

초음속 적정 팽창 제트 유동에 관한 연구

정미선*·김재형*·김희동**

Study of the Correctly-Expanded Supersonic Jets

Mi-Seon Jeong*, Jae-Hyung Kim* and Heuy-Dong Kim**

Keywords : Compressible Flow(압축성 유동), Shock Wave(충격파), Supersonic Jets(초음속 제트), Correctly-Expanded Jet(적정 팽창 제트), Jet Core Length(제트 코어 길이)

Abstract

Supersonic jet flow has been applied to many various industrial applications of manufacturing fields. Such a supersonic jet is generally classified by three flow patterns, depending on the flow state at nozzle exit, that is, under-, correctly- and over-expanded flows. Of these three flows, the correctly-expanded supersonic jet is most frequently used since it provides a maximum performance of a flow device. However detailed information on what conditions are the jet correctly expanded at the exit of nozzle is not well known. In the current study, computations are applied to the axisymmetric, compressible, Navier-Stokes equations. The design Mach number used are 2.0, 2.2 and 2.6. The computational results obtained are compared with the previous experimental ones. A theoretical analysis is conducted to predict the major features of the correctly-expanded jet. The results show that the jet core length is increased as Mach number is increased.

1. 서론

직경이 매우 작은 노즐로부터 방출되는 제트 유동은 여러 기계공학분야에 사용되고 있으며 최근 산업기계의 마이크로화와 더불어 그 필요성이 더욱 커지고 있다. 예를 들면, 마이크로 제트는 TV브라운관이나 각종 액정의 마스크, 반도체 제작 공정, 분자빔 장치, 각종 가공물의 크리닝 과정, 고화질 프린터의 헤더 장치 등의 각종 마이크로 장치 및 의공학 분야까지 그 활용범위가 넓어지고 있다^{1,2}. 특히, 의공학 분야에서는 가축이나 인체의 질병 치료시 주사바늘을 사용함으로써 인해 발생할 수 있는 부작용이나 주사 바늘의 후처리 등의 문제로 인해 마이크로 제트를 이용하여 가축이나 인체에 약물을 투여하는 방법이 세계적으로 주목을 받고 있다^{3,4}. 따라서, 공학적 적용을 위해서는 마이크로 제트의 상세한 유동 특성을 이해하는 것이 중요하다.

마이크로 제트의 유동 특성은 매우 작은 노즐 직경으로 인하여 직경이 큰 노즐에 비해 점성의 영향이 지배적으로 될 것으로 예상된다^{5,6}. 점성의 영향으로 인하여 노즐 출구의 유효 단면적은 축소되어, 적정팽창 압력비($p/p_e=1$)에서도 제트 유동은 부족팽창 하게 된다.

현재까지 이와 같은 직경이 매우 작은 초음속 마이크로 제트에 관한 연구는 매우 작은 직경으로 인하여 마이크로 제트 유동의 실험적 규명이 매우 곤란하며, 노즐의 제작도 그다지 쉽지 않기 때문에 압축성 마이크로 제트 유동의 특성이 잘 알려져 있지 않으며, 이에 관한 연구도 미비한 실정에 있다. 고도의 정밀 가공을 한다고 하더라도 노즐 벽면의 표면조도는

노즐 직경의 수 퍼센트 내지 수십 퍼센트가 될 수 있으므로, 노즐 출구에서 발생하는 제트의 유동에 상당한 영향을 미칠 것이다.

본 연구에서는 Navier-Stokes 방정식을 사용한 수치해석을 수행하여 마이크로 제트 유동의 상세 구조를 조사하였다. 특히, 마하수의 변화에 따른 초음속 마이크로 제트 유동의 실제 적정팽창 압력비를 조사하였으며, 유동의 마하수, 적정팽창 압력비 등을 수치해석 결과와 이론해석 결과¹⁰를 비교하였다. 또, 적정팽창 제트의 경우 제트 코어내의 충돌전압 분포를 이론 해석 결과¹¹와 수치해석 결과를 비교하였다.

