

## 급 출발하는 반원형 실린더에 의한 초기 후류거동의 시뮬레이션

조지영\*·이상환\*\*·진동식\*\*\*

### Simulations of the early wake behavior induced by an impulsively started a semicircular cylinder

Jiyoung Cho\*, Sanghwan Lee\*\* and Dongsik Jin\*

**Key words :** Vortex Particle Method(입자와법), Semicircular cylinder(반원형 실린더), Impulsive start(급 출발), Particle Strength Exchange(입자 강도교환), Vorticity generation(와도 생성), Remeshing(와도 재배치)

#### Abstract

The time-development of the wake vortices of the unsteady viscous flow past a semicircular cylinder is simulated using the vortex particle methods for direct numerical simulations(DNS). The early wake behaviour of the flow behind an impulsively started a semicircular cylinder is evaluated for a range of Reynolds numbers between 60 and 200 with opposite body configurations respectively. The diffusion scheme based on the particle strength exchange(PSE) is used to account for the viscous effect accurately. And the vorticity generation algorithm to enforce the no-slip boundary conditions is employed. In order to redistribute particles efficiently on the distorted Lagrangian grid the particle distribution technique is adaptively revised, while maintaining the uniform resolution. The results of the simulations are compared to other experimental results.

#### 1. 서론

급 출발하는 실린더 주위의 후류 유동에 대한 연구는 공기 역학과 정수역학을 포함하는 유체기계분야를 비롯하여 물질과 열전달을 기반으로 하는 여러 공학분야에서 중요한 역할을 한다. 실제 공학 분야에서 당면하게 되는 문제로서 물체의 형상에 의하여 유기되어지는 유동의 후류는 매우 중요한 의미를 갖는다. 본 연구에서는 반원형 실린더를 급 출발하였을 때, 초기 단계의 짧은 시간동안 유동의 후류를 정확하게 해석하기 위한 수치해석적 방법으로 입자와법을 사용하였다.

와법은 와도장의 이산화와 이산 와요소들의 시간전개(evolution)를 결정하는 지배방정식의 라그랑지안적 기술을 기반으로 한다. 따라서 와법은 격자가 필요치 않으며, 물리적인 특성상 무한에서의 경계조건을 다루기가 쉽고 와도가 존재하는 영역만을 계산에 포함하기 때문에 비정상 박리유동의 모사에 적합하다. 또한 와법은 점성효과의 효과적인 처리를 가능케하는 수치해석적 방법으로서, 지배방정식의 점성 확산항에 대하여 입자강도교환(Particle Strength Exchange)법을 사용하였고, 물체 표면에서 미끄럼속도에 대한 점착 경계조건을 적용하기 위하여 와도생성 알고리즘을 도입하였다.

본 연구에서는 유동방향에 대하여 반원형 실린더의 둥근면이 전면에 위치하는 경우[A:형상A]와 평형면이 전면에 위치하는 경우[B:형상B]에 대하여 각각 계산하였고 이를 실험값과 비교하였다.

#### 2. 입자와법

##### 2.1 지배방정식

점성유체의 2차원 비압축성 비정상 유동은 다음과 같은 와도수송방정식과 연속방정식으로 정의된다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 는 속도,  $\omega = \omega \hat{e}_z = \nabla \times \mathbf{u}$ 는 와도(vorticity),  $\nu$ 는 동점성계수이다.

##### 2.2 알고리즘

와도수송방정식을 비점성항과 점성항으로 분리하는 방법(splitting method)을 사용하여 식(1)을 대류항과 확산항으로 구분하고 이를 동시에 계산한다.

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t) \quad (3)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \nabla^2 \omega \quad (4)$$

한 시간간격동안 수행되는 전체적인 연산순서를 요약하면 다음과 같다.

\* 한양대학교 대학원, ploumhans@dreamwiz.com  
\*\* 한양대학교 기계공학부, shlee@hanyang.ac.kr  
\*\*\* 한양대학교 대학원, vortex@ihanyang.ac.kr

1. 각 입자의 유동속도를 구하기 위하여 Biot-Savart 법칙을 적용한 고차의 속도커널을 이용하고 입자의 와도로부터  $\frac{dx_p}{dt}$  을 계산한다.

