Proceedings of
The Second National Congress on Fluids Engineering
August 22-24, 2002, Muju, Korea

직사각형 용기내의 주기유동에 관한 연구

박 재 현*·서 용 권**

Study on the Periodic Flows in a Rectangular Container under a Background Rotation

Jae Hyun Park* and Yong Kweon Suh**

Key Words : *rotating flow(회전유동), background rotation(배경회전), Ekman pumping(에크만 펌핑), rectangular container(직사각형 용기)*

Abstract

We present numerical and experimental result of the rotating flows inside a rectangular container under a background rotation. In numerical computation, a parallel-computation technique with MPI is implemented. Flow visualization and PIV measurement are also performed to obtain velocity fields at the free surface. Through a series of numerical and experimental works, we aim to clarify, if any, the fundamental reasons of discrepancy between the two-dimensional computation and the experimental measurement, which was detected in the previous study for the same flow model. Specifically, we check if the various assumptions prerequisite for the validity of the classical Ekman pumping law are satisfied for periodic flows under a background rotation.

1. 서 론

본 연구는 액체가 담긴 직사각형 용기를 회전시켜 스핀-업(spin-up) 시킨 뒤 주기적인 외력을 가하여 요동운동 시킬 때, 용기 내에 나타나는 유동의 특성을 실험 및 수치해석 방법으로 조사한 것이다. 서와 김[1], 서 등[2]은 본 유동모델의 2차원 수치해석과 가시화 실험을 통하여 낮은 로스비 수(Rossby number)와 레이놀즈 수(Reynolds number)의 유동에 적용할 수 있는 Ekman 분출모델을 제안하였다. 한편, Suh & Choi[3]는 van Heijst 등[4]에 의해서 처음 연구된 직사각형 용기 내의 단순한 스핀-업 유동 모델에 대한 연구를 통해서 높은 로스비 수의 유동에도 적용할 수 있는 Ekman 분출모델을 제안한 바 있다.

직사각형 혹은 원통 용기내의 단순한 스핀-업 유동과는 달리 주기적인 외력이 가해지는 직사각형 혹은 원통 용기내의 유동은 변화가 복잡하고 지속적이며 로스비 수와 레이놀즈 수의 변화에 따라서 주기적 혹은 비주기적인 특성을 보인다[1],[2]. 이는 실제 해양이나 기상에서 일어나는 유동의 특성에 더욱 가깝다고 할 수 있다. 따라서 상기 두 가지 유동모델에 적용된 Ekman 분출모델의 로스비 수에 따른 정확성의 차이에 대해 물리적으로 분석할 필요가 있다.

본 연구의 목적은 종횡비가 2인 직사각형 용기 내의 유동을 3차원적으로 수치해석한 결과와 실험결과를 비교하여 로스비 수와 레이놀즈 수에 따른 유동의 특성을 파악하여 Ekman 분출모델을 사용한 2차원 수치해석결과와 가시화실험 결과의 차이를 분석하고 높은 로스비 수와 레이놀즈 수의 경우에 대한 보다 나은 Ekman 분출모델의 개발을 위한 기초 데이터를 확보하는데 있다.

* 동아대학교 대학원 기계공학과, p6873@donga.ac.kr
** 동아대학교 기계산업시스템 공학부, yksuh@mail.donga..ac.kr

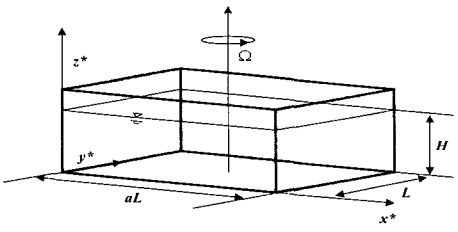


Fig. 1 Schematic diagram of the model basin.

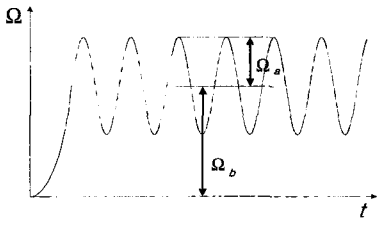


Fig. 2 Angular velocity of the turn table.

2. 유동모델과 지배방정식

2.1 유동모델

Fig. 1은 본 연구에서 사용된 모델과 좌표계를, Fig.. 2는 시간에 따른 용기의 각속도 변화를 나타낸 것이다. H는 수심, L은 용기의 세로방향(y^*-방향) 길이, aL은 가로방향(x^*-방향) 길이

이며, α=2에 대해 국한시킨다. 용기는 $x^*=aL$, $y^*=L/2$ 인 지점 즉, 용기의 중앙을 축으로 하여 회전한다. 직사각형 용기의 회전각속도는 $\Omega(t)=\Omega_b+\Omega_a \sin\omega^* t$ 와 같이 배경회전(background rotation) Ω_b에 진폭 Ω_a, 각속도 ω^*로 회전요동하는 각속도가 덧붙여진다.