2. 이론 해석

축대칭 압축성 마이크로 제트 유동의 지배 방정식은 다음으로 주어진다.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho ur) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho vr) = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho ur \left(C_p T + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho vr \left(C_p T + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] \\ = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$p = \rho RT \quad (5)$$

여기서, u 와 v 는 각각 x 방향과 r 방향의 속도, ρ 는 밀도, p 는 정압, μ 는 점성계수, C_p 는 정압 비열, T 는 정온도, λ 는 열전달율,

* 안동대학교 기계공학과대학원, piglet@anuis.andong.ac.kr

** 안동대학교 기계공학부, kimhd@andong.ac.kr

R은 기체상수를 나타낸다. 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$u = u_e (0 < r < D_e/2), \quad u = 0 (D_e/2 < r) \quad (6)$$

$$T = T_e (u = u_e), \quad T = T_b (u = 0) \quad (7)$$

여기에서 u_e 는 노즐 출구의 속도, D_e 는 노즐 출구의 직경, T_e 는 출구의 정온도, T_b 는 제트 주변의 온도를 나타낸다.

위의 식들에서 u, v, ρ, μ, x, r 을 아래의 식과 같이 노즐 출구의 상태로 무차원화했다.

$$\bar{u} \equiv \frac{u}{u_e}, \quad \bar{v} \equiv \frac{v}{u_e}, \quad \bar{\rho} \equiv \frac{\rho}{\rho_e}, \quad \bar{\mu} \equiv \frac{\mu}{\mu_e}, \quad \bar{x} \equiv \frac{x}{D_e}, \quad \bar{r} \equiv \frac{r}{D_e} \quad (8)$$

위 식을 식(2)에 대입하여 정리하면,

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} = \frac{1}{\text{Re}_{De}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{\mu} \bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) \quad (9)$$

윗 식에서 노즐 직경을 특성 길이로 하는 Reynolds 수로, $\text{Re}_{De} \equiv \rho_e u_e D_e / \mu_e$ 이다.

노즐 내부에서 발생하는 유동이 등엔트로피 과정이라고 가정하면, Re_{De} 는 노즐 상류의 상태량을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Re}_{De} = \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} \left(\frac{T_r}{T_0} \right)^n \frac{\rho_0 M_e D_e}{\mu_r} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right]^{-n - (\gamma+1)/2(\gamma-1)} \quad (10)$$

여기서, γ 는 기체 비열비, n 은 Maxwell-Rayleigh의 관계식에 의해 특정 기체에 대해 정해진 상수, 하첨자 r 은 기준상태를 나타낸다.

비선형 방정식 식(9)를 선형방정식으로 변형하면,

$$\text{Re}_{De} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) \quad (11)$$

위의 식(11)을 해는, 경계조건 식(6)을 이용하면,

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{r}) = \frac{u}{u_e} = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{r}} J_0(\bar{r}\xi) J_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{\text{Re}_{De}} \bar{x}\right) d\xi \quad (12)$$

위 식에서 J_0, J_1 은 각각 제1종 0차 및 1차 Bessel 함수이다. 제트 중심축상($r=0$)의 속도 u_c 는 다음의 식으로 나타낸다.

$$\bar{u}_c(\bar{x}) = \frac{u_c}{u_e} = 1 - \exp\left(-\frac{\text{Re}_{De}}{16} \left(\frac{\bar{x}}{D_e}\right)\right) \quad (13)$$

식(4)에서 $u^2 + v^2 \approx u^2$ 이라 하고, $T = f(u)$, $\text{Pr} = C_p \mu / \lambda = 1$ 라 가정하여, 식(1)을 이용하여 식(2)를 변형하면,

$$\lambda \frac{d^2 T}{du^2} + \mu = 0 \quad (14)$$

윗 식을 적분하여 식(7)을 이용하면 다음과 같이 나타낸다.

$$T = T_b + T_e \left(1 - \frac{T_b}{T_e} + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right) \frac{u}{u_e} - \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \left(\frac{u}{u_e} \right)^2 T_e \quad (15)$$

$T_b/T_0=1$ 인 유체를 고려하면, 식(15)와 $T_b/T_e = T_0/T_e = \{1 + (\gamma-1)M_e^2/2\}$ 의 관계로부터, 제트 유동의 임의의 위치에서 마하수는,

$$M = \frac{u}{a} = \frac{u}{u_e} \frac{u_e a_e}{a} = \frac{u}{u_e} \frac{M_e}{\sqrt{\frac{T}{T_e}}} = \frac{u}{u_e} \frac{M_e}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \left[1 - \left(\frac{u}{u_e} \right)^2 \right]}} \quad (16)$$

p 는 유동 방향과 반경방향에 대해 모두 일정하다고 가정하면, 피토관에서 측정된 전압(p_t)은 유체가 초음속($M>1$)일 때,

$$\frac{p_t}{p_0} = \left[\frac{(\gamma+1)M^2}{2 + (\gamma-1)M^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma M^2 - (\gamma-1)} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (17)$$