2. 점성 확산을 고려하기 위하여 입자강도교환법을 적용하고  $\frac{d\Gamma_p}{dt}$  을 계산한다.

3. 새로운 위치  $x_p(t)$  와 순환  $\Gamma_p(t)$  을 시간간격  $\Delta t$  에 대하여 전개한다.

4. 벽면에서의 미끄럼 속도를 제거하기 위하여 외판의 강도(vortex sheet strength)를 계산한다.

5. 물체 경계 주위의 입자강도를 새롭게 조절하여 점착 경계조건을 적용한다.

6. 입자간 코어(core)의 중첩을 유지하기 위하여 일정한 시간간격마다 입자를 재배치한다.

### 2.3 대류항

속도장은 포아송(Poisson) 방정식의 해에 대하여 그린함수(Green's function)를 사용하는 와도장으로 정의된다.

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int K(x-y) \times \omega dy + U_o(x, t) \quad (5)$$

여기서,  $U_o(x, t)$  은 no-through 경계조건을 갖는 제차방정식의 해이고,  $K(x, y) = (x-y)/|x-y|^2$  는 합성(convolution)커널이다. 본 연구에서는 Beale & Majda가 제안한 2차 커널을 사용하였다.

$$K_\epsilon(z) = \frac{(-y, x)}{2\pi r^2} [1 - \exp(-r^2/\epsilon^2)] \quad (6)$$

### 2.4 확산항

입자강도교환(Particle strength exchange)은 라플라스(Laplace) 연산자를 적분연산자로 근사화하고 입자의 위치를 구적점으로 사용하여 이 적분에 구적법을 적용하면 결과적으로 다음과 같은 수식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{v}{\epsilon^2} \int_{R^2} [\omega(y) - \omega(x)] \eta_\epsilon(x-y) dy \quad (7)$$

1차원과 2차원에 대한 알고리즘은 다음과 같다.

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = \frac{vh^d}{\epsilon^2} \sum_{j=1}^N (\Gamma_j^{n-1} - \Gamma_i^{n-1}) \eta_\epsilon(x_i - x_j), \quad (8)$$

$d=1,2$

여기서,  $\Gamma$  는 순환,  $\epsilon$  은 입자의 코어 반경,  $h$  는 입자간 간격,  $\eta$  는 와의 형상함수,  $d$  는 차원이다.

### 2.5 경계조건

실린더의 후류 유동에 관한 문제는 물체의 경계면에서 점성에 의한 와도 생성을 수반하므로 유동장내에 고체벽면이 존재할 때, 물체의 경계면에서는 점착조건이 만족되어야 한다. 하지만 대류와 확산과정을 거치면서 물체의 표면에는 미끄럼 속도(slip velocity)가 발생하게 되고, 이를 제거하기 위하여 경계요소법을 사용한다. 이 방법은 물체의 표면을 M개의 요소로 이산화하고 그 선형방정식을 풀어서 외판의 강도(vortex sheet strength)를 계산하게 되는데 이 외판의 강도를 가지고 확산과정에서  $\Delta t$  시간간격동안 방출되어야 하는 총유량(total flux)은 다음과 같다.

$$v \frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \quad (9)$$

실제로, 외판의 강도는 확산 방정식에 해당하는 비제차 Neumann 문제에 대하여 그린(Green)의 적분을 이산화함으로써 주변의 입자에 분배된다. 따라서, 입자에 의하여 받게 되는 순환의 양은 다음과 같다.

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = \iint \frac{d\omega}{dt} dx dy \quad (10)$$

식(10)의 적분은 다음과 같이 정확하게 수행된다.