2.2 지배방정식

속도를 $L\Omega_a$ 로, 시간을 $1/\Omega_a$로, 길이를 L로, 그리고 압력을 $\rho L^2\Omega_a\Omega_b$로 무차원화하면 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-2\left\{\frac{1}{\varepsilon}+f\right\}v=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\nabla^2 u+y\frac{df}{dt} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+2\left\{\frac{1}{\varepsilon}+f\right\}u=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\nabla^2 v-x\frac{df}{dt} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{Re}\nabla^2 w \quad (1c)$$

여기서 t는 무차원 시간, x, y, z는 용기와 같이 회전하는 무차원 좌표계를 나타내며 $f=\sin\omega t$로서 외력에 해당된다. 식 (1a), (1b), (1c) 및 기하학적 관계에서 사용된 무차원 변수는 다음과 같다.

$$\varepsilon=\frac{\Omega_a}{\Omega_b},\ Re=\frac{L^2\Omega_a}{\nu},\ \omega=\frac{\omega^*}{\Omega_a},\ h=\frac{H}{L} \quad (2)$$

여기서 ε은 로스비 수, Re는 레이놀즈 수, h는 수직종횡비(무차원 수심)이다.

수평단면의 공간평균 운동에너지는 다음과 같다.

$$E(z,t)=\frac{1}{A}\int(u^2+v^2)dxdy \quad (3)$$

여기서 A는 유동장의 면적으로서 2 이다.

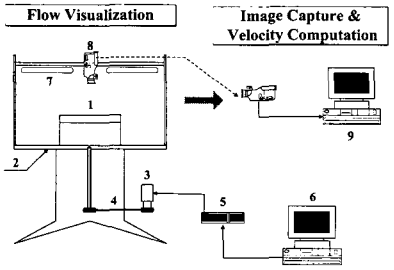
3. 수치해석과 실험방법

3.1 수식해석 방법

Table 1은 수치해석을 수행한 3가지 경우에 대한 4가지의 파라미터를 나타낸 것으로 Re와 ε을 변화시켰으며 격자수는 $I\times J\times K$= 150×75×30이다. 지배방정식을 공간에 대해서는 중심차분으로 차분화하였고, 시간에 대해서는 양적인 오일러(Explicit Euler)법으로 처리하였으며, 무차원 시간 증분은 Re에 따라 0.001~0.005로 두었다. 병렬연산을 위해 압력항은 PCGM(pre-conditioned conjugate gradient method)를 사용하였고 수렴의 가속을 위한 전처리로 D-ILU법을 사용하였다. 속도경계조건은 각 벽면에 대해서 점착조건(no-slip condition)과 비침투조건(impermeable condition)을, 자유표면(무차원 수심 h에 대한 $z=h$ 인 면)에 대해서는 무응력조건을 적용하였다. 압력경계조건은 이러한 속도 및 응력 조건을 식(1a)~(1c)에 적용한 수식으로부터 유도된다.

Table 1 Parametric values for each computational case.

case	1	2	3
Re	1548	2356	2356
ω	0.4	0.4	0.4
ε	0.2	0.2	0.3
h	0.4	0.4	0.4



1. Rectangular Container 2. Turntable
3. Servo Motor 4. Timing Belt
5. Servo Motor Controller 6. Motor Control PC
7. Fluorescent Light 8. CCD Camera
9. Host Computer & Image Grabber

Fig. 3 Schematic arrangement of the turntable & the PIV system.

3.2 실험 방법

Fig. 3은 실험장치를 도시한 것으로 본 연구에서는 속도 가변형의 회전 테이블을 사용하여 가시화 실험을 수행하였다.