유체가 아음속($M<1$)일 때,

$$\frac{p_t}{p_0} = \left[\frac{2 + (\gamma-1)M^2}{2 + (\gamma-1)M_e^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (18)$$

3. 수치해석 방법 및 계산 영역

본 연구에서는 축대칭 압축성 Navier-Stokes 방정식을 유한 체적법으로 이산화하였으며, 공간항에 대해서는 풍상 차분법을, 그리고 시간항의 적분은 단단계 Runge-Kutta법을 적용하였다. 난류 모델은 공학적으로 널리 이용하고 있는 표준형 압축성 $k-\epsilon$ 모델을 사용하였다.

Fig.1은 본 수치해석에서 사용한 초음속 마이크로 노즐의 개략도이다. 수치계산에 사용한 노즐은 설계 마하수가 2.0, 2.2, 2.6인 3종류로, 설계 마하수에 따른 노즐의 상세 치수는 Table.1에 나타내었다.

Fig.2는 본 수치해석에 적용된 계산 영역과 경계 조건을 나타내었다. 계산 영역은 노즐 출구로부터 축방향으로 500D, 반경방향으로 200D로 설정하여 수치해석을 수행하였다. 경계 조건으로 노즐의 입구에서 유입 조건, 노즐 출구에서는 유출 조

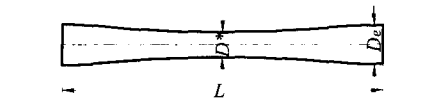


Fig. 1 Schematic of supersonic micro nozzles

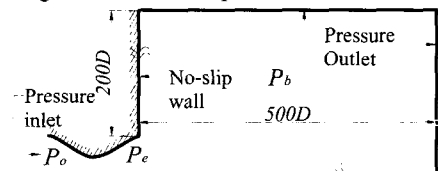


Fig. 2 Computational flow field and boundary conditions

Me	De(mm)	D*(mm)	L(mm)
2.0	1.2	0.924	18
2.2	1.2	0.847	18
2.6	1.2	0.705	18

Table. 1 Specifications of supersonic micro nozzles

건, 모든 고체 벽면에 대해서는 단일 no-slip조건을, 중심축에 대해서는 축대칭 조건을 적용하였다. 본 연구에서 적용된 초음속 마이크로 노즐의 유동장은 중심축에 대해서 대칭이므로 상반부에 대해서 약 4.5만개의 정렬격자를 생성하여 수치해석을 수행하였다. 본 수치해석에서 얻은 수치해의 수렴 판정을 위하여 질량, 운동량, 에너지, k 와 ϵ 의 잔차를 10^{-4} 이하로 설정하였으며, 노즐의 입구와 출구에서 질량 유량의 변화를 조사하여 질량 유량의 합이 0.5%이하로 되는 조건을 수치해가 수렴한 것으로 판정하였다.

4. 결과 및 고찰

Fig.3은 노즐 출구로부터 적정팽창을 하는 초음속 제트 유동장의 개략도와 중심축상의 마하수 분포를 나타내었다. 제트 유동이 노즐 출구로부터 적정팽창을 하는 경우, 제트 내부에서 충격파가 발생하지 않으며, 노즐 출구면에서 균일 속도를 유지하는 제트 코어 부분이 하류까지 지속된다. 이러한 제트는 주위의 유체와 혼합함으로써 인해 제트 코어 부분은 점차 축소하게 되어 제트 내부에서 균일 속도가 더 이상 존재하지 않게 된다. 이후에, 유동이 초음속 상태로 계속 혼합을 하다가 음속선(sonic line)을 지나 아음속 제트로 천이한다^[12]. 노즐 출구로부터 $M_c = M_e$ 가 되는 제트 코어 종료점까지의 거리를 제트 코어 길이(x_{core})라 하며, 노즐 출구에서 마하수가 1보다 큰 초음속 영역까지의 거리를 초음속 길이(x_{super})라 한다.