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} \left( \text{erfc}(s) \right)_{(x_i-h_i/2)/\sqrt{4vt}}^{(x_i+h_i/2)/\sqrt{4vt}} \left( \sqrt{4vt} \frac{1}{2} \left( \begin{aligned} & [\text{ierfc}(s)]_{((y_i-b/2)-h_i/2)/\sqrt{4vt}}^{((y_i-b/2)+h_i/2)/\sqrt{4vt}} \\ & - [\text{ierfc}(s)]_{((y_i+b/2)-h_i/2)/\sqrt{4vt}}^{((y_i+b/2)+h_i/2)/\sqrt{4vt}} \end{aligned} \right) \right) \quad (11)$$

여기서 여오차함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{erfc}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-v^2) dv \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{ierfc}(s) &= \int \text{erfc}(v) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-s^2) - s \cdot \text{erfc}(s) \end{aligned} \quad (13)$$

$b$  는 패널의 크기를 나타내고,  $0 \leq x_i < h_i$  이면  $h_{i,i}/2 = x_i$  이고, 그렇지 않은 경우는  $h_{i,i}/2 = h_i/2$  이다.

### 2.6 입자 재배치

입자강도교환을 기반으로 하는 입자와법에서 점성확산에 의한 영향을 효과적으로 모사하기 위하여 입자들간의 균일한 중첩을 유지하는 것이 필수적이다. 그러나 라그랑지안적 특성상 대류에 의한 입자 간격의 변형은 피할 수 없으므로 적절한 시간간격마다 입자를 재배치해야 한다. 입자 재배치는 와도장의 전체 순환과, 선형운동량, 각운동량을 보존하면서 입자의 위치를 균일한 간격으로 보간한다.

$$\tilde{\Gamma}_i(\tilde{x}_i) \approx \sum_{j=1}^M \Gamma_j(x_j) A \left( \frac{|\tilde{x}_i - x_j|}{h} \right) \quad (14)$$

입자를 재배치하기 위한 커널은 다음과 같다.

$$A_2(u) = \begin{cases} 1-u^2 & \text{if } 0 \leq u < 1/2 \\ (1-u)(2-u)/2 & \text{if } 1/2 \leq u < 3/2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15)$$

$$M_4'(u) = \begin{cases} 1-5x^2/2+3x^3/2 & \text{if } u \leq 1 \\ (2-u)^2(1-u)/2 & \text{if } 1 < u \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (16)$$

여기서,  $u=|x|/h$  로 무차원 거리이며, 원주방향의 보간에 대하여 G.-H. Cottet & P. Koumoutsakos가 제안한  $M_4'$  커널을 사용하였다.

### 3. 결과 및 고찰

본 연구에서는 입자와법으로 계산된  $T=6$  까지의 수치해석적 결과에 대한 정확도를 평가하기 위하여, N. Boisaubert, M. Coutanceau & P. Ehrmann의 실험결과와 비교하였다. 레이놀즈 수 ( $Re=UD/\nu$ )  $Re=60, 100, 200$ 일 때, 반원형 실린더의 각 형상(형상A, 형상B)에 대하여 각각의 시간 전개에 따른 유동 후류의 성장을 시뮬레이션하였다.

#### 3.1 등근면이 전연에 위치하는 경우

Fig. 1의 (a),(b),(c)는 반원형 실린더의 형상A에 대하여,  $Re=60, 100, 200$ 에서 시간전개에 따른 재순환 영역(recirculating zone)의 길이변화를 실험결과와 비교하였으며 비교적 잘 맞는 경향을 보이고 있다.

또한, 실린더 후류의 유동 형태를 검증하기 위하여  $Re=100, T=3$ 일 때의 입자-유맥 가시화 결과와 유선을 비교하였다(Fig. 2). 이것은 시간이 진전됨에 따라 유동 후류에서 생성되는 와류의 성장을 정확히 잘 묘사하고 있다.

Fig. 3은  $Re=100, T=3$  일 때의 실린더 주변의 와도장을 나타낸 것으로서, 실린더 전연부의 와도분포를 명확하게 알 수 있다.