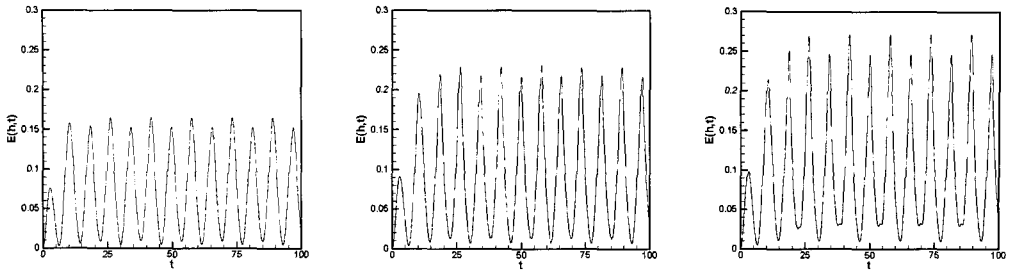
우선 가로×세로=$0.3\times0.15[m]$ 크기의 직사각형 용기가 수평으로 놓인 회전 테이블을 Ω_b의 속도로 회전시킨 뒤, 진폭 Ω_a, 각속도 ω^*로 회전요동 시켰다. case 1, 2, 3에 대해서 Ω_b = 3.29[rpm], 5[rpm], 3.34[rpm], Ω_a = 0.663[rpm], 1[rpm], 1[rpm] 이며 ω^* = 0.263[rpm], 0.4[rpm], 0.4[rpm] 이다. 유동 가시화를 위해서 사용한 입자는 아크릴 파우더이며 입자의 촬영에는 최대 해상도 1208*1024 pixels 80 nano-sec 이상의 시간 간격의 2쌍의 영상들을 초당 4쌍까지 처리 가능한 CCD 카메라(Lavision Co), 그리고 프레임 그래버를 내장한 PC를 사용하였다. 이 실험의 해석 알고리즘은 Window with CBC를 이용하였다.

4. 결과 및 검토

4.1 유동의 주기성

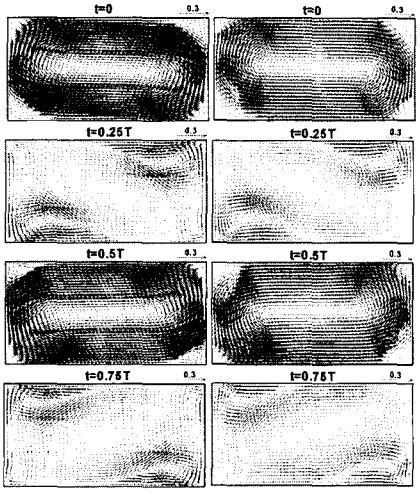
유동의 주기적 특성을 파악하기 위해서 시간에 따른 자유표면의 공간평균 운동에너지를 구하였으며 Fig. 4에 나타내었다. case 1, 2, 3 모두, 초기에 천이유동을 보이지만 약 3 주기 후부터는 주기성을 보인다. 본 연구에서 제시한 결과는 모두 주기성을 보이는 구간에서 구한 것이다.

case 1과 2의 결과를 통해서 일반적인 유동과 마찬가지로, 레이놀즈 수가 증가함에 따라 유동이 강해짐을 알 수 있다. 또한 case 2와 3의 결과를 통해서 로스비수의 증가에 따라서 역시 유동이 강해짐을 확인할 수 있다. 고전 Ekman 분출 법칙에 따르면 로스비 수가 낮을 경우에 Ekman 분출속도는 $\sqrt{\varepsilon/Re}$에 비례하며 와도 방정식(vorticity equation)에 대입하여 $d\zeta/dt$는



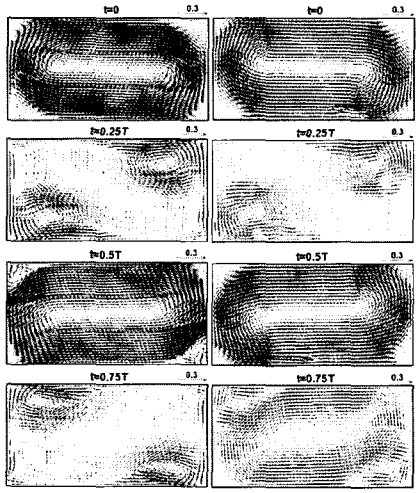
(a) case 1 (Re=1548, ε=0.2) (b) case 2 (Re=2356, ε=0.2) (c) case 3 (Re=2356, ε=0.3)

Fig. 4 Time history of the spatially averaged kinetic energy.



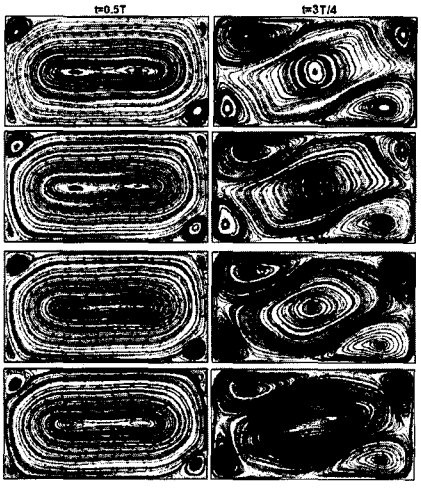
(a) Numerical result (b) PIV result

Fig. 5 Velocity vectors on the free surface for the case 2.