Fig.4는 적정팽창을 하는 제트유동의 마하수 선도를 나타내었다. 그림의 (i)과 (iii)은 이론적인 적정팽창 압력비($p_b/p_e=1$)에서의 유동장이며, (ii)와 (iv)는 압력비를 변화시켜 수정된 압

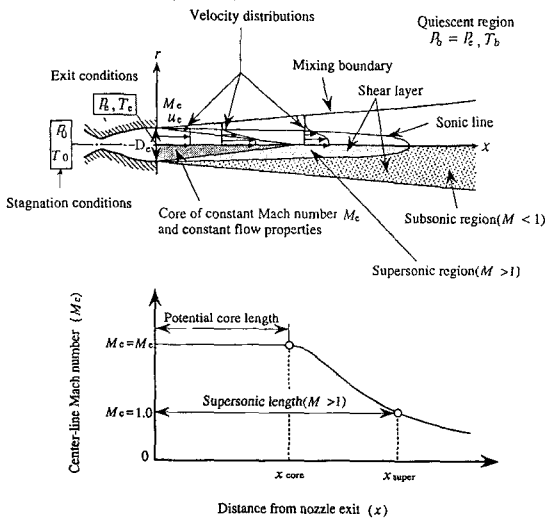


Fig.3 Schematic diagram and Mach number distributions of a correctly-expanded supersonic jet

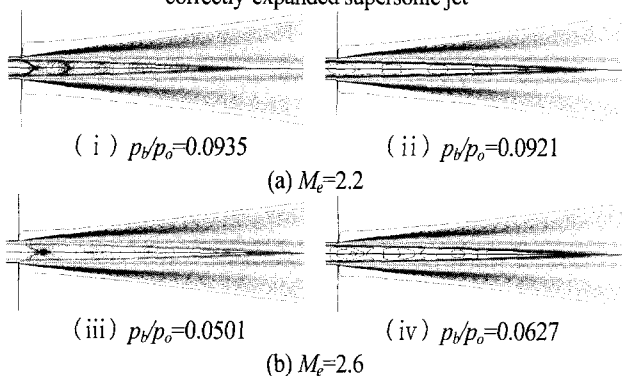


Fig.4 Mach number contours of correctly-expanded supersonic jets

력비에서의 유동장이다. 이론적인 적정팽창 압력비에서 제트 유동은 유체 점성 등의 영향으로 약한 부족팽창상태가 되어 제트 내부에 충격파 시스템이 나타나고 있다. 압력비를 변화시킨 제트 유동은 제트 내부에 충격파 시스템이 사라지고 실제로 적정팽창상태가 된다.

Fig.5는 제트 유동의 중심축을 따르는 마하수의 분포를 나타낸 것이다. open symbol(\circ, \triangle)은 실험값^[11], closed symbol(\bullet, \blacktriangle)은 수치해석 결과를 나타내었다. 마하수가 증가할수록 일정한 M_c 를 가지는 x/D_e 가 증가하고 있으며, 실험결과와 수치해석 결과는 정성적으로 잘 일치하고 있다. $M_e=2.6$ 인 경우, M_c 가 설계 마하수보다 낮게 분포되어 있는데, 이는 유동의 마하수는 면적비의 함수임을 고려하면, 경계층에 의한 출구의 유효단면적의 변화로 인한 노즐 목과 출구의 면적비 변화가 원인일 것으로 생각된다.

Fig.6은 노즐 목과 출구의 면적비에 따른 압력비 분포를 이론^[9]과 수치해석 결과를 비교하여 나타낸 것이다. 실선은 등엔트로피적으로 적정팽창되는 경우를 나타내며, 점선은 노즐 출구면에서 수직충격파가 발생하는 조건을 나타낸다. 실선의 아래 영역은 제트유동의 부족팽창상태를 나타내며, 위의 영역은 과팽창상태를 나타낸다. $M_e=2.0$ 과 $M_e=2.2$ 인 경우, 이론해석에 의한 적정팽창 압력비와 잘 일치하고 있으나 마하수가 증가하여 $M_e=2.6$ 일 경우엔 이론해석의 과팽창 영역에서 적정팽창상태가 되었다. 이는 노즐 내부의 경계층 등의 점성의 영향에 의해서 실제의 제트유동은 부족팽창상태가 되기 때문이다.

