

## 파랑 변형 해석을 위한 복합 유한요소 모형

정태화\* · 박우선\*\* · 서경덕\*\*\*

### Hybrid finite element model for wave transformation analysis

Jung, Tae Hwa\* · Park, Woo Sun\*\* · Suh, Kyung Duck\*\*\*

**Keywords :** Regular Finite Element Method(유한요소법), Wave Analysis(파랑해석),  
Rapidly Varying Topography(급변수심),

#### Abstract

Since Berkhoff proposed the mild-slope equation in 1972, it has widely been used for calculation of shallow water wave transformation. Recently, it was extended to give an extended mild-slope equation, which includes the bottom slope squared term and bottom curvature term so as to be capable of modeling wave transformation on rapidly varying topography. These equations were derived by integrating the Laplace equation vertically. In the present study, we develop a finite element model to solve the Laplace equation directly while keeping the same computational efficiency as the mild-slope equation. This model assumes the vertical variation of wave potential as a cosine hyperbolic function as done in the derivation of the mild-slope equation, and the Galerkin method is used to discretize. The computational domain was discretized with proper finite elements, while the radiation condition at infinity was treated by introducing the concept of an infinite element. The upper boundary condition can be either free surface or a solid structure. The applicability of the developed model was verified through example analyses of two-dimensional wave reflection and transmission.

#### 1. 서론

1972년 Berkhoff의 완경사 방정식이 발표되면서 수심이 변하는 천해 파랑변형 해석에는 이 식이 주로 이용되어져 왔다. 1993년 이 식에 해저면의 경사의 제곱과 곡률에 관계되는 항을 포함시킨 확장형 완경사 방정식이 발표되면서(Massel, 1993) 보다 급히 변하는 수심조건에서의 파랑변형 해석도 성공적으로 모의가 가능해졌다. 현재 이 확장형 완경사 방정식이 천해 파랑변형에 대한 지배방정식으로 인식될 정도로 널리 사용되어지고 있다고 해도 과언이 아니다.

본 연구에서는 확장형 완경사 방정식을 사용하지 않으면서도 같은 계산상의 효율과 정도를 얻을 수 있는 방법에 대해서 연구하였다. 즉, 파동의 연직방향 거동을 기존의 완경사 방정식을 유도할 때 사용한 가정과 같이  $\cosh k(h+z)$  함수로 나타낸 후 이를 Galerkin 방법으로 이산화한 유한 요소 모델을 개발하였다. 무한 원방에서의 방사 경계조건은 무한요소 개념을 도입하여 처리하였다.

#### 2. 수학적 모델

##### 2.1 지배 방정식

\* 서울대학교 지구환경시스템공학부, togyel76@snu.ac.kr  
\*\* 한국해양연구원, wspark@kordi.re.kr  
\*\*\* 서울대학교 지구환경시스템공학부, kdsuh@snu.ac.kr

비점성, 비압축성 유체이고 비회전류를 가정하면 파동장은 다음과 같은 Laplace 방정식을 만족하는 속도포텐셜로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

또한, 규칙 파열(regular wave train)을 고려하여 미소 진폭을 가정하면 각 경계면에서의 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi \quad \text{on } S_f \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \alpha \phi \quad \text{on } S_w \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_d \quad (4)$$

여기서,  $S_f$ 는 자유 수면,  $S_w$ 는 고체경계면,  $S_d$ 는 바닥면을 나타내며,  $n$ 은 고체면에서 바깥쪽으로 직각 방향을,  $\alpha$ 는 고체벽에서의 반사와 관련된 상수이다.