(a) Numerical result (b) PIV result

Fig. 6 Velocity vectors on the free surface for the case 3.



(a) case 1 (b) case 2

Fig. 7 Streamline plots on the horizontal planes at t=0.5T for the case 1 and t=3T/4 for the case 2; z=h, 3h/4, 2h/4 and h/4 (from top to bottom).

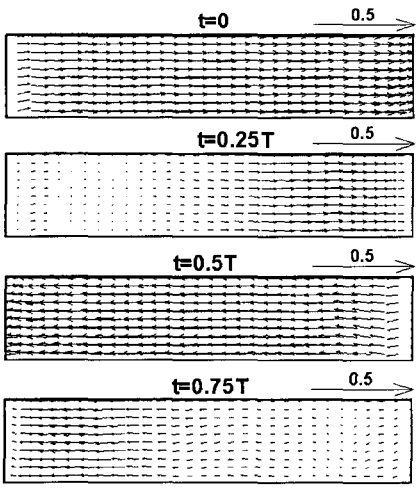


Fig. 8 Velocity vector plots on the vertical plane y=0.5 for the case 3.

$-\zeta/\sqrt{\varepsilon\, Re}$에 비례인 와도-운동 방정식(vorticity-dynamical equation)을 구할 수 있다(Suh & Choi[3]). 이 결과로부터, 레이놀즈 수나 로스비 수가 증가할 경우, 댐핑 계수(damping coefficient) $1/\sqrt{\varepsilon\, Re}$가 감소되며 따라서 Fig. 4의 결과에서처럼 유동이 강해진다. 또한 본 연구에서 자유표면을 비롯, 수직높이에 따른 수평면상의 공간평균 운동에너지를 비교하였으며 자유표면의 공간평균 운동에너지가 가장 작지만 그 차이는 크지 않았으며 바닥의 경계층 지역을 제외한 수평면의 공간평균 운동에너지가 거의 같음을 알 수 있었다.

Fig. 5는 case 2, Fig. 6은 case 3에서 구한 자유표면에서의 속도벡터로서 수치해석결과와 실험결과를 비교한 것으로 두 결과가 잘 일치함을 알 수 있다. 특히 모서리에서 발생한 코너 보텍

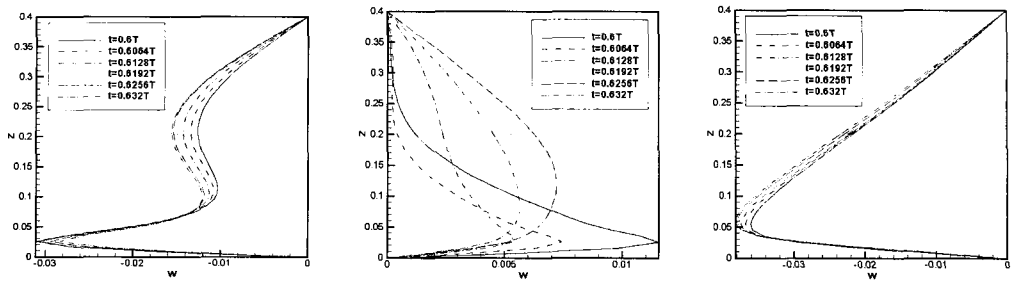


Fig. 9 Distribution of the vertical velocity w at three locations shiw for the case 3 at six instants of time.

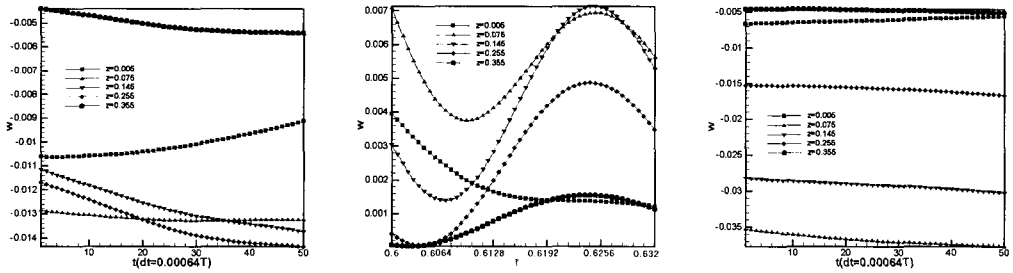


Fig. 10 Time history of the vertical velocity w for the case 3.