Fig.7은 마하수의 변화에 따른 제트 코어의 길이와 초음속 길이를 이론값과 수치해석 결과를 비교하였다. 마하수가 증가할수록 제트 코어의 길이와 초음속 길이는 증가하고 있으며, 이론값과 수치해석 결과는 차이를 보이고 있다. 이는 수치해석에서는 노즐 내부의 유동이 비등엔트로피과정이지만, 이론해석에서는 노즐 내부의 유동이 등엔트로피 과정이라고 가정 수로 제트 코어의 길이와 초음속 길이는 증가하고 있으며, 이론값과 수치해석 결과는 차이를 보이고 있다. 이는 수치해석

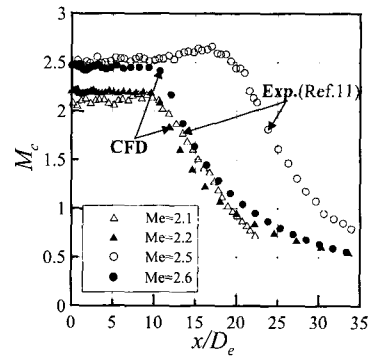


Fig.5 Centerline Mach number distributions

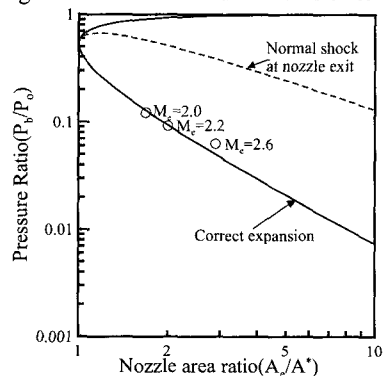


Fig.6 Flow pattern with nozzle pressure and area ratios

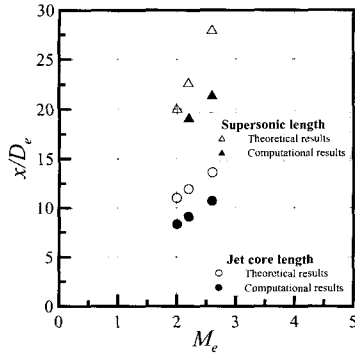


Fig.7 Jet core length vs Mach number

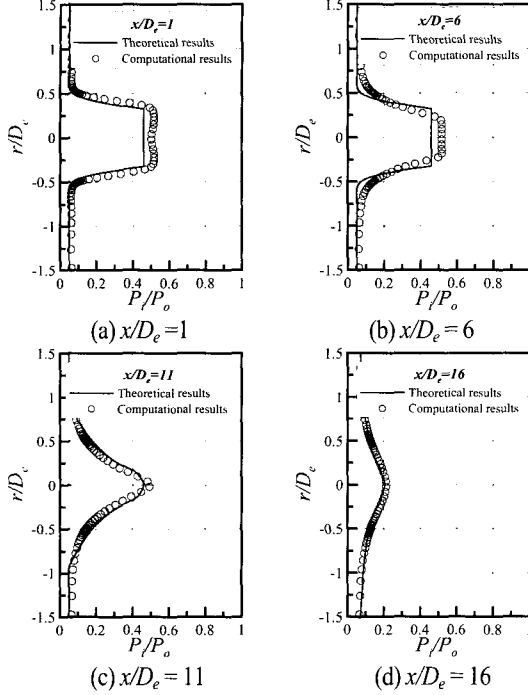


Fig.8 Radial impact pressure distributions ($M_e=2.6$)

에서는 노즐 내부의 유동이 비등엔트로피과정이지만, 이론해석에서는 노즐 내부의 유동이 등엔트로피 과정이라고 가정하고 있다. 이론해석과 수치해석의 결과는 정성적으로 일치하고 있다.

Fig.8은 $M_e=2.6$ 인 경우, 노즐 출구로부터 x/D_e 가 1, 6, 11 및 16인 지점에서의 반경방향의 충돌전압 분포를 이론해석 결과와 비교하였다. 그림으로부터 x/D_e 가 약11까지 중심축에서 압력이 일정하게 유지되고 이후에 압력이 감소한다. 이로써, $M_e=2.6$ 인 경우, 노즐 출구로부터 x/D_e 가 약11이 되는 거리까지 제트 코어 영역이라는 것을 알 수 있다. 이후, x/D_e 가 증가할수록 압력은 감소하고 있으며, 이론해석 결과와 수치해석 결과는 잘 일치하고 있다.