한편 무한 원방에서는 다음의 방사 조건을 만족하여야 한다.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) = 0 \quad (5)$$

경계치 문제를 효율적으로 수치화하기 위하여 대상영역을 주된 관심 영역인 영역  $\Omega_2$ 에서는 입사파 속도포텐셜을 기지의 값으로 가정하 유한요소 영역  $\Omega_1$ 과 이를 둘러싼 무한요소 영역  $\Omega_2$ 로 분리하여 하였다. 영역  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 에서의 속도포텐셜은 입사파 속도포텐셜  $\phi_I$ 와 산란파 속도포텐셜  $\phi_S$ 로 분리하여 표현할 수 있는데 영역  $\Omega_1$ 에서는 이들이 합인  $\phi_1 = \phi_I + \phi_S$ 가 미지수가 되며,므로  $\phi_2 = \phi_S$ 를 미지수로 하였다.

## 2.2 정합조건

유한요소 영역  $\Omega_1$ 과 무한요소 영역  $\Omega_2$ 의 경계면  $\Gamma_1$ 에서는 다음과 같은 정합 조건을 만족해야 한다.

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_I \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\phi_1)}{\partial n} = -\frac{\partial(\phi_2 + \phi_I)}{\partial n} \quad (7)$$

여기서,  $\phi_1$ 은 유한요소 영역에서의 전체 속도포텐셜을 나타내며,  $\phi_2$ 는 무한요소내의 속도포텐셜로 입사파의 속도포텐셜  $\phi_I$ 를 제외한 산란파의 속도포텐셜을 나타낸다.

입사파가  $\theta_I$ 의 각도로 진입할 경우의 속도포텐셜  $\phi_I$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi_I = -\frac{iga_0}{\omega} e^{ikr \cos(\theta - \theta_I)} \quad (8)$$

여기서,  $a_0$ 는 입사파의 진폭을 의미한다.

## 3. 유한요소 모형

### 3.1 유체 영역의 이산화

유한 요소법으로 경계치 문제를 이산화하기 위해서는 먼저, 해석영역을 적절한 유한요소로 분할한 후 각 요소내의 속도포텐셜을 요소의 절점 속도포텐셜로 보간하여 나타내어야 한다. 즉,

$$\phi = N^T \phi^e \quad (9)$$

여기서,  $\phi^e$ 는 절점 속도포텐셜 벡터,  $N$ 은 형상함수 벡터를 나타낸다.

식(9)를 식(1)에 대입한 후 Galerkin 기법을 적용하면 식(1)-(4)의 경계치문제는 다음과 같이 이산화된다.

$$\sum_e [(K_{\Omega^e} - K_{S_f^e} - K_{S_w^e})\phi^e = F^e] \quad (10)$$

여기서,

$$K_{\Omega^e} = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial N^T}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial N^T}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial N^T}{\partial z} \right) d\Omega^e \quad (11)$$

$$K_{S_f^e} = \frac{\omega^2}{g} \int_{S_f^e} NN^T dS_f^e \quad (12)$$

$$K_{S_w^e} = \alpha \int_{S_w^e} NN^T dS_w^e \quad (13)$$

그리고,  $F^e$ 는 다음 식으로 나타내진다.

$$F^e = \int_{S_f^e} V_n N dS_f^e \quad (14)$$

여기서,  $V_n$ 은  $S_f$ 에 수직인 방향의 속도를 의미한다.

### 3.2 복합 유한 요소

기존의 환경사 방정식과 등가의 효율을 갖도록 하기 위하여 파동장을 다음과 같은 보간함수를 갖는 복합유한요소를 도입하여 모형화하였다.

$$N = N_z \bar{N} \quad (15)$$

여기서,  $\bar{N}$ 는 일반적인 유한요소의 보간함수벡터를 나타내며,  $N_z$ 는 속도포텐셜의 수심방향에 대한 보간함수를 의미하며, 본 연구에서는 환경사 방정식에서와 같이 진행파의 연직방향 거동을 나타내는  $\cosh k(h+z)$  함수를 이용하여 다음과 같이 결정하였다.

