고 있다. $t=25D/U$에서 유체장은 물체의 진행 방향으로 진행하는 유속을 나타내고 있으며 ζ_z는 수직면인 y-z 평면을 중심으로 대칭인 형상을 보여주었다. 이때 계산영역내의 최대유속은 물체 진행속도의 30%정도 였다. 시간이 진행하여 $t=150D/U$에 이르자, 유체장내에 수평방향으로 다소간의 굴절 (undulation)이 발생하기 시작하였다. 와도의 등가 표면 역시 응집 구조의 생성을 나타내기 시작하였다. $t=300D/U$에 이르자, 유속 벡터는 뚜렷한 와류 (vortex)의 형성을 보여주었으며 이는 와도의 등가 표면에 의한 응집 구조로 잘 나타나고 있다. 특히 $t=300D/U$에서 나타나는 와류의 형상은 잘 알려진 von Karman의 와류와 매우 유사한 구조를 갖고 있다.

이러한 현상은 와도 확장 현상 (vorticity stretching)[16]으로 설명할 수 있다. Boussinesq 가정과 $\zeta_z \gg \zeta_x, \zeta_y$임을 고려한 ζ_z의 보전 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{D\zeta_z}{Dt}=\zeta_z w_{,z} \tag{9}$$

따라서 ζ_z가 양수이고 수직방향 유속의 수직방향 구배, $w_{,z}$가 양수인 구간과 ζ_z가 음수이고 $w_{,z}$가 음수인 구간에서 ζ_z가 증가함을 알 수 있다. 이를 보이기 위해 $t=25D/U$에서 ζ_z, $w_{,z}$ 및 와도 확장률인 $\zeta_z w_{,z}$을 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 4(a)에 보는 바와 같이 ζ_z가 x-축을 기준으로 양수와 음수로 나뉘어지며 대칭적인 형상을 보이나 Fig. 4(c)에 나타난 $\zeta_z w_{,z}$는 부분적인 응집 구조를 나타내기 시작하였다. 이 같은 와도 확장은 시간이 감에 따라 더욱 진행되고 Fig. 4(d)에 보는 바와 같이 $t=300D/U$에서는 뚜렷이 구분되는 응집 구조의 와도가 나타나게 된다.

잔류내의 와도 응집 현상은 중력축, 즉 z 축에 평행한 와도의 성장으로 이어지며 이는 물체의 움직임으로부터 상하 방향으로 멀리 떨어진 지역의 유체장에도 영향을 미치게된다. 이를 가시화하기 위하여 계산영역의 윗면, z=10D에 해당하는 면의 수직방향 유속 w의 시간에 따른 변화를 Fig. 5에서 보여주고 있다. 이는 일정 높이에 위치한 평면의 수직운동에 직접적으로 기여하는 성분으로 자유 수면 경계 조건이 적절히 고려될 경우, 물체 후류의 자유수면에 발생하는 응집 구조의 파형으로 해석될 수도 있다. 계산결과는 물체가 지나간 후 초기에는 x 축에 대칭인 분포를 보여주다가 시간이 진행함에 따라 하부에서 생성되는 응집 구조의 와도의 영향에 의해 번갈아 파정과 파곡이 나타나고 있다.

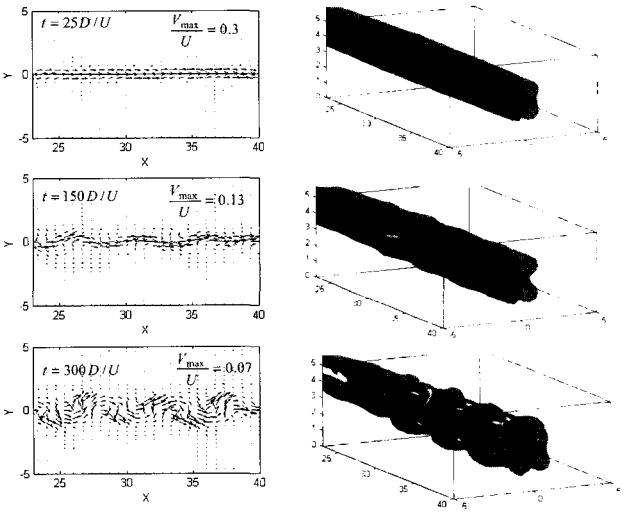

Fig. 3 Evolution of Velocity Fields on Horizontal Plane at z=5D (a) and Isosurface of Vertical Vorticity (b) for Case I

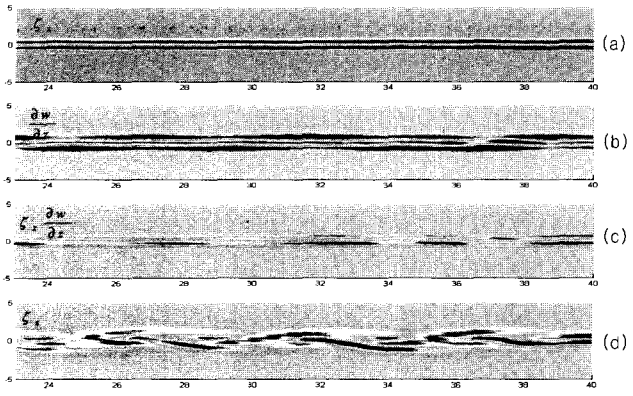

Fig. 4 Vertical Vorticity (a), Vertical Gradient of Vertical Velocity (b), Vertical Vorticity Stretching (c) at t=25D/U and Vertical Vorticity (d) at t=300D/U on Horizontal Plane