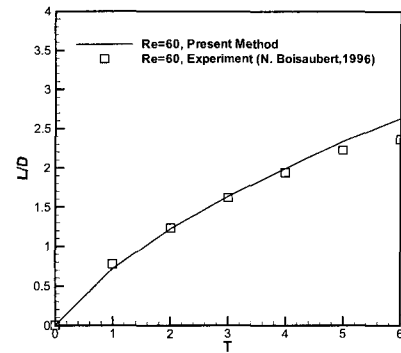
#### 3.2 평형면이 전연에 위치하는 경우

Fig. 4는 반원형 실린더의 형상B에서,  $Re=60, 100$ 일 때의 시간전개에 대한 재순환 영역의 길이변화를 실험결과와 비교하였으며, 형상A와 마찬가지로 실험결과와 좋은 일치성을 보이고 있다.

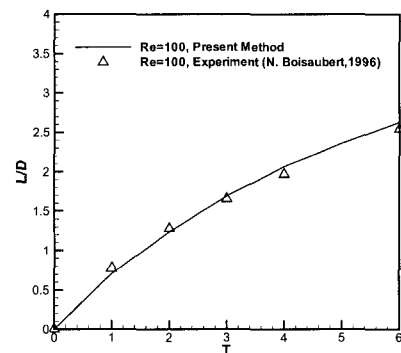
Fig. 5는  $Re=100, T=3$ 일 때, 실린더 주변의 와도장을 나타낸 것으로서 실린더 전연부의 모서리에서 발생하는 와도의 분포와 후연부에 등근면이 위치했을 때 와도장에 미치는 영향을 나타내고 있다.

#### 3.3 결과 비교

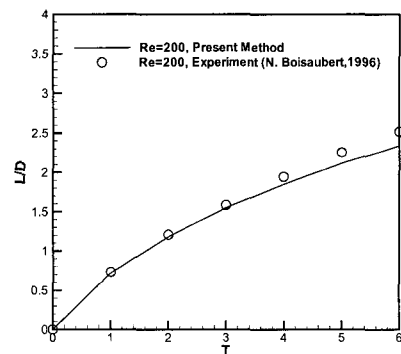
급 출발한 이후에 바로, 실린더의 양단에서는 박리가 발생하고 후류에서는 반대방향으로 회전하는 한쌍의 대칭적인 와가 형성된다. 따라서, 이러한 유동의 양상을 수치해석적으로 묘사하는 것은 라그랑지안적 특성을 지닌 입자와법의 사용이 타당하다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 1 Length of Recirculating zone for rounded-forebody

(a)  $Re=60$ , (b)  $Re=100$ , (c)  $Re=200$

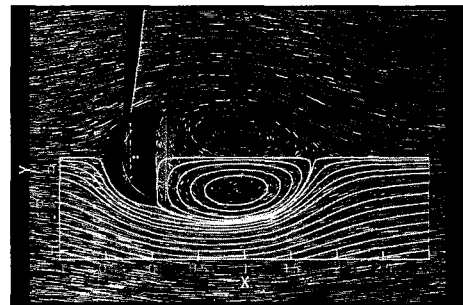


Fig. 2 Comparison of instantaneous streamline for  $Re=100$  at  $T=3$

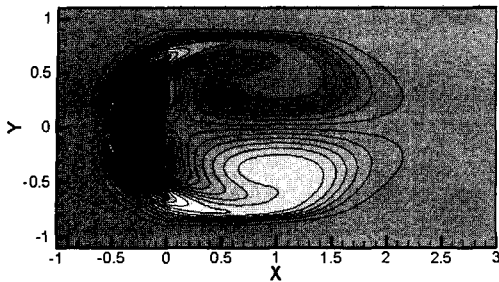
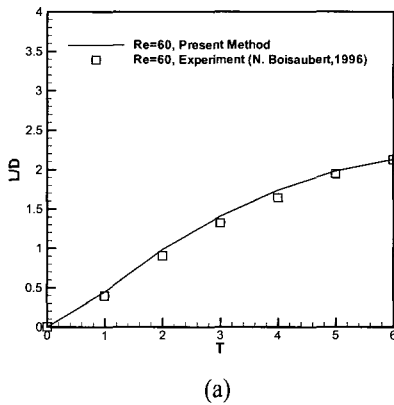
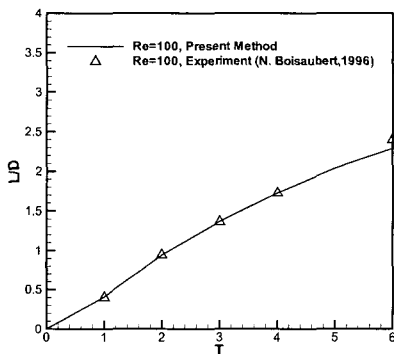