Fig.9는 노즐출구로부터 x/D_e 가 1, 6, 11 및 16인 지점에서의 반경방향의 충돌전압 분포를 $M_e=2.2$ 인 경우에 대하여 나타낸 것이다. x/D_e 가 1과 6인 지점에서의 충돌전압은 제트 중심축에서 동일한 값을 가지므로 제트 코어 영역이라는 것을 알 수 있다. 또한 x/D_e 가 증가할수록 충돌전압은 감소하고 있으며, jet boundary 근처에서 급격한 압력구배를 보여주고 있다.

5. 결론

본 연구에서는 축대칭 압축성 Navier-Stokes 방정식을 사용

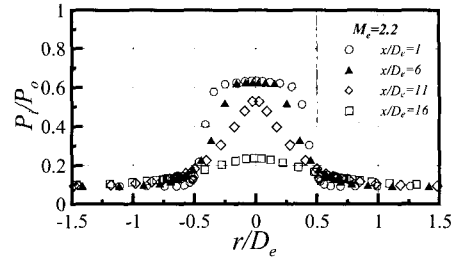


Fig.9 Radial impact pressure distributions ($M_e=2.2$)

한 수치해석을 통하여 초음속 마이크로 제트의 유동 특성을 조사하였다. 수치해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 마하수가 증가할수록 제트 코어의 길이가 증가하며, 제트 코어 영역 내의 충돌 전압은 작게 나타난다.
- 2) 노즐 내부에 경계층 등의 점성의 영향으로 인하여 제트 유동은 적정팽창 압력비에서 부족팽창 상태가 된다.
- 3) 이론해석 결과는 수치해석 결과와 비교적 잘 일치한다.

후기

이 논문은 2002년도 두뇌한국 21사업에 의해 지원되었음.

참고문헌

- [1] Hegena, O. F., "Molecular Beams and Low Density Gas Dynamics," Ed. By P.P. Wegener, Dekker Inc.(1974)
- [2] 김희동, 이종수, "가스 미립화용 노즐로부터 방출되는 초음속 분류에 관한 실험적 연구," 대한 기계학회, 제20권, 제2호 (1996), pp.697-709.
- [3] Quinlan, N. J., Kendall, M. A. F., Bellhouse, B. J. and Ainsworth, P. W., "Investigations of Gas and Particle Dynamics in First Generation Needle-Free Drug Delivery Devices," Shock Waves Journal, Vol.10 (2000), pp.395-401.
- [4] Burkoth, T. L., Bellhouse, B. J., Hewson, G., Longridge, D. J., Muddle, A. G. and Sarphie, D. F., "Transdermal and Transmucosal Powered Drug Delivery," Critical Reviews in Therapeutic Drug Carrier Systems, Vol.16 (1999), pp.331-384.
- [5] Love, E. S., Grigsby, C. E., Lee, L. P. and Woodling, M. J., "Experimental and Theoretical Studies of Axisymmetric Free Jet," NASA TR R-6 (1959)
- [6] Adamson, T. and Nicolls, J., "On the Structure of Jets from Highly Under-Expanded Nozzles into still Air," Journal of Aero space Science, Jan. (1959), pp.16-24.
- [7] Kendall, M. A. F., Quinlan, N. J., Thorpe, S. J., Ainsworth, R. W. and Bellhouse, B. J., "The Gas-Particle Dynamics of a High-Speed Needle-Free Drug Delivery Systems," Shock Waves Journal (1999), pp.605-610.
- [8] 정미선, 김현섭, 김희동, "초음속 마이크로 제트 유동에 관한 기초적 연구," 대한기계학회 추계학술대회 논문집(B) (2001), pp.622-627.
- [9] 정미선, 김희동, "초음속 종류와 난류 마이크로 제트에 관한 연구," 대한기계학회 춘계학술대회 논문집 (2002)
- [10] Kim, H. D., Matsuo, K. and Setoguchi, T., "Investigation on Onset of Shock-Induced Separation," Shock Waves Journal, June (1996), pp.275-286.
- [11] 櫻谷賢士, "超音速ノズルからの適正膨張噴流に□する研究," 口田公□博士□位論文 (1998)
- [12] Shire, J. W. and Seubold, J. G., "Length of the Supersonic Core in High-Speed Jets," AIAA Journal, Vol.5 (1967), pp.2062-2064.