$$N_z = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (16)$$

식(15)를 식(11)-(14)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} K_{\Omega^e} &= \int_{\Omega^e} \left( \left( \frac{\partial N_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial N_z}{\partial z} \right)^2 \right) \bar{N} \bar{N}^T d\Omega^e \\ &+ \int_{\Omega^e} N_z \frac{\partial N_z}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} \bar{N}^T + \bar{N} \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial x} \right) d\Omega^e \\ &+ \int_{\Omega^e} N_z \frac{\partial N_z}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} \bar{N}^T + \bar{N} \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial y} \right) d\Omega^e \\ &+ \int_{\Omega^e} N_z^2 \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}}{\partial y} \frac{\partial \bar{N}^T}{\partial y} \right) d\Omega^e \end{aligned} \quad (17)$$

$$K_{S_w^e} = \alpha \int_{S_w^e} N_z^2 \bar{N} \bar{N}^T dS_w^e \quad (18)$$

$$F^e = \int_{S_f^e} V_n N_z \bar{N} dS_f^e \quad (19)$$

#### 4 모델의 타당성 검증

개발된 모델의 타당성 검증을 보다 수월하게 하기 위하여 우선 연직 2 차원 문제에 적용하였다. 즉, 확장형 환경사 방정식을 이용한 해가 존재하는 경사면이 있는 경우와 실험치가 동시에 존재하는 해저면에 ripple 이 존재하는 경우에 대한 예제 해석을 수행하여 서로 비교하였다.

##### 4.1 경사면의 기울기변화에 따른 반사

Fig. 1 은 입사파 측의 수심은 0.6m 전달파 측의 수심은 0.2m 인 경우의 경사면의 수평길이(B) 변화에 따른 반사율의 변화를 나타낸 것이다. 확장형 환경사 방정식을 이용하여 구한 Suh et al.(1997)의 결과와 거의 일치함을 알 수 있다.

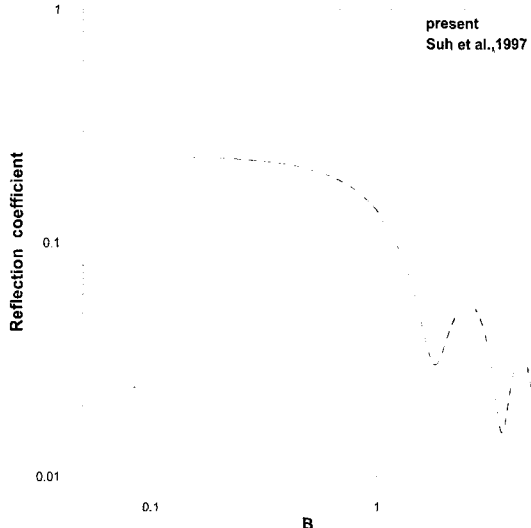


Fig 1. Comparison of reflection coefficients

##### 4.2 해저면 Ripple 에 의한 Bragg 반사

해저면이 연속적으로 변하는 경우에 대한 적용성을 판단하기 위하여 Davies and Heathershaw (1984)의 실험 데이터와 확장형 환경사 방정식에 의한 해가 존재하는 다음식으로 표시되는 해저 Ripple 에 대한 해석을 실시하였다.

$$h(x) = \begin{cases} 15.6 & x \leq 0 \\ 15.6 - 5 \sin(Kx) & 0 \leq x \leq 100n \\ 15.6 & x \geq 100n \end{cases} \quad (20)$$

여기서,  $n$  은 ripple 의 수를 나타내며,  $K$  는 ripple 의 파수 ( $=2\pi/\lambda$ )를,  $\lambda$  는 ripple 의 파장을 의미한다.

$n$  이 2 인 경우와 4 인 경우에 대한 해석결과를 서로 비교하여 나타낸 Fig. 2 와 3 을 살펴보면 수치해석결과는 서로 거의 일치하며 실험결과와도 경향이 상당히 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

#### 5. 결론

본 연구에서는 천해 파랑의 변형을 해석하는데 있어 사용되고 있는 확장형 환경사 방정식과 같은 정도와 계산상의 효율을 갖는 새로운 유한요소 모델을 개발하였다. 개발된 모델은 3 차원 Laplace 방정식을 직접 유한 요소법으로 풀도록 구성되어 있으며, 계산상의 효율을 위해 수심방향의 보간함수를