Fig. 3 Instantaneous vorticity contour for  $Re=100$  at  $T=3$



(a)



(b)

Fig. 4 Length of Recirculating zone for flat-forebody (a)  $Re=60$ , (b)  $Re=100$

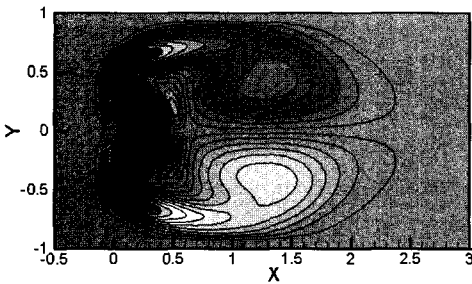


Fig. 5 Instantaneous vorticity contour for  $Re=100$  at  $T=3$

#### 4. 결론

급 출발하는 반원형 실린더의 비정상 점성유동에 대하여 후류에서 생성되는 재순환 영역의 시간발달에 따른 유동장의 변화를 입자와법을 사용하여 수치계산하였다.

레이놀즈 수가 60, 100, 200일때, 각각의 형상A와 형상B에 대하여 재순환 영역의 길이를 실험결과와 비교하였다.

반원형 실린더는 둥근면과 평형면을 모두 가지고 있고 또한 평형면이 둥근면과 이루는 모서리는 예각에 해당하므로 이와 같은 기하학적인 특성을 요구하는 유동문제에 대하여 기초적인 이해를 도울 수 있을 것으로 사료된다.

#### 참고문헌

- [1] Degond, P. and Mas-Gallic, S., The weighted particle method for convection-diffusion equations. Part 1: The case of an isotropic viscosity, *Maths. of Computations*, 53(188) (1989), pp. 485-507.
- [2] Koumoutsakos, P. D., Direct numerical simulations of unsteady flows using vortex methods, Ph.D. thesis, Caltech, (1993).
- [3] Koumoutsakos, P. and Leonard, A., High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods, *J. Fluid Mech.*, 296 (1995), pp. 1-38.
- [4] Koumoutsakos, P. and Shiels, D., Simulations of the viscous flow normal to an impulsively started and uniformly accelerated flat plate, *J. Fluid Mech.*, 328 (1996), pp. 177-227.
- [5] Chorin, A. J., Numerical study of slightly viscous flow, *J. Fluid Mech.*, 57 (1973), pp. 785.
- [6] Beale, J. T. and Majda, A., High order accurate vortex methods with explicit velocity kernels, *J. Comp. Phys.*, 58 (1985), pp. 188-208.
- [7] Ploumhans, P., Winkelmann, G.S., Vortex methods for high-resolution simulations of viscous flow past bluff bodies of general geometry, *J. Comp. Phys.*, 165(2000), pp. 354-406
- [8] Cottet, G-H., Koumoutsakos, P., *Vortex Methods*, Cambridge University Press, (2000)
- [9] Boisaubert, N., Coutanceau M. & Ehrmann P., Comparative early development of wake vortices behind a short semicircular-section cylinder in two opposite arrangements, *J. Fluid Mech.*, 327(1996), pp.73-99
- [10] Bouard, R. & Coutanceau, M., The early stage of development of the wake behind an impulsively started cylinder for  $40 < Re < 10^4$ , *J. Fluid Mech.*, 101(1980), pp.583-607
- [11] Bar-Lev, M. and Yang, H. T., Initial flow field over an impulsively started cylinder, *J. Fluid Mech.*, Vol. 72, (1975), pp. 625-647.