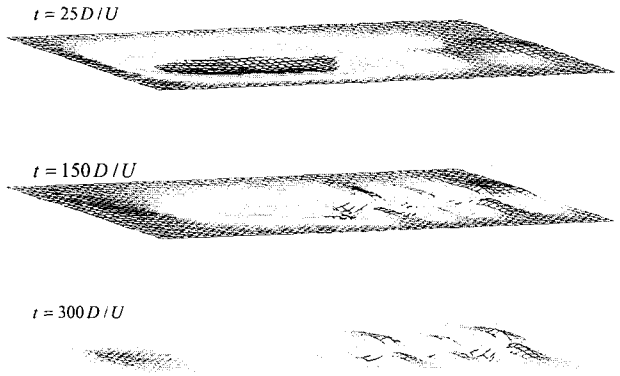

Fig. 5 Evolution of Vertical Velocity on Horizontal Plane at z=10D

4. 결 론

본 연구에서는 약한 밀도 층상화가 있는 유체장에 일정속도로 직선 운동을 하는 물체가 지나간 후에 시간이 진행함에 따라 발생하는 잔류내의 응집된 와도의 형성에 대한 전산 모사를 수행하였다. Boussinesq 가정에 의해 밀도 변화가 부력항으로 고려된 운동량 방정식과 밀도의 전송 방정식은 유한 요소법과 수정된 외재법에 의한 시간 적분에 의해 수치 해를 구하였다. 이동 중인 물체는 근접 교란 모델링을 이용하여 나타내었으며, 수직 방향 와도의 변화를 관찰함으로써 와도의 생성과 응집과정을 나타내었다. 그 결과, 다음과 같은 특성을 확인하였다.

(1) 물체뒤의 근접 후류 내에 발생하는 물체의 직접적인 교란은 빠른 속도로 소멸되었다

(2) 잔류는 시간이 감에 따라 평면화가 진행되고, 수직방향 와도의 확장에 의해 와도의 응집도가 높아지게 되어, 평면상에 유체장의 굽이침과 와류가 생성된다.

(3) 와도의 응집화는 와도 확장 현상으로 설명이 가능하다.

(4) 물체면에서의 와도의 응집은 수직방향으로 확산되어 수직방향의 유체장내에 유사 와류의 형성에 영향을 미친다.

참 고 문 헌

(1) Pao, H.K and T.W. Kao (1977), Vortex structure in the wake of a sphere, Phys. Fluids,vol.20, pp187

(2) Hubert, L.F, and A.F. Krueger (1962), Satellite pictures of mesoscale eddies, *Month. Weather Rev.*, vol.90, pp.457-463.

(3) Lin, J.T. and Y.H. Pao (1979), Wakes in stratified fluids, Annul. Rev. Fluid Mech., vol.11

(4) Long, R.R. (1953), Some aspects of the flow of stratified fluids: I. a theoretical investigation, *Tellus* 5, pp.42-58.

(5) Baines, P.G. (1977), Upstream influence and Long's model in stratified flows, *J. Fluid Mech.*, vol.82, part 1, pp.147-159.

(6) Castro, I.P., W.H. Snyder, and G.L. Marsh (1983), Stratified flow over three-dimensional ridges, *J. Fluid Mech.*, vol.135, pp.261-282.

(7) Lin, Q., W.R. Lindberg, D.L. Boyer, and H.J.S. Fernando (1992), Stratified flow past a sphere, *J. Fluid Mech*, vol.240, pp.315-354.

(8) Chomaz, J.M., P. Bonneton, and E.J. Hopfinger (1993a), The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid, *J. Fluid Mech*, vol.254, pp.1-21.

(9) Karniadakis, G.E. and G.S. Triantafyllow (1989), Frequency selection and asymptotic states in laminar wakes", J. Fluid Mech., vol.199, pp.441

(10) Fung, Y.T. and S.W. Chang (1996), Surface and integral signature of organized vortex motions in stratified fluids, Phys. Fluids, vol.8, no.11, pp.3023.

(11) Lee, Sungsu (2000), A numerical study of the unsteady wake behind a sphere in a uniform flow at moderate Reynolds numbers, *Computers & Fluids*, Int. J., vol.29, no.6, pp.639-667.

(12) Lee, Sungsu and J. Wliczak (2000), The effects of shear flow on the unsteady wakes behind a sphere at moderate Reynolds numbers, *Fluid Dynamics Research* , vol.27, no.1, pp.1-22.

(13) Gill, A.E., (1982), *Atmosphere-ocean dynamics*, Academic Press, San Diego, CA, USA

(14) Brooks, A. and J.R. Hughes, (1982), "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on incompressible Navier-Stokes equations," *Comp. Methods in App. Mech. Eng.*, vol. 32, pp.199-259.

(15) Chan, S.T., P.M. Gresho, R.L. Lee and C.D. Upson, (1981), "Simulation of three-dimensional, time-dependent, incompressible flows by a finite element method," Lawrence Livermore Laboratory Report UCRL-85226.

(16) Schlichting, H. (1979), *Boudary Layer Theory*, McGraw-Hill