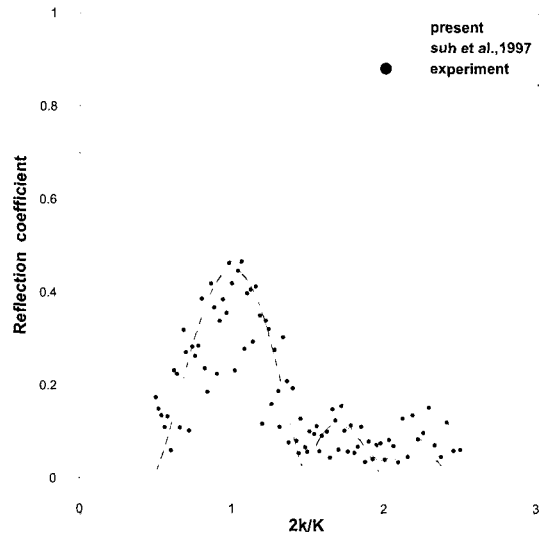


Fig 2. Comparison of reflection coefficients for  $n=2$

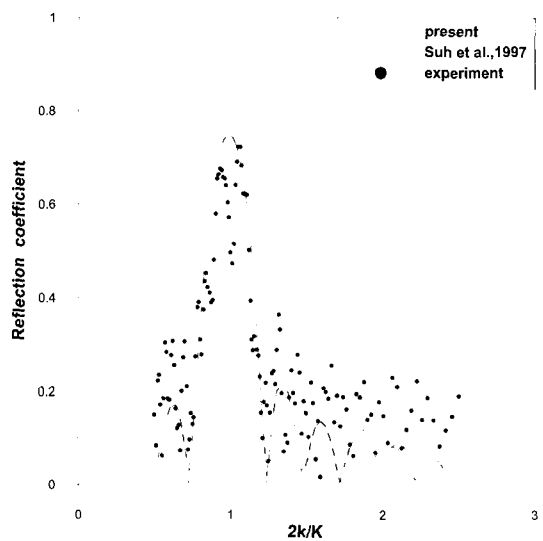


Fig 3. Comparison of reflection coefficients for  $n=4$

진행과의 수심방향 거동인  $\cosh k(h+z)$  를 사용하여 결정하였다. 방사경계조건은 무한요소를 사용하여 처리하였다.

해저면이 경사진 경우와 해저면에 연속적인 Ripple 이 형성된 경우에 대한 수치해석결과, 확장형 환경사 방정식에 의한 결과와 거의 같은 결과를 얻었으며, 실험치와도 경향이 잘 일치함을 확인하였다.

개발된 모델은 수심방향으로 절점이 필요없기 때문에 기존의 확장형 환경사 방정식을 채택하는 유한요소모형과 같은 계산상의 효율을 유지할 수 있으며, 추가적인 장점으로는 정수면에 대한 경계조건을 부여할 수 있기 때문에 그 적용범위가 넓다고 할 수 있다. 예를 들면 정수면에 고정된 물체가 있는 경우에도 어렵지 않게 해석이 가능하다.

현재 개발된 모델의 3 차원 문제에 대한 검증을 수행하고 있으며, 정수면에 고정된 물체가 있는 경우에 대한 적용성에 대한 검토도 수행하고 있다.

#### 참고문헌

- [1] Berkhoff, J.C.W., Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13<sup>th</sup> Coastal Engineering Conference, Vancouver, Vol. 1(1972), pp. 471-490.

- [2] Davies, A.G, Heathershaw, A.D., Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography, *Journal of Fluid Mechanics* 144(1984), pp. 419-443.
- [3] Massel, S.R., Extended refraction-diffraction equation for surface waves, *Coastal Engineering*, . 19(1993), pp. 755-767.
- [4] Suh, K.D., Lee, C.H, and Park, W.S, Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography, *Coastal Engineering* 32(1997), pp. 91-117.