스는 Re가 동일한 경우, ε이 클 때 잘 발달된다는 것을 알 수 있으며 이는 상기 설명에서처럼, ε의 증가로 댐핑 효과가 감소했기 때문이다.

Fig. 7은 case 1과 2의 경우에 대해서 t가 일정할 때 수직높이에 따른 수평단면상의 유선을 나타낸 것이다. 두 경우 모두 수직높이와 관계없이 유선은 거의 같으며 이와 같은 사실은 공간평균 운동에너지의 결과로부터 예측된 것으로서, 수직높이에 따른 수평면의 속도성분(u, v)의 변화는 거의 없다는 것을 알 수 있다. 이는 고전 Ekman 분출이론의 가정과 부분적으로 일치한다.

Fig. 8은 case 3의 y=0.5 지점의 x-z 단면의 속도벡터를 나타낸 것이다. 수평방향의 유속성분은 수직높이의 변화에 따른 차이가 거의 없으며 이는 앞서 살펴본 결과(Fig. 7)와 일치한다.

4.2 수직방향 속도의 분포

수평방향 속도(u, v)가 수직위치와 거의 무관하다는 사실이 반드시 수직방향 속도(w)가 수직위치 좌표 z에 따라서 선형적으로 변한다고는 말 할 수 없다.

Fig.. 9는 y = 0.75로 위치를 고정한 상태에서 용기의 x-방향의 세 지점에 대한 수직속도 분포의 시간변화를 아주 짧은 시간동안 나타낸 것이다. 이 짧은 시간동안 주 유동은 Fig. 6에서 알 수 있는 바와 같이 중앙지역은 반 시계방향(cyclonic), 코너지역은 시계방향(anti-cyclonic)의 유동을 보인다. 따라서 용기의 중앙(Fig. 9(b))에서는 펌핑이(w>0), 코너(Fig. 9(a), (c))쪽에서는 석션현상이 발생함을 이해할 수 있다. 하지만 x = 0.016과 용기의 중앙부에서의 속도분포는 상당히 비선형이고, 특히 용기의 중앙부에서는 아주 짧은 시간동안 수직속도성분의 변화가 심하다는 것을 알 수 있다.

Fig.. 10은 용기내의 고정된 지점의 수직속도 성분을 시간진행에 따라서 나타낸 것이다. Fig.. 9의 결과와 마찬가지로 용기의 중앙부에서 짧은 시간동안 수직속도의 변화가 심하게 나타남을 알 수 있다(특히 (b)). 이는 고전적인 Ekman 펌핑 법칙의 대전제 즉, (h - z)에 비례한다는 가정에 어긋나는 것이다. 따라서 높은 레이놀즈 수와 높은 로스비 수의 주기유동에 대한 효율적인 2차원 모델의 개발을 위해서는 수직속도성분의 시간적, 공간적인 비선형성을 고려해야 할 것이다.

5. 결론

회전요동하는 직사각형 용기내의 주기유동에 관한 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 레이놀즈 수와 로스비 수가 증가하면 유동은 강해진다.

(2) 바닥의 경계층을 제외한 용기내의 수평단면의 속도성분은 수심의 변화에 따라서 크게 변하지 않으며 고전 Ekman 가정과 잘 일치한다.

(3) 바닥의 경계층을 제외한 용기내의 수직속도 성분은 시간, 공간적으로 비선형이며 고전 Ekman 가정에 어긋난다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R01-2000-00290)지원으로 수행되었음.

참고문헌

[1] 서용권, 김용균, 배경회전하에서 회전요동하는 직사각형 용기내의 유동해석, 대한기계학회 1998년도 추계학술대회논문집(1998), pp.869-875.

[2] 서용권, 최윤환, 김성균, 이두열, PIV를 이용한 바탕회전하에서 회전요동하는 직사각형 용기내의 유동해석, 대한기계학회 논문집 B권, 제24권, 제6호(2000), pp.845-851.

[3] Suh, Y.K. & Y.H. Choi, Study on the Spin-up of Fluid in a Rectangular Container Using Ekman Pumping Models, J. Fluid Mech., Vol. 458(2002), pp.103-132.

[4] van Heijst, G.J.F., Davies, P.A. & Davies R.G., Spin-up in a Rectangular Containers, Phys. Fluid, Vol. 2, No. 2(1990), pp.150～159.